SHOUT
SHARE
IT

S 1310. C-5-

Sl. 1310 D.C

S 1310. C.15

Abhandlungen
der
Churfürſtlich-baieriſchen Akademie
der
Wiſſenſchaften

Fünfter Band,
welcher die philoſophiſchen enthält.

München
zu finden in der churfürſtlich-akademiſchen Buchhandlung 1768.

BRITISH
NATURAL HISTORY

Vorrede.

Wir liefern unſerm vorjährigen Verſprechen zu folge den 5ten Band unſerer akademiſchen Abhandlungen von jeder Claſſe beſonders, ſo daß die Liebhaber einer oder der andern Materie den davon handelnden Theil in einem abgeſonderten Bande haben können.

Der gegenwärtige enthält die philoſophiſchen Abhandlungen, worunter die erſte des Herrn Karſten von den Logarithmen negativer Größen um ſo merkwürdiger iſt, als ſie eine Frage betrift, über welche die größten Mathematikverſtändigen und Analyſten der neuern Zeiten nicht haben einig werden können, nämlich ob dergleichen Logarithmen möglich ſeyn oder nicht. Unſer Herr Autor hat ſich alle Mühe gegeben, die Begriffe ſo deutlich auseinander zu ſetzen, und den eigentlichen Sinn der Streitfrage in ein ſo helles Licht zu ſtellen, als es ihm nur immer möglich geweſen.

Vor allem beſtimmet Er die eigentliche Notion deſſen, was man negative und unmögliche Größe, und was man Logarithmen heißt, ſo wie beyde Theile über dieſe Begriffe ſich vergleichen, und zeiget, daß wenn man in der Analyſe verſchiedene Größen mit einander vergleichet, es nicht blos allein um die Größe der einen gegen der andern, ſondern auch darum zu thun ſey, ob eine der andern entgegen geſetzt ſey oder nicht, eben ſo, wie es bey Vergleichung zweyer Linien, nicht nur um ihre Größe, ſondern auch um ihre Lage gegeneinander zu thun iſt, auf welche in der Algebra mit geſehen werden muß. Dadurch entſteht nun einige Einſchränkung von der Gleichheit zweyer Verhältniſſe, worauf bey dieſer Streitfrage zu ſehen iſt, weil die Lehre von den Logarithmen von der Lehre der Verhältniſſe abhängt.

Geübte Kenner der Analyſe werden in dieſer Abhandlung eine überaus ſcharfſinnige Beurtheilungskraft und denjenigen ſchöpferiſchen Geiſt entdecken, der allen großen Geometern in Erfindung unbekannter oder in deutlicher Entwickelung und richtiger Anwendung bekannter Wahrheiten eigen iſt. Unſer Herr Author tritt endlich der Leibnitziſchen und Euleriſchen Meynung bey, und beweiſt gegen Bernoulli und d'Alembert, daß die Logarithmen negativer Größen unmöglich ſind; wenn man nämlich darunter die Logarithmen der Verhältniſſe negativer Zahlen zur poſitiven Einheit verſteht, hingegen giebt er die Möglichkeit der negativen Logarithmen zu, wenn ſie die Verhältniſſe negativer Größen zur negativen Einheit ausdrücken; da aber die Einheit in algebraiſchen Rechnungen niemal anderſt als Poßitiv angenommen werden kann, ſo ſind die Logarithmen negativer Größen eben ſo unmöglich als die negative Einheit ſelbſt. In der zweyten Abtheilung wendet der Herr Verfaſſer die in der erſten feſtgeſetzte Theorie auf die Geometrie an, und widerleget alle diejenigen Gründe, welche die Herren Bernoulli und Euler aus dieſem Fache zum Behuf der Logarithmen negativer Größen angeführet haben. Der angenehme und kernichte Vortrag, der in dieſer Abhandlung herrſchet, benimmt dem der Sache verſtändigen Leſer allen Eckel, den eine an ſich ſelbſt ſo abſtruſe Materie ſonſt verurſachen könnte.

Im zweyten Stück von den Projectionen der Kugel, welche eben den Herrn Karſten zum Verfaſſer hat, herrſchet eben ſowohl der ſtarke analytiſche Formelgeiſt unſerer heutigen großen Mathematiker, womit ſie gleichſam Wunder thun. Der Herr Autor hat die Theorie von den Projectionen der Kugel, welche bisher noch in etwas unvollſtändig geweſen, ſehr erweitert, und beſonders mittelſt leichter und vortheilhafter Regeln und analytiſcher Formeln ungemein brauchbar gemacht, ſo daß ſie bey Projectionen der Sonnenfinſterniſſe gute Dienſte leiſten kann.

Das dritte Stück hat uns Herr Euler geliefert, welches verſchiedene merkwürdige Auflöſungen geometriſcher Aufgaben enthält. Es betrift die Abtheilung einer jeden geradelinichten ſowohl als Zirkel- und paraboliſchen Fläche in ſoviel gleiche Theile, als man verlanget, durch parallellinien, welche nach einer gegebenen Richtung lauten: Dieſe Abhandlung iſt alſo practiſch, und kann im Feldmeſſen mit vielen Nuzen angewendet werden. Denn da man bisher die Theilung ſolcher Flächen nur beyläufig treffen können; ſo giebt die euleriſche Methode an Hand, wie ſie ſich auf das genaueſte auf einmal berechnen laſſen; beſonders ſind die allgemeinen Formeln zu Theilung der Zirkel- und Parallelflächen merkwürdig.

Im vierten Stücke macht wohlbeſagter Herr Euler einen Verſuch, die Figur der Erde durch die Beobachtungen der Mondshöhen zu beſtimmen; und wiewohl dieſes durch die pariſer Akademie ſchon ſo genau geſchehen, als es nur immer möglich iſt, ſo hat doch unſer Herr Autor auf eine ſcharfſinnige Art gezeiget, wie ſothane Beobachtungen angewendet werden müſſen, um einerſeits daraus die Figur der Erde heraus zu bringen, und anderſeits zu prüfen, wie weit man ſich auf die Beſtimmung ſolcher Figur verlaſſen könne. Er löſet demnach zwo Aufgaben mit vieler Scharfſinnigkeit und der ihm eigenen analytiſchen Stärke auf. In der Erſten wird die Figur des Mittagkreiſes für bekannt angenommen und beſtimmt, unter welcher Höhe der Mond an einem jeden gegebenen Orte dieſes Meridians zur Zeit ſeines Durchganges erſcheinen muß, in der letztern wird aus den beobachteten Mondshöhen an verſchiedenen Orten unter dem nämlichen Mittagskreiſe die Figur der Erde beſtimmt. Herr Euler bekennt aber doch am Ende, daß dieſe Art, die Figur der Erde zu beſtimmen, derjenigen weit nachzuſetzen ſey, deren ſich die pariſer Akademie bedienet habe, weil die Entfernung des Mondes von der Axe der Erde ſehr groß iſt.

Im fünften Stück liefert mehr belobter Herr Euler die Beſchreibung von einer magnetiſchen Sonnenuhr, die zwar in Anſehung ihres Gebrauchs ziemlich eingeſchränket iſt, indem ſie nur an dem Orte gebraucht werden kann, auf deſſen Polhöhe ſie gerichtet iſt; die Umſtände aber, die bey Verfertigung dieſer Sonnenuhr in Acht genommen werden müſſen, haben dem Herrn Verfaſſer Anlaß gegeben, verſchiedene Anmerkungen darüber zu machen, und verſchiedene analytiſche Formeln dabey anzubringen.

Das ſechste Stück iſt von Hrn. Scheidt, der die akademiſchen Abhandlungen bereits mit verſchiedenen ſchönen andern bereichert hat. Es handelt von Scheidung und Aufbereitung geringhaltiger Aerze bey Bergwerken, wo der Herr Verfaſſer die Urſachen anführet, warum die bisherigen Poch- und Waſchwerke den Nutzen nicht geſchaffet haben, den man von ihnen erwartet hatte. Er beſchreibt darauf die Maſchinen, die man bisher bey den Pochgräben und Gerinnen gebrauchet, und zeiget aus mechaniſchen Gründen, daß ſie zur vortheilhaften Abſönderung der ſchwerern und leichtern Aerzeſtuffen nicht ſonderlich taugen. Er giebt zugleich eine andere Anlage, davon er ſelbſt die gehofte gute Wirkung erfahren zu haben verſichert.

Das ſiebente Stück iſt des Herrn Rüdigers Abhandlung von den erſten Anfangsgründen der Körper, die ſich auf ein ganz anders Syſtem gründet, als ehemals die Araber, Theophraſtus Paracelſus und in neuern Zeiten Becher gehalten haben.

Das achte Stück enthält des Hrn. v. Oſterwald Vorſchlag einer neuen Kalenderform, und Einſchaltungsart; wornach die weſentlichen Stücke des chriſtl. Kalenders, nämlich die Qualität eines jeden Jahrs, die Sonntagsbuchſtaben, das Frühlings-Æquinoctium, und der öſterliche mittlere Vollmond auf eine überaus leichte

Art, ohne allen aſtronomiſchen Calcul, beſtimmet werden können. Dieſe Methode iſt daher nicht nur der gregorianiſchen, ſondern auch der proteſtantiſchen ſogenannten verbeſſerten, weit vorzuziehen. Durch die vorgeſchlagene Einſchaltungsart wird das mittlere Frühlings-Æquinoctium beſtändig am 20ten März erhalten, die Zirkel gehen ewig fort, ſo daß man weder Cyclos ſolis, noch verſchiedene Ordnungen derſelben nöthig hat. Das wahre Oſterfeſt kann auf dieſe Weiſe niemal verfehlet werden, weil man das Frühlings Æquinoctium ſowohl als den nächſt darauf folgenden öſterlichen mittlern Vollmond auf den Meridian zu Rom, der nicht um eine ganze Minute von dem zu Uranienburg differiret, nicht etwann nur auf Tage, ſondern auf Stunden und Minuten weit leichter beſtimmen kann, als man die bloßen Tage nach den gregorianiſchen Epacten findet. Und was das beſte dabey iſt; ſo läßt ſich dieſe Kalenderforme faſt alle Jahre, ohne das geringſte Aufſehen oder Trouble in den Commercien zu erwecken, einführen. Die Größe des Jahrs wird, wie in der gregorianiſchen und julianiſchen zu 365 Tagen in einem gemeinen, und zu 366 Tagen in einem Schaltjahre angenommen; und in dieſem iſt der 24te Februarii der Schalttag, folglich dieſer Monath 29 Tage lang. Der Unterſchied des corrigirten Kalenders von dem julianiſchen beſteht nur darinnen, daß, da man im julianiſchen

ſchen allemal im vierten Jahr beſtändig fort einſchaltet, ſo geſchieht dieſes in dem corrigirten Kalenderſyſtem nur ſiebenmal nacheinander, und das achtemal erſt im 5ten Jahre. Dieß macht einen Zirkel von 33 Jahren, in deren Verlauf 8 Tage eingeſchaltet werden. In 4 ſolchen Zirkeln, die 132 Jahre ausmachen, werden demnach 32 Tage eingeſchaltet, da man nach der julianiſchen Jahrsforme 33 einſchaltet. Man bringt alſo die nach dem julianiſchen Syſtem zu viel eingeſchalteten Stunden nach dem unſrigen eben ſowohl herein, als nach dem gregorianiſchen; aber mit weit mehreren Vortheile und Bequemlichkeit: weil die Unterlaſſung der überflüßigen Schalttage nur nach und nach und gleichſam unvermerkt geſchieht, folglich die Æquinoctia und Solſtitia an den nämlichen Tagen erhalten werden, welches nach der gregorianiſchen Intercalation nicht angeht.

Im erſten Abſchnitte handelt der Herr Verfaſſer von bloßen einfachen Zirkeln zu 33 Jahren; im zweyten hingegen ſchlägt er combinirte Zirkel vor, wo man drey Einfache zu 33 Jahren, und einen zu 29 Jahren miteinander verbindet, und einen großen Zirkel von 128 Jahren daraus machet, nach deren Verfluß die mittlern Æquinoctia zu den nämlichen Stunden, Minuten und Secunden des Tags reſtituiret werden; wenn man nämlich die Größe des aſtronomiſchen Sonnenjahrs nach den richtigſten Obſervationen zu 365 Tagen, 5 Stund. 48 Min. und 45 Secunden annimmt.

Zugleich lehret der Herr Autor, wie man die Tage des corrigirten Kalenders mit einer wunderbaren Facilität, und Geſchwindigkeit ohne einige Data aus der Chronologie dazu nöthig zu haben, auf die Gregorianiſchen und Julianiſchen reduciren kann.

Eine der ſchönſten Erfindungen unſers Jahrhunderts ſtellet ſich im 9ten Stücke vor Augen; das ſind die Glasmikrometer unſers Mitgliedes, des berühmten Mechanici zu Augsburg, Herrn Georg Friedrich Branders. Die Beſchreibung dieſer Mikrometer iſt zwar von dem Hrn. Erfinder in einer beſondern Schrift herausgekommen: weil aber derſelbe dieſe Erfindung unſerer Akademie zuerſt bekannt gemacht, und die Maſchine, womit die ſo bewundernswürdige Theilung vermittelſt der Diamant-Riſſe auf den Gläſern verrichtet wird, eingeſendet hat; ſo haben wir alles Recht zu haben geglaubet, dieſelbe den Abhandlungen der Akademie einverleiben zu laſſen.

Das Aug ergötzet ſich, wenn man dieſe ſubtilen Eintheilungen auf dem Glaſe, die man mit bloßem Auge kaum bemerken kann, durch ein Vergrößerungsglas betrachtet. So ſehr daſſelbe auch vergrößert; ſo wird man doch in den Zwiſchenräumen der Theilungen nicht die allergeringſte Ungleichheit merken können. Wer nur ein wenig im Schätzen des Augenmaaßes geübet iſt, der kann mit dieſen Mikrometern kleine Winkel bis auf 2. bis 3 Secunden meſſen; eine Præciſion, welche man bisher niemal vermuthet hätte.

Weyland Herr Profeſſor Mayer zu Göttingen hat auch eine Art von dergleichen Mikrometern erfunden, und ſich derſelben bey ſeinen aſtronomiſchen Beobachtungen mit großem Vortheile bedienet. Sie ſind aber gegen die Branderiſchen faſt für nichts zu rechnen. Herr Mayer zeichnete die Linien auf ſeinen Glasmikrometern mit ſchwarzem Tuſche, welcher durch die geringſte Unachtſamkeit weggewiſchet werden konnte. Es war auch nicht möglich, die Theilungen vollkommen gleich zu machen; weil ſie von freyer Hand nach dem Augenmaaße gemacht wurden: deswegen mußte ſich auch Herr Mayer eigene Tabellen dazu machen: die Linien konnten auch nicht zarte genug gezogen werden. Auf den branderiſchen Mikromern hingegen werden ſie mit dem feinſten Diamantport gezogen; folglich bleiben ſie ewig, die Theilungen ſind ſo vollkommen gleich, als ſie es in der Natur ſeyn können, und als ſie das beſte Aug mit den ſchärfeſten Vergrößerungsgläſern immer diſcerniren kann: und die Striche ſind ſo zart, daß ſie kaum den zweyhundertſten Theil einer Pariſer Decimallinie bedecken.

Was dieſe Glasmikrometer für ungemeine und herrliche Dienſte in der Aſtronomie leiſten, iſt den Sternkündigen zu Genüge bekannt; und der belobte Herr Profeſſor Mayer, einer der größten Aſtronomen unſers Jahrhunderts, hat die Vortheile davon in ihrem ganzen Umfange eingeſehen. Was dieſer große Mann gewünſchet, aber ſich nicht zu hoffen getrauet hat, daß ſich nämlich jemand finden möchte, der die Theilungen auf dem Glaſe mit genugſam zarten Diamantſtrichen, ohne auf den Seiten auszuſpritzen, und in einer vollkommenen Gleichheit, zuwege bringen könnte, das iſt nun durch unſern Herrn Brander glücklich erreichet worden, und ſein Name verdienet eben deswegen in den aſtronomiſchen Jahrbüchern verewiget zu werden.

Nicht allein aber in der Aſtronomie ſondern auch in der Erdmeſſerey können dieſe Mikrometer wichtige Dienſte thun. Man kann damit den Plan eines Feldes, wenn es nicht gar zu groß iſt, und nicht über 2000 Schuhe im Durchmeſſer hat, aus einer einzigen

Station, ohne einige Meßkette zu gebrauchen, ſehr genau und zuverläßig aufnehmen: weil man aus der gegebenen Größe eines Objects ſeine Diſtanz, und aus der gegebenen Diſtanz die Größe des Objects, in nicht gar zu weiten Entfernungen beynahe eben ſo genau ermeſſen kann, als wenn man ſich einer Meßkette bediente.

Herr Brander iſt nicht bey den bloßen Glasmikrometern, die man in Fernröhre und Teleſcopien ſetzet, ſtehen geblieben; ſondern er hat verſuchet, ganze Scalen auf Glaſe, zu 30 und mehr Zollen lang, auf eben die Art zu verfertigen. Und da hat ſich gezeiget, was für eine unglaubliche Genauigkeit und Juſteſſe ſeine Eintheilungsmethode mit der Maſchine zu erreichen fähig iſt. Denn, wenn man zwey auf gleiche Art getheilte Glasſcalen aufeinander leget, ſo paſſen die Theilungsſtriche durchaus vollkommen aufeinander, man mag ſie umkehren und verſchieben, wie man immer will.

Dieß hat unſern Künſtler auf die Erfindung eines Sectors geleitet, welcher im 10ten Stücke beſchrieben wird, und womit man in der Aſtronomie ſowohl als Geometrie auf eine ſehr leichte und bequeme Art: weil das Inſtrument nur von Holze gemacht iſt, und ſich allenthalben ohne die mindeſte Unbequemlichkeit hin transportiren läßt, Winkel bis auf 4 und 5 Secunden nahe zuverläßig beſtimmen kann, ſo man bisher von den größten aſtronomiſchen Sextanten vergebens erwartet hat.

Den Beſchluß machet im 11ten und letzten Stück die Beſchreibung einer neuen Nivellierwage, welche ebenfalls von unſerm Herrn Brander erfunden worden, und alle bisherigen gar weit übertrift; indem die damit gefundenen Horizontallinien von den wahren kaum um 2 Secunden im Winkel abweichen. Sie hat dabey die unvergleichlichen zween Vortheile, daß man ſie 1) ganz geſchwinde allenthalben, auch in einem Zimmer, ehe man die Operation damit auf dem Felde vornimmt, rectificiren kann; und 2) daß die Bewegung der Luft nicht die geringſte Alteration dabey verurſachet, ſo daß ſie ganz geſchwinde mit Zuverläßigkeit geſtellet und in dieſer Stellung immerzu erhalten wird, das Wetter mag beſchaffen ſeyn wie es nur immer will. Wenn man eine ſolche Nivellierwage bey dem im 1ten Tome der akademiſchen philoſophiſchen Abhandlungen S. 113. u. f. beſchriebenen, und ſeit dem gar ſehr verbeſſerten, ja beynahe von Hrn. Brander bis zur äuſerſten Vollkommenheit gebrachten Meßinſtrument anſtatt eines Bleyſenkels anbringen wollte; ſo würde man in aſtronomiſchen Beobachtungen eben die Präciſion erreichen, welche uns bisher die größten Quadranten und Sextanten kaum gewähret haben; und dieſer Vortheil würde deſto größer ſeyn, weil man beſagtes Inſtrument mit einer einzigen Hand hin und her tragen, und bey einem jeden Fenſter in unverrückter Stellung gebrauchen kann.

Lauter Erfindungen, welche unſerm Jahrhundert, noch mehr aber der churbaieriſchen Akademie der Wiſſenſchaften, und am allermeiſten ihren Autoren Ruhm und Ehre bringen.

15 NOV

Wenceslaus Johann Guſtav

Karſten,

der Weltweisheit Doctors und der Mathematik
Profeſſors zu Bützow,

Abhandlung

von den

Logarithmen
verneinter Größen.

Erſte Abtheilung.

§. 1.

Wenn Männer, wie Leibnitz und Bernoulli, wie Euler und d'Alenbert, über eine Lehre uneinig ſind, und noch darzu über eine Lehre, worauf die erhabenſten menſchlichen Entdeckungen ſich gründen: ja was noch mehr iſt, über eine Lehre derjenigen Wiſſenſchaft, worinn man ſeit Jahrtauſenden den höchſten Grad der Evidenz zu finden geglaubt hat; ſo kann es der gelehrten Welt nicht gleichgültig ſeyn, wenn eine ſolche Uneinigkeit das Schickſal der mehreſten gelehrten Streitigkeiten hat, wobey Jeder bey ſeiner Meynung bleibt, und nichts ausgemacht wird. Wäre die Frage: **Ob die Logarithmen verneinter Größen möglich oder unmöglich ſind?** eine bloße ſpeculativiſche Subtilität, welche in das Practiſche der Mathematik und der Naturlehre keinen Einfluß hätte, ſo würde es ziemlich gleichgültig ſeyn, ob man das eine oder das andere behauptete. Allein von der Beantwortung dieſer Frage hängt in der Ausübung der Mathematik ſehr vieles ab. So wenig es den Analiſten gleichgültig ſeyn kann, ob man die Wurzeln gerader Exponenten aus verneinten Größen für möglich oder unmöglich hält, eben ſo wenig kann es ihm gleichgültig ſeyn, zu welcher Claſſe man die Logarithmen verneinter Größen rechnet.

§. 2.

Es hat ſeit einiger Zeit das Anſehen gehabt, als wenn der Streit über die Beſchaffenheit der Logarithmen verneinter Größen durch Herrn Eulers Aufſatz: De la controverſe entre Mrſ. Leibnitz & Bernoulli ſur les Logarithmes des nombres negatifs & imaginaires, im V Tome der Hiſtoire de l'Academie de Berlin, völlig ſey beygeleget worden. Allein Herr d'Alenbert tritt in ſeinen im Jahr 1761. zu Paris gedruckten Opuſcules Mathematiques auf des Herrn Bernoulli Seite, und ſucht Herrn Eulers obangeführten Aufſatz zu widerlegen. Ich habe mir Mühe gegeben, ausfindig zu machen, worauf es bey dieſer Streitigkeit ankomme, und ich mache mir die Hoffnung, daß diejenigen Gedanken, welche ich von dieſer Sache in gegenwärtiger Abhandlung vorgetragen habe, vieles dazu werden beytragen können, die Streitigkeit beyzulegen.

§. 3.

Man muß ſich ohne Zweifel über die Hauptbegriffe des ſtreitigen Satzes vor allen Dingen vergleichen; beyde ſtreitende Theile müſſen einerley Sache im Sinne haben, wenn ſie die Wörter: **Logarithmus** und **verneinte Größe** gebrauchen, widrigenfalls iſt keine Einigkeit zu hoffen. Was iſt aber eine verneinte Größe? was iſt ein Logarithmus? Ich glaube ſchwerlich, daß der Streit entſchieden werden könne, wofern man bey Beantwortung dieſer Fragen nicht bis auf die erſten Anfangsgründe zurück geht. Es kömmt mir wenigſtens ſo vor, als wenn man die Streitfrage in immer mehr Dunkelheit einhüllet, wenn man die Gründe ſowohl für die eine, als für die andere Meynung aus der Integralrechnung und höhern Geometrie hernimmt. Herrn Eulers angeführte Abhandlung über dieſe Sache iſt unvergleichlich: dieß darf ich wohl nicht ſagen, da dieſer große Mann nichts als vortrefliche Stücke liefert. Allein ich glaube Herr d'Alenbert wäre leichter überzeugt worden, wenn Herr Euler den Begriff der Logarithmen einzig und allein aus den Anfangsgründen genommen hätte. Denn gegen dem Begriff, worauf Herrn Eulers Abhandlung gebauet iſt, konnte Herr d'Alenbert auf der 197 Seite, ſeiner vorhin angeführten Schrift, dieſes erinnern, es werde dabey das ſchon voraus geſetzt, worüber doch erſtlich geſtritten wird, daß nämlich alle Logarithmen zu poſitiven Zahlen gehören, weil $(1+w)^n$ nichts anders, als eine poſitive Zahl bedeuten kann, wenn w unendlich klein, und n unendlich groß iſt. Auch Herrn d'Alenberts Abhandlung iſt voll der tiefſinnigſten Unterſuchungen. Vieleicht kann man ſagen, ſie habe noch dieſen Vorzug vor der Eulerſchen voraus, daß ſie bis auf die erſten Begriffe zurück gehet. Allein, ſo wie dieſe vom Herrn d'Alenbert vorgetragen ſind, können ſie ſchwerlich gebraucht werden, die ſtreitige Sache in ihr völliges Licht zu ſetzen. On appelle Logarithmes une ſuite de nombres en progreſſion Arithmetique *quelconque*, repondans a une ſuite de nombres en progreſſion Geometrique *quelconque*. Dieß iſt Herrn d'Alenberts Erklärung der Logarithmen. Freylich lieſt man eben dieſe Erklärung in vielen Lehrbüchern. Ich ſehe aber nicht ab, daß dieſe Erklärung beſſer ſey, als wenn man ſagen wollte, eine negative Größe ſey eine ſolche, die das Zeichen — vor ſich hat. Es iſt daher nicht zu bewundern, wenn Hr. d'Alenbert auf der 199 Seite folgendes behauptet: il n'y a aucune liaiſon neceſſaire entre une ſuite de nombres, & la ſuite des Logarithmes, qui leur repondent. Aber ſtellet nicht jede Hyperbel unzählige Logarithmenſyſteme dar? und iſt zwiſchen den hyperboliſchen Trapezien und ihren zugehörigen Abſciſſen keine nothwendige Verbindung? Das Willkührliche bey den Logarithmen beſtehet überhaupt darinn, daß es gleichgültig iſt, wie groß die Zahl ſeyn ſoll, deren Logarithmum man = 1 ſetzet, oder ſonſt als gegeben annimmt. Eben ſo viel Willkührliches hat auch das Syſtem der trigonometriſchen Linien: es iſt nämlich gleich viel, wie groß der Bogen ſeyn ſoll, deſſen ſinus = 1 geſetzt wird. Aber iſt dann deswegen keine nothwendige Verbindung zwiſchen den Zirkelbogen und ihren reſpondierenden trigonometriſchen Linien?

§. 4.

Es iſt eben ſo nothwendig, ſich darüber zu vergleichen, was man durch das Wort **negative Größe** verſtehen wolle, als es nöthig iſt veſt zu ſetzen, was ein Logarithmus ſey, wenn man die Streitfrage gehörig beurtheilen will. Herr d'Alenbert ſcheinet hierauf Bedacht genommen zu haben, und ſtreuet daher in ſeinem Vortrag einige Gedanken von der Beſchaffenheit der negativen Größen ein. Er verwirft mit Recht auf der 201 und 204 Seite die Vorſtellung der negativen Größen, als ſolcher, die **kleiner als nichts** ſind, ob man gleich dieſe Redensart, als eine Verkürzung des Ausdrucks, ſo wie manche andere für ſich allein widerſinnig lautende Redensarten, in der Analyſi dulden kann. Indeſſen finde ich nicht, daß Herr d'Alenbert ſelbſt von den negativen Größen genauer und beſtimmter rede. Bald ſind ſeine Ausdrücke ganz richtig und der Sache gemäß, z. E. auf der 202 Seite: C'eſt que le ſigne, que porte l'expreſſion algebrique de cette ordonnée, n'indique que ſa *poſition*, und auf der 203 Seite: En un mot toute quantité par elle meme a le ſigne +, elle ne porte le ſigne — que *relativement aux autres* exprimès ou ſouſentendus. Bald aber redet dieſer große Geometer wie Des Cartes und **Wolf**, z. E. auf der 203 Seite le ſigne — n'indique qu une *fauſſe* poſition, und auf der 205 Seite in der Anmerkung: l'equation $by = (a-x)^2$ quand $x > a$, eſt proprement une *fauſſe* equation, la veritable eſt $by = (x-a)^2$ Dieſer einzige Satz, den Herr d'Alenbert hier behauptet, würde hinlänglich ſeyn, ſeyn ganzes Syſtem zu widerlegen, wenn ich ihn als einen richtigen Satz gelten laſſen konnte. Auf die Art iſt ja auch die Gleichung $(-1)^2 = (+1)^2$ eine falſche Gleichung, und die wahre Gleichung dieſe: $(+1)^2 = (+1)^2$ Aber Herr d'Alenbert nimmt jene mit dem Hrn. Bernoulli als wahr an, und ſchließt daraus die Folge: $2\,l - 1 = 2\,l + 1$, und hieraus weiter, es ſey $l - 1 = l + 1$. Ich weis nicht, wie Hr. d'Alenbert dieſem Beweiſe auf der 185 Seite eine ſo große Strenge zuſchreiben kann, da er ſelbſt den Hauptſatz, woraus alles übrige folgt, für falſch erklärt. Jedoch ich kann mich auf die Prüfung der beyderſeitigen Gründe noch nicht einlaſſen, ich muß zuforderſt die ganze Lehre ſo vortragen, wie ich ſie einſehe, und wie ich glaube, daß ſie auseinander geſetzt werden muß, wenn alle Dunkelheit und Verwirrung vermieden werden ſoll.

Begriffe der negativen und unmöglichen Größen.

§. 5.

Es giebt Begriffe, die einander ſo entgegen geſetzt ſind, daß man von der Setzung des einen auf die Verneinung des andern, und umgekehrt, ſchließen kann; und dieſes entweder ſchlechthin, oder in Beziehung auf einen gewiſſen Hauptbegriff, unter der Bedingung, daß von dieſem Hauptbegriff die Rede ſey. Unter der Bedingung, z. E. daß der Stand des Queckſilbers im Thermometer ſich geändert habe, iſt es entweder geſtiegen oder gefallen. Und zum Voraus geſetzt, daß die höchſte Fläche des Queckſilbers, auf einer nach reaumürſcher Art eingetheilten Scale, nicht auf 0 ſtehe, muß ſie entweder über 0 oder unter 0 ſtehen. Wenn man nun von zweyen ſolchen unter einem gemeinſchaftlichen Hauptbegriff einander entgegen geſetzten Begriffen den einen anzeigen ſoll; ſo kann dieß auf eine gedoppelte Art geſchehen. Man kann ihn einmal durch die Worte anzeigen, welche dieſen Begriff gewöhnlicher maſſen bezeichnen: man kann ihn auch durch die Verneinung des ihm entgegen geſetzten ausdeuten. Es iſt gleich viel, ob ich ſage, das Queckſilber im Termometer ſey von der 0 an gerechnet 3 Grade **herunter** gegangen, oder ob ich mich ſo ausdrücke: es ſey von der 0 an gerechnet 3 Grade weggegangen, aber nicht **aufwärts**. Die **Verneinung** ſteckt hier nur im Ausdruck, und es wird in der That durch die Verneinung der einen Sache die ihr entgegen geſetzte **geſetzt**. Wendet man dieſe allgemeinen Betrachtungen auf das, was Größe heißt, gehörig an, ſo hat man den Begriff einer **negativen Größe**.

§. 6.

Es giebt Größen, die unter einem gemeinſchaftlichen Begriff ſtehen, dabey aber einander ſo entgegen geſetzt ſind, daß durch die Verneinung der einen die andere geſetzt wird, und umgekehrt. Diejenige von zweyen einander entgegen geſetzten Größen, welche man durch Verneinung der ihr entgegen geſetzten anzeiget, heißt eine **negative Größe**. Man ſollte richtiger ſagen: eine **negativ ausgedruckte Größe**. Die ihr entgegen geſetzte, wird ſodann ohne Verneinung ausgedruckt, und man nennt ſie eine **poſitive Größe**, da man ſie eigentlich richtiger eine **poſitiv ausgedruckte Größe** nennen müßte. Das Negative ſteckt hier alſo keinesweges in der Größe, ſondern blos in dem Ausdruck, der die Größe bezeichnet. Hat man von A nach B (1 Fig.) eine gerade Linie vorwärts gezogen, ſo kann man eben dieſe Linie auch rückwärts von A nach C verlängern. Soll man nun auf dieſer Linie von A an gerechnet ein Stück, das z. E. drey Fuß lang iſt, abſchneiden, ſo kann dieß auf eine doppelte Art geſchehen, ſowohl vorwärts als rückwärts. Geſetzt man verlanget, es ſollen von A an gerechnet rückwärts drey Fuß abgeſchnitten werden, ſo kann man dieß auch ſo ausdrücken: Schneide von A an gerechnet 3 Fuß ab, aber **nicht vorwärts**. Es werden dieſe nicht vorwärts abgeſchnittene 3 Fuß das Stück AE ausmachen, und das heißt in algebraiſcher Sprache: es ſey $AE = -3$ Fuß. Nun iſt zwar AD eben ſoviel als AE, in Abſicht auf die Größe, aber nicht in Abſicht der Lage; denn es iſt AD der Linie AE der Lage nach entgegen geſetzt. Wird alſo AE verneinent ausgedrückt, ſo muß man AD ohne Verneinung oder poſitiv ausdrücken, und das heißt in algebraiſcher Sprache, es ſey $AD = +3$ Fuß. Ich darf bey dieſen Erklärungen ja den Einwurf wohl nicht fürchten, als hätte ich den algebraiſchen Sprachgebrauch verlaſſen. Die Herren **Hauſen**, **von Segner**, und **Käſtner** tragen in ihren Lehrbüchern, und der Herr Collegienrath Aepinus zu Petersburg in einer zu Roſtock im Jahr 1754. herausgegebenen Schrift de notione quantitatis negativæ dieſe Begriffe eben ſo vor. Deswegen hoffe ich, berechtiget zu ſeyn, dieſe Erklärung von der negativen Größe als ungezweifelt richtig zum Grunde zu legen.

§. 7.

Die ganze mathematiſche Erfindungskunſt beſchäftiget ſich damit, Regeln zu geben, wie man aus einigen bekannten Größen, und deren bekannten Verhältniſſen untereinander, und gegen gewiſſe unbekannte Größen, die letztern finden könne. Man kann aber bekannter maſſen alle Größen, wenn blos von ihrem Verhältniſſe die Rede iſt, ſowohl durch Zahlen als durch Linien ausdrücken, und die algebraiſchen Zeichen ſind ſo allgemein, daß jede algebraiſche Formul ſo gut gewiſſe geometriſche Conſtructionen, als arithmetiſche Operationen anzeiget, nachdem die Buchſtaben entweder Linien oder Zahlen bedeuten. Deswegen laſſen ſich zwo entgegen geſetzte Größen allemal durch zwo gerade Linien vorſtellen, die nach entgegen geſetzten Richtungen liegen, und ſobald eine mathematiſche Aufgabe in eine Gleichung gebracht iſt, ſobald läßt ſie ſich als eine geometriſche Aufgabe anſehen, wobey es darauf ankommt, aus gegebenen Linien eine oder mehrere unbekannte Linien zu finden. Hiebey iſt nun folgender Umſtand allemal vorzüglich in Betrachtung zu ziehen. Man will entweder blos wiſſen, **wie groß** eine geſuchte Linie ſey, oder man will zugleich **ihre Lage** kennen. Eben dieſer Umſtand kommt bey jeder andern mathematiſchen Aufgabe in Betrachtung. Man will entweder blos wiſſen, wie groß die geſuchte Größe ſey: oder man will zugleich ihre beſondre Beziehung gegen andere Größen kennen, ob ſie ihnen nämlich entgegen geſetzt, oder nicht entgegen geſetzt ſey. Und in dem letzten Fall muß auch dieſer Umſtand bey den gegebenen Größen, und ihren Verhältniſſen gegen einander, in Betrachtung kommen. Wenn der Aſtronom die Declination eines Sterns ſucht, ſo genügt es ihm nicht, überhaupt zu wiſſen, wie groß ſein Abſtand vom Aequator ſey; er will zugleich wiſſen, ob er ihn auf der nördlichen oder der ſüdlichen Halbkugel ſuchen müſſe; ob die Declination des Sterns nördlich oder ſüdlich ſey.

§. 8.

Wenn man dieſe Betrachtungen auf die Lehre von den Verhältniſſen und Proportionen anwendet, ſo iſt leicht zu erachten, daß alles, was davon in den Anfangsgründen der Mathematik gelehret wird, näher eingeſchränkt werden müſſe, ſobald der Unterſcheid poſitiver und negativer Größen in Betrachtung kommt. Vergleicht man in den Anfangsgründen zwo Größen A und B miteinander, ſo will man blos wiſſen, wie groß die eine gegen die andere ſey: in der Algebra aber will man zugleich wiſſen, ob A und B einander entgegen geſetzt ſind oder nicht. Hieraus ergiebt ſich eine Einſchränkung des Begriffs von der Gleichheit zwoer

Verhältniſſe, oder der Proportion, worauf man um ſo mehr bey dieſer Streitigkeit Betracht nehmen muß, da die ganze Lehre von den Logarithmen von der Lehre von den Verhältniſſen abhängt. Wenn A gegen B eben ſo groß iſt, als C gegen D, ſo iſt das Verhältniß AB dem Verhältniß CD gleich, und es ſind A, B, C, D, vier Proportionalgrößen. Dieß lehren die Anfangsgründe, und in den Anfangsgründen wird nie ein anderer Begriff von der Proportion gebraucht. Die Algebra aber, welche allemal auf die ſpecielle Beziehung des Gegenſatzes oder Nichtgegenſatzes zwoer Größen gegen einander mit ſiehet, erfordert zur Gleichheit zwoer Verhältniſſe noch mehr. Sind A und B einander entgegen geſetzt, ſo müſſen auch C und D einander entgegen geſetzt ſeyn, ſind A und B einander nicht entgegen geſetzt, ſo muß auch eben dieß von C und D gelten. So iſt

$$+A : +B = +C : +D.$$
$$+A : +B = -C : -D.$$
$$+A : -B = +C : -D.$$
$$+A : -B = -C : +D.$$

keinesweges aber $+A : +B = +C : -D$, wenn gleich für ſich betrachtet A gegen B ſo groß iſt, als C gegen D. Wollte man bey Vergleichung zwoer Größen gegen einander die Größe der einen gegen die andere ihre relationem quantitativam, und ihre Beziehung gegen einander, vermöge welcher ſie entweder entgegen geſetzt ſind oder nicht, ihre relationem qualitativam nennen; ſo könnte man obige Regel ſo ausdrücken: Wenn zwo Größen ſich eben ſo, wie zwo andere verhalten ſollen, ſo muß zwiſchen den beyden erſten, und den beyden letzten nicht nur einerley relatio quantitativa, ſondern auch einerley relatio qualitativa Statt haben. Dieſe Regel iſt ſo wichtig, daß man die ganze Algebra über einen Haufen wirft, wenn man ſie läugnet.

§. 9.

Durch die algebraiſche Auflöſung einer Aufgabe findet man nie die geſuchte Größe ſelbſt, ſondern nur ein Zeichen der geſuchten Größe. Ja noch mehr: man findet eigentlich nur ein Zeichen, welches das Verhältniß der geſuchten Größe gegen die als bekannt angenommene Einheit ausdrückt. Deswegen muß die algebraiſche Formel nicht nur die relationem quantitativam, ſondern zugleich die relationem qualitativam gegen die angenommene Einheit ausdrücken. Dieß iſt die Urſache, warum die Regeln der Buchſtabenrechnung zugleich zeigen müſſen, wie die Zeichen + und — der gegebenen Größen die Zeichen der geſuchten beſtimmen. Wenn die Einheit poſitiv genommen wird, ſo giebt die Multiplication zweyer Factoren mit einerley Zeichen, ein poſitives Product, und entgegen geſetzte Factoren geben ein negatives Product. Würde die Einheit negativ genommen, ſo würde juſt das Gegentheil dieſer Regel gelten. **Aber man nimmt bey algebraiſchen Rechnungen die Einheit allemal poſitiv an.** Wiederum ein Hauptumſtand, darauf die Sicherheit aller algebraiſchen Operationen beruhet. Die bekannten Regeln der Multiplication

$$+a \times +b = +ab$$
$$-a \times -b = +ab$$
$$+a \times -b = -ab$$
$$-a \times +b = -ab$$

folgen aus den Proportionen

$$+1 : +a = +b : +ab$$
$$+1 : -a = -b : +ab$$
$$+1 : +a = -b : -ab$$
$$+1 : -a = +b : -ab$$

In keiner dieſer Proportionen darf man das Zeichen des letzten Gliedes ändern, wofern die Proportion nicht falſch werden ſoll.

Aendert man aber das Zeichen der Einheit, und ſchreibt -1 ſtatt $+1$; ſo muß man in allen vier Proportionen auch das Zeichen des letzten Gliedes ändern.

§. 10.

Es wird nicht undienlich ſeyn, von dieſer allgemeinen Theorie eine Anwendung auf die Geometrie zu machen, indem hiedurch alles ſo augenſcheinlich deutlich wird, daß nicht die geringſte Dunkelheit übrig bleibt. Zu dem Ende ſollen a und b ein paar Linien bedeuten; ſo iſt bekanntermaßen das Product dieſer beyden Linien nichts anders, als die vierte Proportionallinie zu einer Linie, die man für die Einheit annimmt, und den beyden gegebenen a und b: geometriſch findet man, wie aus den Anfangsgründen bekannt iſt, dieſe vierte Proportionallinie auf folgende Art. Auf dem einen Schenkel CA (2 Fig.) eines willkührlich gezeichneten geradlinichten Winkels ACB ſchneide man die beyden erſten Glieder der Proportion ab, nämlich $CD = 1$, $CE = a$, auf dem zweyten Schenkel CB trage man das dritte Glied $CF = b$ auf, ziehe DF, und hierauf EG mit DF Parallel, ſo iſt

$$CD : CE = CF : CG,$$

oder $$1 : a = b : CG,$$

alſo $CG = ab$. Nun iſt Cb in Abſicht auf CB negativ, ſo wie Ca gegen CA negativ iſt. Schneidet man alſo CE auf Ca ab, ſo iſt nunmehro $CE = -a$, und wenn man CF auf Cb abſchneidet, ſo wird $CF = -b$ ſeyn. Es ergiebt ſich in allen dieſen Fällen einerley CG der Größe nach, aber nicht der Lage nach. In dem vorigen Fall hatte man $CD = +1$, $CE = +a$, und $CF = +b$ genommen, daher fiel CG auf CB, ſo daß $CG = +ab$ ward. Nimmt man nun $CD = +1$, $CE = -a$, $CF = -b$ (3 Fig.) und verfährt übrigens, wie vorhin, ſo fällt CG noch auf CB, und es bleibt dennoch $CG = +ab$, wie die allgemeine Proportion $+1 :$

$a = b : + ab$ verlangt. Nimmt man drittens $CD = +1$, $CE = +a$, $CF = -b$ (4 Fig.) und verfährt übrigens noch wie vorhin, ſo bleibt nicht nur $CD : CE = CF : CG$, und alſo $CG = ab$, ſondern es fällt nun auch CG auf Cb, ſo das nunmehro $CG = -ab$ wird. Eben dieß erfolgt, wenn man $CD = +1$, $CE = -a$, und $CF = +b$ (5 Fig.) abſchneidet, und ſodann das obige Verfahren anbringt, es bleibt zwar überhaupt $CD : CE = CF : CG$, aber CG fällt auf Cb, und wird negativ, wie im vorigen Fall. Wenn man die Einheit CD nicht poſitiv, ſondern negativ nimmt, das iſt, wenn man ſie nicht auf CA, ſondern auf Ca abſchneidet; ſo wird in den erſten beyden Fällen CG auf Cb und in den beyden letztern Fällen auf CB fallen. Vieleicht hat es das Anſehen, als ob ich bey gegenwärtiger Unterſuchung zu weit in die erſten Anfangsgründe zurück gehe; und in der That würde ich mir ſelbſt dieſen Vorwurf machen, wenn die Lehren, worauf es bey der Streitigkeit über die Logarithmen negativer Größen ankommt, in allen Lehrbüchern mit der nöthigen Deutlichkeit auseinander geſetzt würden. Allein ich habe dieſes nur ſelten, außer bey den obangeführten Schriftſtellern, angetroffen, und die Folge wird zeigen, daß die Streitfrage ſich ſchwerlich in ihr gehöriges Licht ſetzen laſſe, wenn man über die von mir eben jetzt auseinander geſetzten analytiſchen Grundbegriffe ſich nicht völlig beſtimmt erkläret.

§. 11.

Man pflegte wohl ab das Rectangel der Linien a und b zu nennen, und dieſe Redensart iſt in ſoferne richtig, in wie ferne das Rectangel, deſſen Seiten die Linien a und b ſind, ſich gegen ein Quadrat, deſſen Seite $= 1$ iſt, verhält, wie das Product ab in Zahlen ausgedruckt zur Einheit. Uebrigens aber bedeutet ab eigentlich allemal eine Linie, nie eine Fläche. So drückt alſo auch a zwar das Verhältniß eines Quadrats, deſſen Seite $= a$ iſt, gegen ein Quadrat aus, deſſen Seite $= 1$; eigentlich aber iſt a nichts anders, als die dritte Proportionallinie zu 1 und a, oder auch zu 1 und $-a$. Ueberhaupt zu ſagen giebt es zwiſchen zweyen nicht entgegen geſetzten Größen zwey der Lage nach unterſchiedene mittlere Proportionallinien: Dagegen giebt es zwiſchen zweyen entgegen geſetzten Größen gar keine mittlere Proportionallinie. Zwiſchen $+1$ und $+A$ iſt ſowohl $+\sqrt{A}$, als auch $-\sqrt{A}$ eine mittlere Proportionallinie; aber zwiſchen $+1$ und $-A$ fällt gar keine. Sie müßte entweder poſitiv oder negativ, oder $= 0$ ſeyn, aber von dieſen dreyen Fällen kann keiner beſtehen, wofern nicht A ſelbſt $= 0$ iſt. Die Operationen, wodurch eine ſolche mittlere Proportionallinie gefunden werden müßte, widerſprechen einander. Solche Größen aber, die man durch widereinander ſtreitende Operationen finden müßte, heißen in der Analyſi **unmögliche** Größen. Von der Art wäre $\sqrt{-A}$. Alles dieſes macht die geometriſche Conſtruction evident. Es ſey $AD = +1$, und $DB = +A$ (6 Fig.) man theile AB bey C in zwey gleiche Theile, und und beſchreibe mit dem Halbmeſſer AC einen Zirkel, ziehe darauf durch D eine Perpendicullinie auf AB, und verlängere ſie, bis ſie den Zirkel trift. Das Stück zwiſchen D und dem Durchſchnittspunct mit dem Zirkel iſt zwiſchen $+1$ und $+A$ die mittlere Proportionallinie. Solcher Perpendicul giebt es aber zwey, nämlich DE und DF, alſo verſtattet die Aufgabe eine doppelte Auflöſung. Nimmt man aber $AD = +1$, $DB = -A$ (7 Fig.) und verfähret wie vorhin, ſo kann die Perpendicullinie DE oder DF den Zirkel **nicht treffen**, demnach iſt es unmöglich zwiſchen $+1$ und $-A$ eine mittlere Proportionallinie zu finden: Das heißt, $\sqrt{-A}$ iſt eine unmögliche Größe. Man weis, daß es mit allen Wurzeln gerader Exponenten aus negativen Größen eben die Bewandtniß habe, und eben dieſe Ausziehung der Wurzeln aus negagativen Größen hat die Algebraiſten zuerſt auf die Begriffe unmöglicher Größen geleitet. Man muß aber nicht glauben, daß allein die Ausziehung der Wurzeln zuweilen eine unmögliche Operation ſey. Wenn überhaupt eine algebraiſche Formel ſo beſchaffen iſt, daß die Operationen, welche vermöge dieſer Formel vorgenommen werden müſſen, einander widerſprechen, ſo drückt ſie allemal eine **unmögliche Größe** aus.

§. 12.

Dieſe bisherige Erörterung der Begriffe von der Eintheilung der Größen in poſitive und negative, muß ich mit einigen Anmerkungen beſchließen, die um ſo viel wichtiger ſind, je öfter man bey der Streitigkeit von den Logarithmen negativer Größen dagegen verſtoſſen hat. Das weitſichtigſte Auge, welches das größte Feld der entlegenſten Sachen ſehr deutlich überſieht, entwöhnet ſich, nahe liegende Kleinigkeiten deutlich genug wahrzunehmen. Faſt kömmt es mir ſo vor, daß es bey dieſer Streitigkeit auf einige kleine Umſtände ankomme, die dem Auge der Geometer ſo nahe liegen, daß die ſcharfſichtigſten unter ihnen, die das ganze Feld der Mathematik bis auf die entfernſten Gränzen überſehen, ſie nur deswegen nicht bemerkt haben. Wenn es ſeine Richtigkeit hat, daß alles, was von Vergleichung der Größen untereinander in den Anfangsgründen gelehrt wird, näher eingeſchränkt werden müſſe, wenn der Unterſcheid poſitiver und negativer Größen in Betrachtung kommt; ſo kann ſelbſt der Begriff der Gleichheit nicht ohne Einſchränkung in der Algebra gebraucht werden. Ueberhaupt ſind ein paar Linien gleich groß, wenn man ſie in Anſehung ihrer Größe für einander ſetzen kann. Dieſer Umſtand kann auch bey entgegen geſetzter Lage der Linien Statt haben, und dennoch kann man in der Algebra zwey entgegen geſetzte Größen nie **gleiche** Größen nennen, wenn ſie gleich als Größen betrachtet, ohne auf die Beziehung des Gegenſatzes zu ſehen, einander gleich ſind. Es iſt keinesweges $+a=-a$ wenn gleich a einerley Linie der Größe nach bedeutet. In der Algebra ſind nur diejenigen Linien gleich, die ſowohl in Anſehung der Größe, als auch in Anſehung der **Lage** für einander geſetzt werden können. Ohne Zweifel iſt $+a=+a$, wäre nun auch $+a=-a$, ſo müßte die Proportion richtig ſeyn $+a:+a=+a:-a$, welches dem 8 §. entgegen iſt. Jedes Quadrat hat zwo Wurzeln, die zwar als Größen betrachtet, gleich groß, aber einander entgegen geſetzt ſind: kann man denn wohl ſo ſchließen: es iſt $(-a)^2=(+a)^2$, folglich $-a=+a$? Freylich hat die Regel ihre Richtigkeit: wenn zwey Quadrate gleich ſind, ſo ſind ihre Wurzeln gleich. Aber wenn man dieſe Regel beweißt, ſo denkt man überall nicht an den Unterſcheid poſitiver und negativer Größen. Sie muß alſo in der Algebra ſo angewandt werden, wie es die Natur der Sache leidet. Die Regel redet blos von der Gleichheit der Quadrate und Wurzeln, in ſoferne ſie **Größen ſind**, nicht aber in ſoferne ſie die ſpecielle Beziehung des Gegenſatzes oder Nichtgegenſatzes gegen einander haben können. Soll demnach dieſe Regel in der Algebra gebraucht werden, ſo kann ſie keinen andern Sinn, als dieſen haben: Wenn zwey Quadrate gleich ſind, ſo iſt die poſitive Wurzel des einen ſo groß, als die poſitive Wurzel des andern, und die negative Wurzel des erſten gleich der negativen Wurzel des zweyten. Es hat $(-a)^2$ ſo gut die Wurzel $+a$ als $-a$, und $(+a)^2$ ſo gut die Wurzel $-a$ als $+a$, und aus der Gleichung $(-a)^2=(+a)^2$ folgt nichts weiter als dieſes, es ſey $\pm a=\pm a$. Kann man alſo wohl mit denen Herren Bernoulli und d'Allenbert ſchließen: Weil $(-a)^2=(+a)^2$ ſo ſey $2\log.(-a)=2\log.(+a)$, und folglich $\log(-a)=\log(+a)$. Ich denke, man ſetzt hiebey ſtillſchweigend voraus, es habe $(-a)^2$ keine andere Wurzel, als $-a$, und $(+a)^2$ keine andere Wurzel als $+a$, denn ſonſt würde die Schlußfolge ſo ausſehen müſſen: weil $(-a)^2 = (+a)^2$, (das heißt nichts anders, als weil $+a^2 = +a^2$) ſo iſt $2\,log\,(\pm a) = 2\,log\,(\pm a)$: aber das ſind zwey beſondere Sätze $2\,log\,(+a) = log\,(+a)$, und $2\,l\,(-a) = 2\,l\,(-a)$; dieß giebt denn weiter keine andere, als dieſe Folgen: $l+a = l+a$ und $l-a = l-a$. Doch ich werde im Folgenden die hier verborgen liegenden Fehlſchlüſſe noch ausführlicher erörtern. Jetzt wende ich mich zur nähern Aufklärung der Begriffe von den Logarithmen.

Begriffe der Logarithmen.

§. 13.

Es giebt eigentlich keine Logarithmen der Größen oder Zahlen für ſich betrachtet, es giebt nur **Logarithmen der Verhältniſſe.** Dieß liegt ſchon in der grammaticaliſchen Bedeutung des Worts ἀριϑμος λόγων. Man kann ſich jedes Verhältniß als ein ſolches vorſtellen, das aus mehrern andern zuſammen geſetzt iſt, und man weis auch, daß alle dieſe Verhältniſſe, woraus man ein anders zuſammen ſetzt, gleich groß ſeyn können. In dem letzten Fall, wird ſich eine Zahl angeben laſſen, welche ausdrückt, wie oft das einfach angenommene Verhältniß in dem zuſammengeſetzten enthalten ſey. So iſt das Verhältniß 2 : 1 in dem Verhältniß 16 : 1 viermal enthalten. Die Zahl **vier** drückt hier die Anzahl dergleichen Verhältniſſe aus, welche das zuſammengeſetzte ausmachen. Man kann hier alſo das Verhältniß 2 : 1 als das **Maaß** des Verhältniſſes 16 : 1 anſehen, indem die Zahl **vier** eben ſo aus der Einheit entſtehet, wie das Verhältniß 16 : 1 aus dem einfachen 2 : 1. So wie aber jedes Maaß überhaupt willkührlich iſt, ſo iſt es auch ganz willkührlich, welches Verhältniß man als einfach anſehen, und als ein Maaß der übrigen betrachten will. Die⸗

ſem⸗

ſemnach iſt die Vergleichung der Verhältniſſe unter einander der Art, wie man gerade Linien, und überhaupt alle Größen von einerley Art mit einander vergleicht, völlig ähnlich. Das Verhältniß, welches man als das einfache angenommen hat, wird nicht in jedem andern gegebenen Verhältniß, ſo man mit dem einfachen vergleicht, genau etlichemal enthalten ſeyn, und in dieſem Fall hilft man ſich eben ſo, wie bey der Ausmeſſung gerader Linien, wenn die angenommene Einheit in der auszumeſſenden Linie nicht etlichemal ganz genommen enthalten iſt. Man ſtellt ſich nämlich das einfache Verhältniß wiederum als aus andern kleinern zuſammen geſetzt vor, die man als Theile des ganzen betrachtet; und wenn ſodann ein ſolcher Theil des einfachen Verhältniſſes in dem andern etlichemal genau enthalten iſt; ſo läßt ſich eine gebrochene Zahl angeben, welche aus der Einheit eben ſo entſtehet, wie jenes Verhältniß aus dem angenommenen einfachen ſich zuſammen ſetzen läßt. So iſt z. E. das Verhältniß 32 : 1 aus dem Verhältniß 16 : 1 ſo zuſammen geſetzt, wie die Zahl $\frac{5}{4}$ aus der Einheit. Iſt kein Theil des einfachen Verhältniſſes in demjenigen, ſo damit verglichen wird, genau etlichemal enthalten, und wenn man auch das einfache in noch ſo kleine Theile eintheilet; ſo wird die Größe dieſes Verhältniſſes gegen das einfache ſich nicht anders, als durch eine Irrationalzahl ausdrücken laſſen. In allen dieſen Fällen aber heißt diejenige Zahl, welche die Größe eines Verhältniſſes A : B gegen das angenommene einfache ausdrückt, oder welche aus ihrer Einheit ſo entſtehet, wie das Verhältniß A : B aus dem einfachen zuſammen geſetzt iſt, der **Logarithmus des Verhältniſſes** A : B. In dem beſondern Fall, wenn B = 1 iſt, heißt der Logarithmus des Verhältniſſes A : 1 der Kürze wegen der Logarithmus der Größe, oder der Zahl A.

§. 14.

Man kann ein für allemal ein gewiſſes Verhältniß $a: 1$, als das einfache annehmen, und die Verhältniſſe aller übrigen Zahlen zur Einheit damit vergleichen. Auf ſolche Art wird eine Reihe von Logarithmen beſtimmet, die einer Reihe von beſtimmten Zahlen oder Größen zugehöret. Eine ſolche Reihe von Logarithmen, mit ihren zugehörigen Zahlen, macht ein logarithmiſches Syſtem aus. Man kann alſo ſagen, ein jedes Logarithmenſyſtem ſey **willkührlich**, weil es willkührlich iſt, wie groß man das einfache Verhältniß $a: 1$ annehmen will. Allein dem ohnerachtet bleibt doch zwiſchen den Logarithmen und ihren zugehörigen Zahlen eine nothwendige Verbindung, in ſoferne es nothwendig iſt, daß eine beſtimmte Zahl dieſen und keinen andern Logarithmum haben müſſe, ſobald feſtgeſetzt iſt, wie groß das einfache Verhältniß $a: 1$ ſeyn ſoll. Man kann auch ſagen, jedes Syſtem der bekannten trigonometriſchen Linien ſey willkührlich, weil es willkührlich iſt, wie groß man den Halbmeſſer des Zirkels annehmen will, ſowohl bey der geometriſchen Verzeichnung, als auch bey der Berechnung. Allein ſobald der Halbmeſſer beſtimmt iſt, ſobald iſt es auch nothwendig, daß ein jeder beſtimmter Winkel dieſen beſtimmten Sinus, Coſinus, u. ſ. f. und keinen andern haben müſſe. Es iſt keinem Mathematiker unbekannt, daß beyde Syſteme der Logarithmen und trigonometriſchen Linien die größte Aehnlichkeit mit einander haben. Wenn die Halbmeſſer gleich verſchieden ſind, ſo ſind doch die trigonometriſchen Linien, die zu einerley Winkel gehören, in einem **beſtändigen** Verhältniß. Und eben ſo iſt es mit verſchiedenen Logarithmenſyſtemen beſchaffen. Wenn gleich die Verhältniſſe verſchieden ſind, die man als die einfachen annimmt, ſo ſtehen dennoch die Logarithmen, die zu einerley Verhältniß gehören, in einem **beſtändigen** Verhältniß.

Man nehme zwey Syſteme willkührlich an, das heißt, man ſetze willkührlich feſt, wie groß in jedem das einfache Verhältniß ſeyn ſoll, ſo wird dieſes ſogleich in die Augen fallen. In dem einen ſey $a : 1$, in dem andern $a^n : 1$ das einfache Verhältniß, ſo werden die Syſteme dieſe ſeyn:

1. Syſtem.

Die Zahlen

$$1.\ a.\ a^2 \dots\dots a^n \dots\dots a^{2n} \dots\dots a^{3n} \dots\dots a^{4n} \dots\dots a^{5n} \dots\dots a^{6n} \dots\dots a^{rn}$$

Die Logarithmen

$$0 \quad 1 \quad 2 \dots\dots n \dots\dots 2n \dots\dots 3n \dots\dots 4n \dots\dots 5n \dots\dots 6n \dots\dots rn$$

2. Syſtem.

Die Zahlen

$$1.\ a.\ a^2 \dots\dots a^n \dots\dots a^{2n} \dots\dots a^{3n} \dots\dots a^{4n} \dots\dots a^{5n} \dots\dots a^{6n} \dots\dots a^{rn}$$

Die Logarithmen

$$0 \quad \tfrac{1}{n} \quad \tfrac{2}{n} \dots\dots 1 \dots\dots 2 \dots\dots 3 \dots\dots 4 \dots\dots 5 \dots\dots 6 \dots\dots r$$

Dieſemnach iſt im 1 Syſtem $l\,(a : 1) = 1$ im zweyten aber $l\,(a : 1) = \frac{1}{n}$; im 1 Syſtem iſt $l\,(a : 1)^2 = 2$, und im zweyten Syſtem iſt $l\,(a : 1)^2 = \frac{2}{n}$ überhaupt iſt im erſten Syſtem $l\,(a : 1)^{rn} = rn$, und im zweyten wird $l\,(a : 1)^{rn} = r$. Daß alſo dieß beſtändige Verhältniß zweyer Logarithmen beyder Syſteme, die einem und eben demſelben Verhältniſſe zugehören, $rn : r = n : 1$ iſt.

§. 15.

Ich bin um des Folgenden willen genöthiget, etwas weiter in dieſe Theorie hinein zu gehen, weil ich glaube, daß der eigentliche Sinn der Streitfrage ſich ſchwerlich genau feſtſetzen laſſe, wofern man nicht alle Umſtände in Betrachtung ziehet, die bey wirklicher Berechnung der Logarithmen voraus geſetzt werden. Das ganze Logarithmenſyſtem wird beſtimmt, wenn man feſt ſetzet, welches Verhältniß das einfache ſeyn ſoll, oder wie groß die Zahl ſeyn ſoll, deren Logarithmus $= 1$ iſt, die ſodann bekanntermaßen die Baſis des Syſtems genannt wird. Eben dieß geſchieht aber auch, wenn man von irgend einer andern Zahl den Logarithmum willkührlich annimmt. Denn da der angenommene Logarithmus ausdrückt, nach welchem Geſetz das Verhältniß dieſer Zahl zur Einheit aus dem einfachen entſtanden ſeyn ſoll, ſo wird hiedurch zugleich das einfache Verhältniß, und folglich die Baſis des Syſtems beſtimmt. Es iſt einerley, ob ich annehme der $log.\ a^n$ ſoll $= 1$, oder ob ich feſt ſetze, der $log.\ a^{rn}$ ſoll $= r$ ſeyn. Nun ſey der Logarithmus des Verhältniſſes $1 + A : 1$, oder welches einerley iſt, der Logarithmus der Zahl $1 + A = \lambda$ genommen; ſo bringt man durch folgende Schlüſſe heraus, wie aus dieſen gegebenen Stücken der Logarithmus jeder andern Zahl gefunden werde. Man theile das Verhältniß $1 + A : 1$ in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, und dieſe Zahl ſey m. Man ſetze $(1 + A)^{\frac{1}{m}} = 1 + w$, ſo wird w deſto kleiner ſeyn, je größer m genommen wird, und für $m = \infty$ wird $w = o$. Man theile jedes andere Verhältniß $1 + B : 1$ in eben ſo viele gleiche Theile. Iſt nun $1 + B = (1 + A)^r$, ſo wird $(1 + B)^{\frac{1}{m}} = (1 + A)^{\frac{r}{m}} = (1 + w)^r$. Demnach hat man $\frac{1}{m} l\,(1 + A) = l\,(1 + a)$ und $\frac{1}{m} l\,(1 + B) = r\,l\,(1 + w)$, welches die Proportion giebt.

$$\frac{1}{m} l\,(1 + A) : \frac{1}{m} l\,(1 + B) = l\,(1 + w) = 1 : r = w : r w.$$

Wird m ſehr groß genommen, ſo iſt beynahe $(1 + w)^r = 1 + rw$, ſo daß $1 + r w$ die letzte von den m mittlern Proportionalzahlen zwiſchen $1 + B$ und der Einheit, $1 + w$, aber die letzte von den m mittlern Proportionalzahlen zwiſchen $1 + A$ und 1 iſt. Es enthält demnach obige Proportion den bekannten Satz: Wenn man zwey Verhältniſſe $1 + A : 1$ und $1 + B : 1$ in eine ſehr große Anzahl gleicher Theile eintheilet, und zwar ſo, daß dieſe Anzahl der Theile für beyde Verhältniſſe einerley iſt; ſo verhalten ſich die

Logarithmen dieſer Verhältniſſe, wie die Differenzen der letzten beyden mittlern Proportionalglieder von der Einheit. Man kann obige Proportion auch ſo ausdrücken.

$l(1+A) : l(1+B) = mw : mrw$; und weil $(1+A)^{\frac{1}{m}} = 1+w$, ſo wie $(1+B)^{\frac{1}{m}} = 1+rw$; ſo wird $w = (1+A)^{\frac{1}{m}} - 1$, und $rw = (1+B)^{\frac{1}{m}} - 1$. Dieſemnach erhält man

$$l(1+A) : l(1+B) = mr(1+A)^{\frac{1}{m}} - 1) : m(1+B)^{\frac{1}{m}} - 1).$$

Da nun beſtändig voraus geſetzt wird, daß m eine ſehr große Zahl ſey, ſo iſt

$$(1+A)\overset{\frac{1}{m}}{-}1 = \tfrac{1}{m}(A - \tfrac{1}{2}A\overset{2}{+}\tfrac{1}{3}A\overset{3}{-}\tfrac{1}{4}A\overset{4}{+}\&c.)$$

$$(1+B)\overset{\frac{1}{m}}{-}1 = \tfrac{1}{m}(B - \tfrac{1}{2}B\overset{2}{+}\tfrac{1}{3}B\overset{3}{-}\tfrac{1}{4}B\overset{4}{+}\&c.)$$

und folglich wird

$(1+A) : l(1+B) = A - \frac{1}{2}A\overset{2}{+}\frac{1}{3}A\overset{3}{-}\frac{1}{4}A\overset{4}{-}\&c. : B - \frac{1}{2}B\overset{2}{+}\frac{1}{3}B\overset{3}{-}\&c.$ Aber $l(1+A) = \lambda$ und A ſelbſt ſind gegeben, folglich wird $A - \frac{1}{2}A^2 r \frac{1}{3}A\overset{3}{-}\&c. : B - \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}B\overset{3}{-}\&c. = \lambda : l(1+B)$, und $l(1+B) = \frac{\lambda}{A - \frac{1}{2}A\overset{2}{+}\frac{1}{3}A\overset{3}{-}\&c.}(B - \frac{1}{2}B\overset{2}{+}\frac{1}{3}B\overset{3}{-}\frac{1}{4}A\overset{4}{-}—)$. Iſt die gegebene Zahl $1+A = b$, und b die Baſis des Syſtems, ſo wird $\lambda = 1$, folglich $l(1+B)$

$$= \frac{1}{(b-1) - \frac{1}{2}(b-1)\overset{2}{+}\frac{1}{3}(b-1)^{3}\&c.}(B - \tfrac{1}{2}B\overset{2}{+}\tfrac{1}{3}B\overset{3}{-}\tfrac{1}{4}B\overset{4}{+}\&c.)$$

Dieß iſt der bekaunte allgemeine Ausdruck eines jeden Logarithmen im Syſtem, deſſen gegebene Baſis $= b$ iſt, und man weiß, daß der beſtändige Factor $\frac{1}{(b-1) - \frac{1}{2}(b-1)\overset{2}{+}\frac{1}{3}(b-1)\overset{3}{-}\&c.}$ der Modulus des Syſtems heiße.

§. 16.

Die Logarithmen ſind **Verhältnißmaaße** in eben dem Verſtande, in welchem die Zirkelbogen **Winkelmaaße** ſind. So wie in einerley Zirkel die Winkel verſchiedener Sectoren ſich wie ihre Lagen verhalten, ſo verhalten ſich auch, in einerley Logarithmenſyſtem, verſchiedene Verhältniſſe wie ihre Logarithmen. Hr. d'Alenbert iſt zwar mit dieſer Redensart nicht zu frieden: mir aber kommen die Gründe, weswegen er ſie will verworfen wiſſen, ſehr ſchwach vor. Er ſagt auf der 200 Seite: C'e ſeroit une grande erreur de penſer, que les Logarithmes expriment les rapports; ce ſeroit, comme ſi on diſoit, que $\frac{\sqrt{2}}{1}$ ou $\sqrt{2} = \frac{1}{2}$ log. 2, ou en general, que $\frac{a}{b} = la - lb$. Aber wer hat das letztere jemals behauptet, und wie kann Herr d'Alenbert den Satz des Hrn. Eulers: die Logarithmen verhalten ſich, wie ihre zugehörigen Verhältniſſe, ſo erklären? Wenn man behauptet, daß die Bogen Maaße ihrer zugehörigen Winkel ſind, behauptet man damit, daß jeder Bogen ſeinem zugehörigen Winkel gleich ſey? Dieß iſt noch niemanden in den Sinn gekommen, da Winkel und Bogen heterogene Größen ſind. Es heißt dieſe Redensart vielmehr ſo viel: Wenn ein Winkel = 1 geſetzt wird, und ſein zugehöriger Bogen auch, ſo iſt die Zahl, welche jeden andern Winkel aus ſeiner Einheit ausdrückt, eben ſo groß als die Zahl, die den zugehörigen Bogen aus ſeiner Einheit ausdrückt. Eben dieſen und keinen andern Sinn hat die Redensart: Die Logarithmen ſind Maaße ihrer zugehörigen Verhältniſſe. Nimmt man ein Verhältniß als einfach an, um die Größe aller übrigen gegen dieß Verhältniß zu beſtimmen, und ſetzt man den Logarithmum des einfachen Verhältniſſes = 1, ſo verhält ſich jedes Verhältniß zu dem einfachen, wie der zugehörige Logarithmus gegen die Einheit; oder das Verhältniß iſt gegen das einfache ſo groß, als der zugehörige Logarithmus gegen die Einheit. Die einzige Urſache, warum Herr d'Alenbert dieſe Redensart mißbilliget, iſt wohl dieſe, weil er die Vergleichung der Verhältniſſe, und die Vergleichung ihrer Exponenten, als einerley Sache betrachtet, da doch die Vergleichung der Verhältniſſe gegen einander ganz etwas anders iſt, als die Vergleichung der Exponenten. Ich muß dieſes aus folgenden Worten ſchließen, die ich auf eben der 200 Seite der Opuſcules mathematiques leſe: En effet le cas de l'egalité des rapports eſt le ſeul, ou les logarithmes ſoient entr'eux comme les rapports. Ainſi on peut dire, que le logarithme de $\frac{1}{2}$ eſt a celui de $\frac{2}{4}$ comme $\frac{1}{2}$ èſt a $\frac{2}{4}$, mais on ne dira jamais, qu'en tout autre cas $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=la-lb:lc-ld$. Verſteht man durch $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ die Quotienten, welche heraus kommen, wenn *a* durch *b*, und *c* durch *d* dividirt wird, ſo kann man freylich nicht ſagen, es ſey $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=la-lb:lc-ld$. Dieß hat aber weder Herr Euler, noch ſonſt irgend ein anderer je behauptet. Wer könnte wohl auf die Gedanken kommen, daß z. E. im briggiſchen Syſtem $\frac{10}{1}:\frac{100}{1}=1:2$ ſey, wenn $\frac{10}{1}$ die Zahl 10 und $\frac{100}{1}$ die Zahl 100 bedeuten ſoll. Die ganze Sache wird hoffentlich durch folgende Betrachtung in ihr völliges Licht geſetzet, und die von Hrn. Euler eingeführte Redensart von allem Zweifel befreyet werden können.

§. 17.

Der Exponent eines Verhältniſſes, oder der Quotient, welcher heraus kommt, wenn man ein Glied durch das andere dividirt, drückt keinesweges die Größe des Verhältniſſes, ſondern vielmehr die Größe des einen Gliedes, gegen das andere aus. So giebt 15 durch 3 dividirt den Quotienten 5, und dieſe Zahl 5 iſt der Exponent des Verhältniſſes 15 : 3, oder wie man es auch ſchreibt $\frac{15}{3}$. Demnach iſt zwar der Bruch $\frac{15}{3}=5$, und 15 iſt gegen 3 ſo groß, als 5 gegen 1. Aber keinesweges heißt dieß eben ſo viel, als wenn man ſagt, das Verhältniß 15 : 3 ſey = 5. Bekanntermaßen kann man nie ſagen, wie groß eine Sache ſey, wenn man ſie nicht mit einer andern, die mit ihr von einerley Art iſt, vergleicht, und deren Größe als bekannt voraus geſetzt wird. Man kann nur ausdrücken, wie groß eine Sache gegen eine andere ſey, deren Größe man ſchon kennet, nicht aber, wie groß ſie für ſich betrachtet ſey. Die Frage: wie lang iſt eine Ehle? läßt ſich nicht beantworten, wofern ich nicht etwa ſage, eine Ehle ſey 2 Fuß, oder 24 Zoll lang; dann aber gebe ich nicht an, wie groß eine Ehle für ſich betrachtet, ſondern wie lang ſie gegen die Länge eines Fußes oder eines Zolles ſey. Wer nicht weis, wie lang ein Fuß, wie lang ein Zoll ſey, hört nichts verſtändliches, wenn ich ihm ſage, eine Ehle ſey 2 Fuß oder 24 Zoll lang; er iſt genöthiget weiter zu fragen: wie lang iſt ein Fuß? wie lang iſt ein Zoll? und ich mag ihm antworten, was ich will, ſo wird er fortfahren müſſen zu fragen, bis ich zuletzt auf eine Länge komme, die er kennet, oder bis ich ihm ſinnlich zeige, wie lang die Länge ſey, damit ich die Vergleichung zuletzt angeſtellet habe. Fragt man demnach, wie groß iſt das Verhältniß $a:b$, ſo kann man gar nicht antworten, wofern man nicht dieß Verhältniß mit einem andern bekannten vergleicht und ausdrückt, wie groß das Verhältniß $a:b$ gegen dieſes letztere ſey. Die Frage: wie groß iſt a gegen b, iſt aber von der vorigen Frage ſehr unterſchieden. Die Antwort auf dieſe letzte Frage, giebt die Diviſion von a durch b. So groß, als der Quotient oder der Bruch $\frac{a}{b}$ gegen 1 iſt, ſo groß iſt a gegen b. Dieß iſt es aber gar nicht, was man wiſſen will, wenn man fragt, wie groß das Verhältniß $a:b$ ſey. Dieſe Frage beantwortet der Logarithmus des Verhältniſſes, und es iſt das Verhältniß $a:b$ gegen das einfache ſo groß, als $la - lb$ gegen die Einheit. So iſt auch das Verhältniß $c:d$ gegen das einfache ſo groß, als $lc - ld$ gegen die Einheit. Aber beyde Proportionen

Das Verh. $\frac{a}{b}$: einfachen $= la - lb : 1$.

Das einfache: verhält $\frac{c}{d} = 1 : lc - ld$

geben die dritte: das Verh. $\frac{a}{b}$: Verh. $\frac{c}{d} = la - lb : lc - ld$. Dieß heißt nun nicht ſo viel, der Exponent des Verhält. $\frac{a}{b}$: verhalte ſich gegen den Exponenten des Verh. $\frac{c}{d}$ wie $la - lb : lc - ld$; ſondern der Sinn iſt dieſer: das Verh. $\frac{c}{d}$ laſſe ſich eben ſo aus dem Verhältniß $\frac{a}{b}$ zuſammen ſetzen, wie $lc - ld$ aus $la - lb$ gemacht werden kann. Man muß nämlich das Verhältniß $\frac{a}{b}$ in ſo viele gleiche Theile theilen, als $la - lb$ Einheiten oder Theile der Einheit enthält, und von jenen gleichen Theilen des Verh. $\frac{a}{b}$ ſo viele nehmen, als $lc - ld$ Einheiten oder Theile der Einheit enthält, die den Theilen in $la - lb$ gleich ſind. Herr von Leibnitz hat bey Gelegenheit ſeines Streits mit dem Hrn. Bernoulli ſchon die Anmerkung gemacht, daß die Brüche mit den Verhältniſſen nicht ſchlechthin für einerley zu halten ſeyn, und das bisherige beweißt, daß er Recht gehabt habe.

§. 18.

Die Ausmeſſung der Verhältniſſe, vermittelſt der Logarithmen, hat übrigens die größte Aehnlichkeit mit der Ausmeſſung anderer Größen. Von der Verſchiedenheit des Maaßes, deſſen man ſich bey den Meſſungen bedienet, rührt es her, daß eine und eben dieſelbe Größe, bald durch dieſe, bald durch jene Zahl ausgedrückt wird, nachdem man dieſes oder ein anderes Maaß erwählet hat; da dann die Zahlen, welche einerley Größe aus verſchiedenen Maaßen ausdrücken, ſich umgekehrt, wie dieſe Maaße ſelbſt verhalten. Iſt z. E. eine Diſtanz 100 Ruthen lang, und man rechnet 10 Fuß auf einer Ruthe, ſo iſt eben die Diſtanz 1000 Fuß lang, da dann 100 : 1000 = Fuß : Ruthe. So und nicht anders iſt es auch mit den Logarithmen beſchaffen. Von der Verſchiedenheit desjenigen Verhältniſſes, ſo man zum Maaß aller übrigen Verhältniſſe annimmt, rührt es her, daß eines und eben deſſelben Verhältniſſes Größe bald durch dieſen, bald durch einen andern Logarithmen ausgedrückt wird, nachdem dieſes oder ein anderes Verhältniß zum Maaß aller übrigen erwählet worden: und dann verhalten ſich die Logarithmen, welche eben deſſelben Verhältniſſes Größe ausdrücken, umgekehrt, wie die zum Maaß aller übrigen angenommene einfache Verhältniſſe. Dieß iſt der Grund von der Verſchiedenheit der Logarithmenſyſteme. Man darf nur auf dasjenige zurück ſehen, was im 14 §. vorgetragen worden, ſo iſt dieſes eine Sache, die ſogleich für ſich klar iſt. Nimmt man in dem allgemeinen Ausdruck des 15 §. $l\,(1+B) = \frac{1}{(b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{3}(b-1)^3 - \&c.}$ $(B - \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{3}B^3 - \&c.$ die Baſin b ſo an, daß der Bruch $\frac{1}{(b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{3}(b-1)^3 - \&c.}$ $= 1$ wird; ſo iſt bekannt, daß das Syſtem, welches auf die Art beſtimmt wird, das Natürliche heiße. Müß alſo in ſolchem Fall $b = e$ ſeyn, ſo iſt e die Baſis der natürlichen Logarithmen. Man bezeichne die Logarithmen eines andern Syſtems, deſſen Baſis b iſt, mit L, wenn die natürlichen mit l bezeichnet werden, ſo hat man $L\,b = 1$ und $l\,e = 1$; ferner wird $l\,b = (b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{3}(b-1)^3 - \&c.$

$$L(1+B) = \frac{1}{(b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{3}(b-1)^3 - \&c.}\,(B - \tfrac{1}{2}B^2 + \tfrac{1}{3}B^3 - \&c.$$

oder $L\,(1+B) = \frac{1}{l\,b}\,(B - \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{3}B^3 - \&c.)$

Aber $log\,(1+B) = B - \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{3}B^3 - \&c.$ folglich $L\,(1+B = \frac{1}{l\,b}\,log\,(1+B)$

$(1+B)$, daß alſo $\log(1+B) : L(1+B) = lb : 1 = lb : le$, d. i.

$\log(1+B) : L(1+B) =$ Verh. $(b : 1)$: Verh. $(e : 1)$.

§. 19.

Bey dieſer bisherigen Ausführung der Theorie von den Logarithmen iſt der Unterſchied der Verhältniſſe von mir noch gar nicht in Betrachtung gezogen worden, vermöge deſſen ihre Glieder einander entgegen geſetzt ſeyn können. Ich will der Kürze wegen ſolche Verhältniſſe, deren Glieder nicht entgegen geſetzt ſind, wie $+a : +b$, oder $-a : -b$ **poſitive**, diejenigen aber, deren Glieder einander entgegen geſetzt ſind, wie $+a : -b$, oder $-a : +b$, **negative** Verhältniſſe nennen. Es iſt leicht zu erachten, daß dieſer Unterſchied mancherley Einſchränkungen bey der Theorie von den Logarithmen nothwendig machen werde, da es nun gewiß nicht mehr einerley bleibt, ob das Verhältniß, woraus alle andere zuſammen geſetzt werden ſollen, poſitiv oder negativ angenommen wird. Kommt die ſpecielle Beziehung der Glieder gegen einander, vermöge welcher ſie entweder einander entgegen geſetzt ſind oder nicht, gar nicht in Betrachtung, ſo ſind alle Verhältniſſe als poſitiv anzuſehen, und dann läßt ſich jedes Verhältniß aus jedem andern zuſammen ſetzen. Es wird nämlich entweder das eine Verhältniß ganz, oder doch ein Theil deſſelben, in dem andern etlichemal enthalten ſeyn, wenn man nämlich bey der Theilung jenes Verhältniſſes auch bis auf Elementarverhältniſſe gehet. Man mag übrigens bey dieſer Theilung gehen, ſo weit man will, ſo wird jeder Theil allemal wiederum ein poſitives Verhältniß ſeyn. Aber es iſt noch die Frage, ob ſich auch jedes negative Verhältniß aus einem poſitiven, und umgekehrt jedes poſitive aus einem negativen zuſammen ſetzen laſſe. Es läßt ſich leicht zeigen, daß dieſe Frage keinesweges bejahet werden könne. Die beyden Verhältniſſe $+b : +1$ und $-b^{2m} ; +1$ ſind ſo beſchaffen, daß das letztere aus dem erſten ſich gar nicht zuſammen ſetzen läßt, und man kann die Größe des Verhältniſſes $-b^{2m}: +1$ gegen das Verhältniß $+b: +1$ gewiß durch keine mögliche Zahl ausdrücken. Wäre das Verhältniß $(-b^{2m}:+1)$: Verh. $(+b:+1)=\lambda:1$; ſo müßte $(-b^{2m}: +1)=(+b: +1)\lambda$ ſeyn. Man ſetze aber ſtatt λ eine mögliche Zahl, welche man will, ſo wird dieſer Gleichung nie ein Genüge geſchehen können. Deswegen kann λ keine mögliche Zahl ſeyn. Eben ſo erhellet, daß ſich das Verhältniß $+b^{2m}+1: +1$ aus dem Verhältniß $-b:+1$ gar nicht zuſammen ſetzen laſſe. Die Erinnerung iſt ſo nöthig, daß die ganze Entſcheidung der Streitigkeit von den Logarithmen verneinter Größen darauf beruhet.

§. 20.

Hiemit muß ich noch folgende Anmerkung verbinden: Eine poſitive und eine negative Größe ſind *entgegengeſetzte Größen*, wie z. E. $+a$ und $-a$; allein ein poſitives und ein negatives Verhältniß, ſind keinesweges *entgegengeſetzte Verhältniſſe*. So iſt z. E. das Verhältniß $+a: +1$, keinesweges ein dem Verhältniß $-a:+1$ entgegengeſetztes. Entgegengeſetzte Größen, müſſen für ſich betrachtet, unter einem gemeinſchaftlichen Hauptbegriff ſtehen, übrigens aber ſo beſchaffen ſeyn, daß wenn die eine nach und nach abnimmt, und verſchwindet, ſie ſich in die entgegengeſetzte verwandelt. Dieß iſt eine allgemein bekannte Sache. Man ſetze nun das poſitive Verhältniß $+a:1$, und laſſe a nach und nach abnehmen, ſo wird dieſes Verhältniß ſchon verſchwinden, wenn $a=1$. Wird $a<1$, ſo gehet das Verhältniß $+a:1$ in den entgegengeſetzten Zuſtand über, ohne daß daraus ein negatives Verhältniß wird. So ſind die Verhältniſſe $+a:+1$ und $+\frac{1}{a}:+1$ *entgegengeſetzte für ſich gleiche Verhältniſſe*, eben ſo, wie $+a$ und $-a$ *entgegengeſetzte für ſich gleiche Größen* ſind.

Aber nimmermehr ſind $+a:+1$ und $-a:+1$ entgegengeſetzte für ſich gleiche Verhältniſſe. Dadurch daß man $-a$ aus $+a$ macht, ſetzt man nicht das Verhältniß $-a:+1$ dem Verhältniß $+a:+1$ entgegen, ſondern nur die Größe $-a$ der Größe $+a$.

Die Logarithmen negativer Größen ſind unmöglich.

§. 21.

Die meiſten Streitigkeiten ſind ſo gut als entſchieden, ſobald man über den eigentlichen Sinn der Streitfrage einig iſt. Wenigſtens ſollte ich glauben, daß in der Mathematik aller Streit aufhören müſſe, ſobald beyde Partheyen, ſowohl über die Bedeutung der einzelnen Worte, als auch über den Sinn des ſtreitigen Satzes völlig einig ſind. Mir kommt es ſo vor, als ob man bey der Streitigkeit über die Logarithmen verneinter Größen es bishero ziemlich verabſäumet habe, den eigentlichen Sinn der Streitfrage (ſtatum controverſiæ) genau feſt zu ſetzen. Vieleicht hat man eine gewiſſe Zweydeutigkeit der Frage: **Ob die Logarithmen verneinter Größen möglich ſind?** gar nicht bemerkt, weil man nicht daran gedacht hat, daß der Logarithmus einer Zahl eigentlich der Logarithmus des Verhältniſſes dieſer Zahl zur Einheit ſey, und daß demnach die Frage ſo verſtanden werden müſſe, ob die **Logarithmen der Verhältniſſe negativer Zahlen zur Einheit möglich ſeyn?** Wer ſieht aber nicht, daß dieſe Frage, ſo wie ſie hier ausgedruckt iſt, noch nicht völlig beſtimmt ſey, ſondern alsdann allererſt beſtimmt beantwortet werden könne, wenn man feſt geſetzt hat, ob die poſitive oder negative Einheit verſtanden werden ſolle. Auf die Frage: **ob die Logarithmen der Verhältniſſe negativer Zahlen zur negativen Einheit möglich ſind?** antworte ich mit **Ja.** Faſt kommt es mir ſo vor, als ob die Herren Bernoulli und d'Alenbert die Streitfrage wenignigſtens zuweilen in dieſem Sinn genommen haben. Manche ihrer Gründe ſind ſo beſchaffen, daß ſie nichts anders, als dieſes beweiſen können. Der erſte Beweis, womit Hr. d'Alenbert auf der 185 Seite ſeiner Opuſcules Mathematiques ſeine Meynung zu beſtätigen ſucht, lautet ſo: En effet 1°, puisque les logarithmes repondans à une progreſſion de nombres quelconque ſont arbitraires, qui peut empecher de ſuppoſer, que les deux progreſſions

$$\begin{array}{c} -1 - 2 - 3 - 4 \ \&c. \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \ \&c. \end{array}$$

conſiderées comme de progreſſions *differentes* & *independantes* l'une de l'autre ont les memes logarithmes o, p, q, &c. Soll dieß ſo viel heißen: $log.\ rat. \frac{-1}{-1} = o = log.\ rat. \frac{+1}{+1}$; $log.\ rat. \frac{-2}{-1} = p = log.\ rat. \frac{+2}{+1}$; $log.\ rat. \frac{-3}{-1} = q = log.\ rat. \frac{+3}{+1}$, &c. ſo hindert nicht nur nichts, dieſe Vorausſetzung anzunehmen, ſondern es iſt auch ſogar nothwendig derſelben beyzupflichten. Weil überhaupt $-n : -1 = +n : +1$, ſo iſt $log. (-n : -1) = log. (+n : +1)$, das heißt der Logarithmus des Verhältniſſes einer negativen Zahl zur negativen Einheit, iſt gleich dem Logarithmus des Verhältniſſes eben der Zahl poſitiv genommen zur poſitiven Einheit. Hierüber iſt aber wohl eigentlich kein Streit. Herr von Leibnitz hat dieß nicht geläugnet, Herr Euler auch nicht. Es muß demnach die Streitfrage wohl ohne Zweifel dieſen Sinn haben: Sind die Logarithmen **der Verhältniſſe negativer Zahlen zur poſitiven Einheit** möglich? Man nimmt bey allen algebraiſchen Rechnungen die Einheit poſitiv an, und man darf dieſe Vorausſetzung nie ändern (§. 9.) Ich denke alſo, wenn von den Logarithmen einer negativen Zahl die Frage iſt, daß man den Logarithmus des Verhältniſſes der negativen Zahl zur poſitiven Einheit verſtehen müſſe. Hat nun dieß ſeine Richtigkeit, ſo iſt $l - 1$ ſoviel als $log.\ rat. \frac{-1}{+1}$, und überhaupt $l - a$ ſoviel als $log.\ rat. \frac{-a}{+1}$. In dieſem Sinn aber beantworte ich die Frage: Ob die Logarithmen negativer Zahlen möglich ſind? mit Nein: und ich behaupte mit dem Herrn von Leibnitz und Euler: **die Logarithmen negativer Zahlen ſind unmöglich.**

§. 22.

Wenigſtens iſt ſoviel gewiß, daß in einem Syſtem, in welchem $l+1=0$ iſt, nicht zugleich $l-1=0$ ſeyn könne. Das heißt, es kann nicht $l\frac{+1}{+1}=l\frac{-1}{+1}$ geſetzt werden. Denn wenn in einerley Syſtem die Logarithmen zweyer Verhältniſſe gleich ſind, ſo müſſen auch die Verhältniſſe ſelbſt gleich ſeyn; dieß kann Niemand läugnen. Wäre alſo einerley Syſtem $l\frac{+1}{+1}=l\frac{-1}{+1}$, ſo müßte $+1:+1=-1:+1$ ſeyn. Aber dieſe Proportion kann ſchlechterdings nicht als eine wahre Proportion gelten (§.8.) alſo kann keinesweges in einerley Syſtem $l\frac{+1}{+1}=l\frac{-1}{+1}$ geſetzt werden. Auf eben die Art erhellet, daß überhaupt **in einerley Syſtem** eine poſitive Zahl mit der ihr entgegengeſetzten negativen nicht einerley Logarithmen haben könne. Setze man $l+a=l-a$, ſo hieße das ſoviel, $l\frac{+a}{+1}=l\frac{-a}{+1}$, demnach wäre $+a:+1=-a:+1$, daß aber dieſe Proportion gewiß nicht als eine wahre Proportion gelten könne, habe ich im 8 §. umſtändlich bewieſen. Indeſſen ſcheinet der zweyte Beweis, womit Herr d'Alenbert ſeine Meynung zu beſtätigen ſucht, ſo etwas zu erhärten. Der Beweis iſt dieſer. Weil $(-1)^2=(+1)^2$, ſo ſey $2\,log.-1=2\,log.+1$, folglich $log.-1=log.+1=0$. Wenn aber $log.-1=0$, ſo ſey $log.-a=log.(+a\times-1)=log+a+log.-1=log.+a$. Hr. Bernoulli ſchließt eben ſo: Wenn $(-a)^2=(+a)^2$, ſo ſey $2\,l-a=2\,l+a$, folglich $l-a=l+a$. Ich weis nicht wie es möglich iſt, daß beyde Männer die Verwirrungen nicht bemerkt haben, die in dieſen Schlüſſen ſtecken. Ich habe bereits im 12 §. einige Erinnerungen gegen dieſe Art zu ſchließen vorgetragen, und ich werde ſie jetzt noch etwas genauer prüfen. Herr d'Alenbert meinet zwar, daß dieſer Beweis unwiderleglich ſey: allein ſeine eigenen Grundſätze widerlegen ihn. Ich habe ſchon im 3 §. eine Stelle aus den Opuſcules des Herrn d'Alenbert angeführt, woſelbſt von ihm behauptet wird, die Gleichung $by = (a-x)^2$ ſey eigentlich eine falſche Gleichung, wenn $x > a$: die wahre ſey dieſe: $by = (x-a)^2$. Wenn dieß richtig iſt, ſo muß auch $(-a)^2 = (+a)^2$ eigentlich eine falſche Gleichung, und die wahre Gleichung dieſe ſeyn $(+a)^2 = (+a)^2$. Daraus folgt weiter nichts, als es ſey $l+a = l+a$. Doch dieß ſey nur im Vorbeygehen angeführt, um zu zeigen, daß das Syſtem des Herrn d'Alenbert mit ſich ſelbſt nicht genau zuſammen hängt. Ich gebe es zu, daß die Gleichung $(-a)^2 = (+a)^2$ völlig richtig ſey: allein die Folge kann ich nicht billigen, wenn man daraus ſchließt, es ſey $2l-a = 2l+a$, und ich hoffe, daß folgende Betrachtungen die Unrichtigkeit dieſer Folge völlig ins Licht ſetzen werden.

§. 23.

Man ergänze alle ausgelaſſene Zwiſchenſätze: ſo muß der Beweis ſo lauten:

$$\text{Es iſt } (-a)^2 = (+a)^2$$

Wenn die Zahlen gleich ſind, ſo ſind die Logarithmen gleich, es verſteht ſich in **einerley Logarithmenſyſtem**. Alſo iſt $l(-a)^2 = l(+a)^2$.

Der Logarithmus des Quadrats iſt doppelt ſo groß, als der Logarithmus der Wurzel, folglich iſt

$$2l\sqrt{(-a)^2} = 2l\sqrt{(+a)^2}.$$

$$\text{Es iſt aber } \sqrt{(-a)^2} = -a \text{ und } \sqrt{(+a)^2} = +a;$$

$$\text{daher wird } 2l-a = 2l+a$$

$$\text{und } l-a = l+a$$

Iſt es wahr, daß man an dieſem Beweiſe nichts ausſetzen könne, ſo wird dadurch dargethan, daß in **einerley Logarithmenſyſtem** $l - a = l + a$ ſey. Aber nun kann man weiter ſchließen. Wenn in einerley Logarithmenſyſtem die Logarithmen gleich ſind, ſo ſind auch die Zahlen gleich, demnach müßte $-a = +a$ ſeyn. Daß dieß falſch ſey, habe ich ſchon mehrmalen erinnert. Wenn man es ſich indeſſen einmal erlaubt hat, beym Calculiren nicht an die Sache zu denken, ſondern blos bey den Zeichen ſtehen zu bleiben; ſo darf man nur noch hinzu ſetzen: Es iſt auch
$+a = +a$, das wird man nicht läugnen.

Nun war auch $-a = +a$, wie erwieſen worden.

Demnach iſt $0 = 2a$, weil ohne Zweifel gleiches heraus kommt, wenn gleiches zu gleichem addirt wird. Alſo iſt jede Zahl $= 0$, denn man kann ſtatt a was man will ſetzen. Ich denke, dieſe Ungereimtheit ſey zu arg, als daß man nicht gezwungen ſeyn ſollte zuzugeben, es müſſe in den Schlüſſen ein wichtiger Fehler ſtecken, die auf ſo wunderliche Schlußfolgen leiten. Dieſer Fehler ſteckt nun wirklich in den beyden Sätzen $\sqrt{(-a)^2} = -a$ und $\sqrt{(+a)^2} = +a$. Dieſe Sätze ſind ſo wie ſie hier angewandt werden unvollſtändig. Es hat $\sqrt{(-a)^2}$ keinesweges die Wurzel $-a$ **allein** mit Ausſchließung der Wurzel $+a$, und $\sqrt{(+a)^2}$ hat keinesweges die Wurzel $+a$ **allein** mit Ausſchließung der Wurzel $-a$. Es iſt vielmehr $\sqrt{(-a)^2}$ ſowohl als $\sqrt{(+a)^2} = \pm a$, und alſo kommt kein anderer als dieſer Schlußſatz heraus: $l \pm a = l \pm a$. Wenn Hr. Euler in der Hiſtoire de l'Academie de Berlin pour l'année 1749. auf der 147 Seite eben dieſen Beweis beurtheilet, ſo zeigt er, daß man auf eben die Art beweiſen könne, es ſey $l(a\sqrt{-1}) = la$ wenn man nämlich ſchließen wollte $(a\sqrt{-1})^4 = (+a)^4$, alſo $4\,l(a\sqrt{-1}) = 4\,la$, folglich $l(a\sqrt{-1}) = la$. In dieſen und allen ähnlichen Beweiſen, ſteckt mit dem vorigen einerley Fehler; $(a\sqrt{-1})^4$ hat ſo gut die Wurzeln $+a$, $-a$, $+a\sqrt{-1}$, $-a\sqrt{-1}$, als ſie $(+a)^4$ hat, und es folget alſo nur dieſes, es ſey $l\begin{matrix}\pm a\\ \pm a\sqrt{-1}\end{matrix} = l\begin{matrix}\pm a\\ \pm a\sqrt{-1}\end{matrix}$.

§. 24.

Wenn demnach keinesweges $l+a = l-a$ ſeyn kann, und zwar, wie ich ausdrücklich dabey erinnert habe, *in einem und eben demſelben Syſtem*; ſo fragt es ſich weiter: was iſt dann $l-a$ in eben dem Syſtem, in welchem $l+a$ eine mögliche Zahl iſt? Ich behaupte: in einem Syſtem, in welchem $l+a$ eine mögliche Größe ſeyn ſoll, muß $l-a$ eine eben ſo unmögliche Größe ſeyn, als nach aller Geſtändniß in der Algebra $\sqrt[2m]{-a}$ iſt. Denn es ſey $l+a : l-a = 1 : \lambda$, ſo muß $l-a = \lambda\, l+a$, und $-a = (+a)^\lambda$ ſeyn. Nun iſt es ſchlechterdings unmöglich ſtatt λ eine Zahl zu ſetzen, welche macht, daß beyde Glieder dieſer Gleichung einander gleich werden. Demnach iſt λ eine unmögliche Zahl, folglich iſt es auch $l-a = \lambda\, l+a$, wenn $l+a$ möglich ſeyn ſoll. Man beweißt auf eben die Art, daß $\sqrt{-a^2}$ unmöglich ſey. Man ſchließt: es ſey $\sqrt{-a^2} = y$, ſo müßte $y \times y = -a^2$ ſeyn. Nun kann man ſtatt y keine mögliche Zahl ſetzen, dieſer Gleichung ein Gnüge zu leiſten: alſo iſt y unmöglich. Kann man an dieſem Beweiſe nichts ausſetzen, ſo kann man es gewiß auch an jenem nicht; hat es aber mit dieſem Beweiſe ſeine Richtigkeit, ſo ſchließe ich weiter. In einem Syſteme, worinn alle poſitive Zahlen mögliche Logarithmen haben, ſind die Logarithmen aller negativen Zahlen unmöglich. Denn man ſetze in der Gleichung $-a = (+a)^\lambda$ ſtatt a eine poſitive Zahl, welche man will, ſo wird λ allemal unmöglich bleiben, folglich auch $\lambda\, l+a$, wenn $l+a$ allemal möglich iſt. Nun darf ich nur hinzuſetzen: **Im nepperſchen und briggiſchen Syſtem ſind die Logarithmen aller poſitiven Zahlen**

len möglich, dieß iſt eine Vorausſetzung, die allgemein angenommen wird. Alſo folgt der Schluß: **Im nepperſchen und briggiſchen Syſtem ſind die Logarithmen aller negativen Zahlen unmöglich.**

§. 25.

Wenn die Vorausſetzung nicht beybehalten wird, daß von einem und eben demſelben Syſtem die Rede ſey, ſo verliert der Beweis ſein ganzes Gewicht. Es verſteht ſich von ſelbſt, daß die Regel nicht mehr gelte: wenn die Logarithmen gleich ſind, ſo ſind die Zahlen, oder die Verhältniſſe derſelben zur Einheit gleich, wenn der eine Logarithmus zu einem andern Syſtem, als der andere gehört. Hieraus ergiebt ſich eine neue Zweydeutigkeit der Streitfrage über die Logarithmen verneinter Größen, welche man, wie es mir wenigſtens vorkommt, ebenfalls von beyden Seiten nicht genug in Betrachtung gezogen hat. Die Frage: ſind die Logarithmen verneinter Größen möglich? kann ſo viel heißen: Sind die nepperſchen oder die briggiſchen Logarithmen verneinter Größen, oder auch noch allgemeiner; Sind die Logarithmen verneinter Größen, in einem gegebenen Syſtem möglich? Eben dieſe Frage kann auch ſo erkläret werden: **Läßt ſich gar kein Logarithmenſyſtem angeben, worinn die verneinten Zahlen mögliche Logarithmen haben.** In der That hat dieſer doppelte Sinn der Streitfrage zu mancher Verwirrung Gelegenheit gegeben. Die Gründe des Hrn. d'Alenbert ſind zum Theil ſo beſchaffen, daß ſie nichts weiter beweiſen können, als man müſſe überhaupt zugeben, daß ſich gar wohl Logarithmenſyſteme angeben laſſen, worinn die Logarithmen negativer Zahlen möglich ſind. Da er inzwiſchen mit dem Hrn. Bernoulli darauf dringt, es müſſe allemal $l+a=l-a$ ſeyn, ſo ſieht man wohl, daß er auch die Frage, in dem erſten Sinn genommen, bejahet habe. Denn bey ihm kann in der Gleichung $l + a = l - a$ das l ſowohl einen Nepperſchen, als auch Briggiſchen, ja eines jeden andern Syſtems Logarithmen bedeuten. Herr Euler beweißt, daß die nepperſchen Logarithmen negativer Zahlen alle unmöglich ſind, da ſich im Gegentheil unter den unzählig vielen nepperſchen Logarithmen einer poſitiven Zahl allemal ein möglicher befindet. Hr. d'Alenbert beweißt wenigſtens mit manchen von ſeinen Gründen nichts weiter als dieſes, man könne Logarithmenſyſteme angeben, worinn negative Zahlen mögliche Logarithmen haben. Das pflegte man ſonſt in der Vernunftlehre eine fallaciam ignorationis elenchi zu nennen.

§. 26.

Beyde Partheyen werden, wie ich wenigſtens glaube, einen ziemlichen Schritt zum Vergleich thun, ſobald von beyden Seiten zugegeben wird, daß ſich allerdings Logarithmenſyſteme angeben laſſen, worinn negative Zahlen mögliche Logarithmen haben. Herr d'Alenbert redet zuweilen ſo: Les logarithmes des quantités negatives *peuvent être regardés* comme réels (183 Seite) le log. — 1 eſt ou *peat être ſuppoſé* = 0 (185 S.) zuweilen aber ganz anders: le logarithme de 2 & le logarithme de — 2 *doivent* être les mêmes, puisque faiſant log. 1 = 0 & log. 4 = p on aura log. 2 & log. — 2 = $\frac{1}{2}$p (187 S.) eben dieß ſagt er auf der 198 Seite. En effet ſoient 1 & a^2 deux nombres poſitifs & réels, qui ayent 0 & p pour logarithmes; il eſt evident, que la moyenne proportionelle entre 1 & a^2 ſera egalement $+a$ & $-a$, & que le logarithme correſpondant ſera $\frac{1}{2}$p. Done $\frac{1}{2}p = l + a$ & $\frac{1}{2}p = l - a$. Nichts iſt gewiſſer, als daß ſowohl $+a$ als $-a$ zwiſchen $+1$ und $+a^2$ eine mittlere Proportionalgröße ſey. Und eben von dieſem Umſtand rührt alle anſcheinende Schwierigkeit bey der Streitfrage her. Hätte Herr d'Alenbert daraus nichts weiter als dieſes geſchloſſen: Wenn $l+1=0$ und $l+a^2=p$ ſey, ſo könne überhaupt zu ſagen $l+a=\frac{1}{2}p$, es könne auch $l-a=\frac{1}{2}p$ geſetzt werden; ſo würde ich ihm völlig Beyfall geben. Allein weiter folgt auch nichts daraus, und am allerwenigſten dieſes, daß in eben dem Syſtem, wo man $l+a=\frac{1}{2}p$ geſetzt hat, auch zugleich $l-a=\frac{1}{2}p$ geſetzt werden müſſe. Entweder man muß vorausſetzen, daß $+a=-a$ ſey, und dann muß zuforderſt ausgemacht werden, ob dieſe Vorausſetzung beſtehen könne; oder man muß zugeben, daß ein ganz anderes Syſtem heraus komme, wenn man $l+a=\frac{1}{2}p$ ſetzt, als heraus kommt, wenn $l-a=\frac{1}{2}p$ geſetzt worden. Beyde Syſteme werden dieſe ſeyn.

1. Syſtem.

Die Zahlen

$$1 + a^1 + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + \&c.$$

Die Logarithmen

$$0 \quad \tfrac{1}{2}p \quad p \quad \tfrac{3}{2}p \quad 2p \quad \tfrac{5}{2}p \quad 3p \quad \tfrac{7}{2}p \quad \&c.$$

2. Syſtem.

Die Zahlen

$$1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - a^7 + \&c.$$

Die Logarithmen

$$0 \quad \tfrac{1}{2}p \quad p \quad \tfrac{3}{2}p \quad 2p \quad \tfrac{5}{2}p \quad 3p \quad \tfrac{7}{2}p \quad \&c.$$

§. 27.

Es iſt nicht zu läugnen, daß im zweyten Syſtem $\log -a$, $\log -a^3$ und überhaupt $\log -a^{2m+1}$ mögliche Zahlen ſind. Dagegen aber ſind $\log. -a$, $\log. -a^3$, und überhaupt $\log -a^{2m+1}$ im erſten Syſtem unmöglich. (§. 24.) Wäre im erſten Syſtem $l+a^{2m+1}\ l-a^{2m+1} = 1 ; \lambda$, ſo würde $l-a^{2m+1} = \lambda\ l + a^{2m+1}$, und $-a^{2m+1} = (+a^{2m+1})\lambda$. Hier läßt ſich gewiß keine mögliche Zahl ſtatt λ ſetzen, daher iſt unſtreitig $l - a^{m+1} = \lambda\, l + a^{2n+1} = \lambda \frac{(2m+1)p}{2}$ unmöglich, wenn p möglich iſt, wie hier vorausgeſetzt wird. Wenn aber in einem Syſtem eine Zahl keinesweges den Logarithmum haben kann, den ſie in dem andern hat, ſo ſind beyde Syſteme gewiß nicht einerley. Im zweyten von dieſen beyden Syſtemen iſt alſo überhaupt $l - a^{2m+1}$ möglich: allein bey dem allen bleiben $l - a^2$, $l - a^4$, und überhaupt $l - a^{2m}$ unmöglich, nämlich in eben dieſem Syſtem. (§. 24.) Wäre in dieſem Syſtem $l + a^{2m} : l - a^{2m} = 1 : \lambda$, ſo würde $l - a^{2m} = \lambda\, l + a^{2m}$, folglich $-a^{2m} = (+a^{2m})\lambda$ ſeyn. Daß hier abermal λ unmöglich ſey, fällt in die Augen: alſo iſt es auch $l - a^{2m} = \lambda\, l + a^{2m} = m\, \lambda\, p$, weil p möglich iſt. Wenn alſo gleich in einem gewiſſen Syſtem einige negative Zahlen mögliche Logarithmen haben, ſo folgt daraus noch nicht, daß die Logarithmen aller negativen Zahlen in eben dieſem Syſteme möglich ſind. Zugleich fällt in die Augen, daß in eben dieſem Syſtem $l + a^{2m+1}$ unmöglich ſey. Verhielte ſich nämlich $l - a^{2m+1} : l + a^{2m+1} = 1 : \lambda$, ſo würde $l + a^{2m+1} = \lambda\, l - a^{2m+1}$ ſeyn müſſen, und folglich $+a^{2m+1} = (-a^{2m+1})\lambda$. Aber es thut keine mögliche Zahl, die man ſtatt λ ſetzen könnte, dieſer Gleichung ein Genüge. Alſo iſt λ unmöglich, folglich auch $l + a^{2m+1} = \lambda\, l - a_2{}^{2m+1} = \lambda \frac{(2m+1)}{2} p$ unmöglich, wenn p möglich iſt.

§. 28.

Aus dieſer Vergleichung beyder Syſteme ſchließe ich die wichtige Folge. Wenn der Unterſchied, poſitiver und negativer Verhältniſſe in Betrachtung kommt; ſo beſtimmt die gegebene Baſis allein nicht das ganze Logarithmenſyſtem. Wenn man nämlich in dem Syſtem die übrigen Verhältniſſe, welche aus dem

Verhältniß der Baſis zur Einheit, ganz genommen, nicht können zuſammen geſetzt werden, aus Theilen des einfachen, zuſammen ſetzt; ſo kann der Theil des einfachen, welchen man hierzu erwählet, ſo gut negativ als poſitiv ſeyn, wenn gleich das angenommene einfache Verhältniß poſitiv iſt. Soll demnach die ganze Reihe der übrigen Zahlen nebſt ihren Logarithmen beſtimmt werden; ſo kommt es noch darauf an, was man für einen Theil des einfachen Verhältniſſes erwählen will. Wählt man einen negativen Theil, ſo kann nicht alles dasjenige ſchlechthin beſtehen, was ſonſt von den Logarithmen in den Lehrbüchern bewieſen wird, weil dabey der Unterſchird poſitiver und negativer Verhältniſſe gar nicht in Betrachtung gezogen zu werden pflegte. (§. 19.) So fällt es gleich in die Augen, daß die ſonſt gewöhnlichen Lehren von den Modulis verſchiedener Syſteme nun nicht ſchlechthin mehr gelten können. Wenn ſonſt in verſchiedenen Syſtemen, die zu einerley Zahl gehörigen Logarithmen durchgängig ungleich ſind, ſo ſind ſie es bey Syſtemen, wie im §. 26. angenommen worden, nicht durchgängig. So ſind $l+a^2$, $l+a^4$ und ſo f. in beyden Syſtemen gleich. Hierüber muß man ſich nicht wundern, da viele andere ſonſt allgemeine Lehren nicht mehr gelten, ſobald der Unterſcheid des Poſitiven und Negativen in Betrachtung kommt. Wenn die Wurzeln ungleich ſind, ſo ſind auch die Quadrate ungleich: Dieß iſt ſonſt eine allgemeine Regel. Aber $+a$ und $-a$ ſind ungleich, dem ohnerachtet ſind $(+a)^2$ und $(-a)^2$ einander gleich. Sonſt hängen die Logarithmen verſchiedener Syſteme nach einem beſtändigen Modulo von einander ab, und zu einerley Zahl gehörige Logarithmen verhalten ſich in verſchiedenen Syſtemen, wie die Moduli. Dieß hat den Grund, weil das einfache Verhältniß nur auf einerley Art in zwo Hälften, in vier Viertel, u. ſ. f. eingetheilet werden kann, wenn an die negativen Verhältniſſe gar nicht gedacht wird. Wenn daher ein anderes Verhältniß, als vorher, für die Hälfte, den vierten Theil, und ſo f. des ganzen genommen wird, ſo muß auch nothwendig das jetzige Ganze ein anders als das Vorige ſeyn. Iſt vorher $l\,a = \frac{1}{2}$ gewesen, ſo war $l\,a^2 = 1$. Nimmt man nun $l\,a = \frac{1}{2}$, ſo wird $l\,a^2 = 1$. Man kann keine Aenderung von dieſer Art vornehmen, ohne zugleich die Baſin, und hiemit die Logarithmen aller Zahlen zu ändern, und zwar umgekehrt, wie ſich diejenigen Verhältniſſe ändern, welche man in dieſen verſchiedenen Vorausſetzungen, als die Hälfte des ganzen, u. ſ. f. anſieht. Allein, wenn man einmal $l + a = \frac{1}{2}$ genommen hat, und ſetzt nun $l - a = \frac{1}{2}$, ſo bleibt das Ganze eben daſſelbe, und es ändern ſich nicht aller Zahlen Logarithmen. Kommt demnach der Unterſcheid negativer und poſitiver Verhältniſſe in Betrachtung, ſo beſtimmt zwar die Baſis alle Verhältniſſe, die aus dem einfachen, nach einem ganzen Exponenten können zuſammen geſetzt werden, nicht aber alle diejenigen, ſo man nach einem gebrochenen Exponenten daraus zuſammen ſetzen kann.

§. 29.

Hieraus ſchließe ich die Folge, wenn der Unterſchied poſitiver und negativer Verhältniſſe in Betrachtung kommt, ſo wird das Logarithmenſyſtem alsdann allererſt völlig beſtimmt, wenn man feſt ſetzet, **welcher Theil des einfachen Verhältniſſes für das gemeinſchaftliche Maaß aller angenommen werden ſoll.** Die Logarithmen des Syſtems ſollen die Größe aller Verhältniſſe gegen das einfache aus einem gemeinſchaftlichen Maaß ausdrücken (§. 13.). Jeder Logarithmus muß ausdrücken, **aus welchem Theil** des einfachen Verhältniſſes, und wie oft genommen dasjenige zuſammen geſetzt ſey, welches dieſen Logarithmen zugehöret. Nachdem nun dieß gemeinſchaftliche Maaß verſchieden iſt, nachdem kommen unſtreitig verſchiedene Syſteme heraus, und wenn dieß gemeinſchaftliche Maaß, ein negatives Verhältniß iſt, ſo kommt gewiß ein anderes Syſtem heraus, als wenn dazu ein poſitives Verhältniß erwählet wird. Denn es können in dieſen verſchiedenen Vorausſetzungen nicht durchgängig einerley Zahlen einerley Logarithmen zugehören. Es ſey $+b : +1$ das einfache Verhältniß, und man theile es in $2m$ gleiche Theile, ſo daß das gemeinſchaftliche Maaß aller $= (+b)_{\frac{1}{2m}} : +1$ ſey. Nimmt man $+(+b)_{\frac{1}{2m}} : +1$ für das gemeinſchaftliche Maaß aller andern Verhältniſſe, ſo gehört der Logarithmus $\frac{2n+1}{2m}$ dem poſitiven Verhältniß $+b^{\frac{2n+1}{2m}} : +1$, und der Logarithmus des negativen $-b^{\frac{2n+1}{2m}} : +1$ iſt unmöglich (§. 24. 26.). Umgekehrt nimmt man $-(+b)_{\frac{1}{2m}} : +1$ für das gemeinſchaftliche Maaß aller, ſo iſt $\frac{2n+1}{2m}$ der Logarithmus des negativen Verhältniſſes $-b^{\frac{2n+1}{2m}} : +1$, und der Logarithmus des poſitiven $+b^{\frac{2n+1}{2m}} : +1$ iſt unmöglich. (§. 27.) In dem Syſtem, welches $+b_{\frac{1}{2m}} : +1$ für das gemeinſchaftliche Maaß aller Verhältniſſe nimmt, ſind die Logarithmen aller poſitiven Zahlen möglich, und die Logarithmen aller negativen Zahlen unmöglich. In dem Syſtem aber, welches $-b_{\frac{1}{2m}} : +1$ für das gemeinſchaftliche Maaß aller Verhältniſſe nimmt, ſind die Logarithmen der poſitiven Zahlen $+b^{\frac{2n}{2m}}$ möglich, und der negativen $-b^{\frac{2n}{2m}}$ unmöglich, aber die Logarithmen der poſitiven Zahlen $+b^{\frac{2n+1}{2m}}$ unmöglich, und die Logarithmen der negativen $-b^{\frac{2n+1}{2m}}$ möglich.

§. 30.

Wenn das einfache Verhältniß $+b : +1$ ſich in eine ungerade Anzahl von Theilen $2m+1$ ſo eintheilen läßt, daß $(+b)_{\frac{1}{2m+1}} : +1$ das gemeinſchaftliche Maaß, aller andern Verhältniſſe wird; ſo fällt alle Schwierigkeit weg, und es haben nothwendig alle poſitive Verhältniſſe mögliche, und alle negative Verhältniſſe unmögliche Logarithmen. Aber es kann weder $(+ b)_{\frac{1}{2m}}$; + 1, nach $(+ b)_{\frac{1}{2m+1}} : + 1$ das gemeinſchaftliche Maaß aller Verhältniſſe ſeyn, wofern nicht m unendlich groß genommen, und alſo $(+ b)_{2\frac{1}{m}} : + 1$, oder auch $(+ b)_{\frac{1}{2m+1}} : + 1$ ein Elementarverhältniß wird. Das Verhältniß $(+ b)_{\frac{1}{2m+1}} : + 1$ iſt allemal poſitiv, was auch m bedeutet, und daher iſt kein Zweifel, daß nicht $(+ b)_{\frac{1}{2m+1}} : + 1 = + 1 : + 1$ ſeyn ſollte, wenn $m = \infty$. Aber $(+ b)_{2\frac{1}{m}} : + 1$ iſt allemal zweydeutig, m mag ſo groß genommen werden, wie man will. Ich ſehe alſo auch nicht ab, daß man ſo ſchlechthin behaupten könne, es ſey $(+ b)_{1\frac{1}{m}} : + 1 = + 1 : + 1$, wenn m unendlich groß iſt, mit unbedingter Ausſchließung des andern möglichen Werths $+ b_{2\frac{1}{m}} : + 1 = - 1 : + 1$. Es iſt wahr, für $m = \infty$ wird $2m + 1 = 2m$, und daher $(+ b)_{2\frac{1}{m}} : + 1 = (+ b)_{\frac{1}{2m+1}} : + 1$. Dieß ſcheint zu beweiſen, daß für $m = \infty$ alle Zweydeutigkeit aufhöre: Allein man könnte einwenden, weil für $m = \infty$, $2m = 2m + 1$, ſo ſey dieß vielmehr ein Beweis, daß jedes Elementarverhältniß zweydeutig werde, indem die 1 gegen $2m$ verſchwinde. Soll man alſo genöthiget ſeyn $(+ b)_{2\frac{1}{m}}$ allemal $= + 1$ zu nehmen, ſo muß dieſes von einer andern Urſache herrühren. Dieſe Urſache iſt nun in nichts anders, als darinn zu ſuchen, weil dieß bey dem gebräuchlichen Logarithmenſyſtemen eine unläugbare allgemeine Vorausſetzung iſt, daß alle poſitive Größen mögliche Logarithmen haben ſollen, und weil in keinem Syſtem der Logarithmus einer poſitiven und der ihr entgegengeſetzten negativen Größe beyde zugleich möglich ſeyn können. (§. 24. 27.) Aus dieſen beyden Sätzen folgt ſchon, es müſſe $b_{\frac{1}{\infty}}$ allemal $= + 1$ genommen werden, damit $l + 1 = \frac{1}{\infty}\, l\, b = 0$ werde. Denn ſetzte man $b_{\frac{1}{\infty}} = - 1$, ſo würde $l - 1 = 0$ und $l + 1$ unmöglich werden.

§. 31.

Ein Logarithmenſyſtem, worinn man alle und jede Verhältniſſe aus dem Elementarverhältniſſe $-b^{\frac{1}{\infty}} : +1$ zuſammen ſetzte, würde ohne Zweifel von demjenigen ſehr unterſchieden ſeyn, in welchem $+b^{\frac{1}{\infty}} : +1$ für das Elementarverhältniß genommen wird. Iſt $b^{\frac{1}{m}} : +1$ von dem einfachen Verhältniß derjenigen Theile, woraus alle andere zuſammen geſetzt werden ſollen; ſo ſtellt der Ausdruck $(b^{\frac{1}{m}} : +1)^n$ alle andere Verhältniſſe vor, da dann, wenn m unendlich groß iſt, auch n unendlich groß wird; Man ſetze $\frac{n}{m} = x$, ſo iſt der allgemeine Ausdruck aller Verhältniſſe $b^x : +1$. Wächst x um das Differential dx, ſo hat man $b^{x+dx} : +1 = (b^x : +1) \times (b^{dx} : +1)$. Wächst aber $(b^{\frac{1}{m}} : +1)^n = b^{\frac{n}{m}} : +1$ um ein Elementarverhältniß, ſo erhält man $(b^{\frac{n}{m}} : +1) \times (b^{\frac{1}{m}} : +1)$. Da aber $b^x : +1 = b^{\frac{n}{m}} : +1$, ſo iſt $b^{dx} : +1 = b^{\frac{1}{m}} : +1$ und $dx = \frac{1}{m}$. Iſt nun das Elementarverhältniß $b^{\frac{1}{m}} : +1$ poſitiv, ſo kann durch die Zuſammenſetzung nie ein negatives daraus werden, es iſt vielmehr $bx : +1$ allemal poſitiv, und x beſtändig der Logarithmus einer poſitiven Größe b^x, was auch ſtatt x geſetzt wird, da denn allemal $l - b^x$ unmöglich ſeyn muß. Iſt aber $b^{\frac{1}{m}} : +1$ negativ, ſo kann b^x weder alle poſitive, noch alle negative Größen bedeuten, und b^x iſt gar kein quantum ſecundum legem continui variabile. Nun iſt nämlich $b^{dx} = -1$, alſo $b^{x+dx} = b^x \times -1 = -b^x$; ſo daß b^x gleich in den entgegengeſetzten Zuſtand übergehet, wenn x^a um das Differential dx anwächst, wenn gleich b^x einen endlichen Werth hat. Dieß iſt allen Begriffen des continui zuwider. Soll b^x ein continuum ſeyn, ſo muß man $b^{x+dx} = b^x$ ſetzen können. Dieß geht aber ſchlechterdings nicht an, ſobald $b^{dx} = -1$ ſeyn, und alſo das Elementarverhältniß, woraus man alle andere zuſammen ſetzt, ein negatives ſeyn ſoll.

§. 32.

Aus dieſem allen wird die Richtigkeit folgender Sätze erhellen. Wenn das Elementarverhältniß, woraus man in einem Logarithmenſyſtem alle andere zuſammen ſetzt, ein poſitives, und alſo $b^{\frac{1}{m}} : + 1 = b^{dz} : + 1 = + 1 : + 1$ ſeyn ſoll, ſo haben **alle** poſitive Verhältniſſe mögliche, und **alle negative** Verhältniſſe unmögliche Logarithmen; es iſt ferner b^{z} ein continuum variabile, ſo daß $b^{z+dz} = b^{z}$. Umgekehrt, wenn b^{z} ein continuum variabile ſeyn ſoll, ſo muß $b^{dz} = + 1$, folglich das Elementarverhältniß poſitiv ſeyn; es müſſen alſo wiederum **alle** poſitive Zahlen mögliche und alle **negative** Zahlen unmögliche Logarithmen haben. Es muß auch dieſe Folge richtig ſeyn: Wenn **alle** poſitive Zahlen mögliche Logarithmen haben ſollen, ſo muß $b^{dz} = + 1$ ſeyn, und es darf nicht $b^{dz} = - 1$ geſetzt werden, weil ſonſt nicht **alle** poſitive Zahlen mögliche Logarithmen behalten würden. Man ſetzt in allen algebraiſchen Rechnungen $b^{0} = + 1$, und das bisherige rechtfertiget dieſe Vorausſetzung. Zugleich aber erhellet, daß $b^{0} = + 1$ ſetzen, ſo viel heiße, als ein Logarithmenſyſtem beſtimmen, worinn **alle** poſitive Zahlen mögliche und **alle** negative Zahlen, unmögliche Logarithmen haben. Wenn ich nun hievon die Anwendung mache auf die Art, wie die Logarithmen in den gewöhnlichen Syſtemen berechnet werden; ſo beweiſen alle Umſtände, daß der im 24 §. behauptete Satz weiter gar keinen Zweifeln unterworfen ſey. Wenn man im 15 §. $(1 + A)^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}(1 + A - \frac{1}{2}A^{n} + \frac{1}{3}A^{3} -$ &c.) ſetzt, ſo iſt offenbar, daß man $(1 + A)^{\frac{1}{m}}$ poſitiv nehme, weil ſonſt alle Glieder dieſer Reihe die entgegengeſetzten Zeichen haben müßten. Man ſetze $(1 + A)^{\frac{1}{m}} = (1 + w)$, da man ſonſt auch $(1 + A)^{\frac{1}{m}} = (- 1 + w)$ nehmen könnte, wenn *m*, wie hier vorausgeſetzt wird, eine ſehr große Zahl iſt, die eigentlich, wenn im §. 15. alles in der Schärfe richtig ſeyn ſoll, unendlich groß ſeyn muß. Iſt nun, wie §. 31. auch n unendlich groß, und $\frac{n}{m} = x$, ſo wird $(1 + A)^z = (1 + w)^n$, und wenn $1 + A$ die Baſis der natürlichen Logarithmen iſt, (§. 18.) ſo wird $(1 + A)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m}$, alſo $w = \frac{1}{m}$, und $(1 + A)^z = (1 + \frac{1}{m})^{mz}$, weil $n = mz$, oder auch $(1 + A)^z = (1 + \frac{z}{m})^m$, daß alſo $1 + A = (1 + \frac{1}{m})^m$. Man ſetze $1 + A = e$, ſo iſt $e = (1 + \frac{1}{m})^m$, und $e^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m}$, daß man alſo $e^{\frac{1}{m}} : +1 = 1 + \frac{1}{m} : +1$, folglich das Elementarverhältniß poſitiv nimmt. Dieſemnach iſt vermöge dieſer Vorausſetzung e^z ein variabile *continuum*, und jede poſitive Größe e^z hat den Logarithmum x, jede negative Größe aber einen unmöglichen Logarithmum, weil es gänzlich unmöglich iſt, aus dem Elementarverhältniß $+e^{\frac{1}{m}} : +1$ ein negatives zuſammen zu ſetzen. Hiedurch wird zugleich Hrn. Eulers im 3 §. angeführte Erklärung der natürlichen Logarithmen gegen Hrn. d'Alenberts Erinnerungen vertheidiget. Es wird nämlich nothwendig $l\,e^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}$, oder $l\,1 + w = w$, ſo daß $l(1 + w)^n = nw = x$ ſeyn muß.

§. 33.

Die beyden Gründe des Hrn. d'Alenbert, welche ich im 21 und 23 §. beurtheilet habe, ſind diejenigen ſeiner Beweiſe, die von ihm raiſons purement métaphyſiques genannt werden. Ehe er dieſe beyden Gründe vorträgt, ſchickt er eine allgemeine Betrachtung voran, die er zwar für keinen eigentlichen Beweis ausgiebt, die aber dennoch dazu dienen ſoll, ſeine Meynung einigermaßen wahrſcheinlich zu machen. Sie iſt dieſe, wenn x eine algebraiſche Function von y iſt, und zwar ſo, daß jedem Werth von y nur ein Werth von x zugehört, ſo muß in dieſer Function die Größe y unter keinem Wurzelzeichen enthalten ſeyn, ſo einen geraden Exponenten hat. Sodann aber wird x nicht unmöglich, wenn y negativ iſt. Aber wenn $x = ly$, ſo ſetzt man nach Leibnitzens Lehre voraus, jedem gehöre nur ein Werth von x zu. Demnach ſey $x = \infty$ für $y = \infty$, $x = -\infty$ für $y = o$, x unmöglich, wenn y negativ. Nun könne man zwar von der Beſchaffenheit algebraiſcher Functionen, auf die Beſchaffenheit der Tranſcendenten nicht ſchlechthin ſchließen. Allein es ſey doch viel natürlicher, bey der Aehnlichkeit zu bleiben, und anzunehmen, daß wenn y negativ ſey, auch x möglich bleibe, und negativ abnehme, ſo daß beyde Reihen dieſe werden.

$$y = -\infty \;.\,.\,.\,.\; -3 -2 -1 -\tfrac{1}{2} \;.\,.\; -\tfrac{1}{n}\; 0 \;.\,.\,.\; +\tfrac{1}{n} \;.\,.\; +\tfrac{1}{2} +1 +2 +3 \;.\,.\; +\infty,$$
$$x = +\infty \;.\,.\,.\,.\; +q +p\; 0 -p \;.\,.\; -r \;.\,.\; -\infty- \;.\; -r \;.\,.\; -p\; 0 +p +q \;.\,.\; +\infty,$$

Hiebey muß ich folgendes erinnern. Geſetzt, daß man dieſe Aehnlichkeit beyzubehalten berechtiget wäre, ſo würde doch das nicht ſo ſchlechterdings folgen, was Herr d'Alenbert daraus ſchließt, daß es nämlich wahrſcheinlich ſey, man müſſe $l + a = l - a$ nehmen. Man könnte eben ſo gut auch daraus ſchließen, daß $l - a = -l + a$ genommen werden müſſe. Es iſt bekannt, wenn eine veränderliche Größe poſitiv genommen, bis zu $+\infty$ wächst, und ihre folgenden Werthe möglich bleiben, daß dieſe nicht nothwendig poſitiv ſind, ſondern negativ ſeyn können, und umgekehrt, wenn dieſe Größe negativ genommen, bis zu $-\infty$ wächst, daß ihre folgenden Werthe, wenn ſie möglich bleiben, nicht nothwendig negativ bleiben, ſondern auch poſitiv werden können. Die Reihen könnten demnach auch ſo ausſehen:

$$y = -\infty \;.\,.\,.\; -3 -2 -1 -\tfrac{1}{2} -\tfrac{1}{n} \;.\,.\,.\; 0 \;.\,.\,.\; +\tfrac{1}{n} \;.\; r\,\tfrac{1}{2} +1 +2 +3 \;.\,.\,.\; +\infty.$$
$$x = -\infty \;.\,.\,.\; -q -p\; 0 +p \;;\; +r -\infty \;.\,.\,.\; -r \;.\,.\; -p\; 0\; p\; q \;.\,.\,.\; +\infty.$$

Wäre alſo $\log. + 2 = +p$, ſo könnte auch $\log. - 2 = -p$ ſeyn, wodurch alſo dieſer Grund ſein ganzes Gewicht verlieret.

§. 34.

Ich würde nunmehro auch diejenigen Beweiſe des Herrn d'Alembert, welche er preuves géométriques nennet, prüfen, wenn nicht dieſe Abhandlung ohnedem ſchon ziemlich weitläuftig gerathen wäre. Es läßt ſich dasjenige, was ich von dieſen verneinten Beweiſen zu ſagen habe, nicht wohl ins Kurze zuſammen ziehen. Die Lehren, worauf bey dieſer Beurtheilung alles ankommen wird, ſind in den gewöhnlichen Lehrbüchern eben nicht mit derjenigen Vollſtändigkeit auseinander geſetzt, daß ich nicht Gelegenheit haben ſollte, manches in ein beſſeres Licht zu ſetzen. Aus dieſer Urſache beſchließe ich hiemit die erſte Abtheilung, und werde in der zweyten alles dasjenige zu widerlegen bemühet ſeyn, was mit irgend einem Schein gegen die bisherige Lehre eingewandt werden kann. Es wird ſich bald finden, wenn man alles nur genau erwägen will, daß die Geometrie der Meynung des Hrn. von Leibnitz keinesweges entgegen ſey, ſondern ſie vielmehr vollkommen beſtätige.

Zweyte Abtheilung.

§. 1.

Die Geometrie ſtimmet in allen Stücken ſo unvergleichlich mit der Analyſi überein, daß die allgemeinen Lehren der letztern Wiſſenſchaft, wenn man ſie auf die Geometrie anwendet, oft dadurch allererſt in ihr völliges Licht geſetzt werden. Es iſt dieß eine Wahrheit, die kein Kunſtverſtändiger bezweifelt. Inzwiſchen iſt ſo viel gewiß, daß man bey der Anwendung der Analyſis auf die Geometrie, in manchen Fällen behutſam verfahren müſſe, indem die allgemeinen analytiſchen Sätze zum Theil etwas unbeſtimmt lauten. Man hat oft, um der Bequemlichkeit willen die Ausdrücke verkürzt, und daher können ſie in der Anwendung leicht zu Fehlſchlüſſen Gelegenheit geben, wenn man gewiſſe nothwendige Einſchränkungen dabey aus der Acht läßt. Wäre dieß in der Lehre von den Logarithmen nicht geſchehen, ſo würde Niemand auf die Gedanken gekommen ſeyn, daß man durch geometriſche Conſtructionen für die negativen Größen mögliche Logarithmen herausbringen könne, wenn nämlich die Streitfrage in dem Sinn genommen wird, den ich in der erſten Abtheilung dieſer Abhandlung feſtgeſetzt habe. Es iſt ein bekannter Satz in der Lehre von den Kegelſchnitten, daß die, zwiſchen den Aeſten der Hyperbel, und ihren Aſymtoten enthaltenen Trapezien, oder auch die ihnen gleichen Sectoren, ſich wie die Logarithmen der ihnen zugehörigen Abſciſſen verhalten, wenn man dieſe vom Mittelpunct rechnet. Man hat geglaubt, daß dieſe hyperboliſchen Flächen möglich bleiben, wenn die zugehörigen Abſciſſen negativ werden, und davon auf die Möglichkeit der Logarithmen negativer Größen den Schluß gemacht. Dieß iſt von Herrn Bernoulli, dieß iſt auch von Herrn d'Alenbert geſchehen: ja letzterer glaubt dieſem Beweiſe erſtlich ſeine rechte Evidenz gegeben zu haben.

§. 2.

Es ſey $OPVGpF$ (8 Fig.) die gleichſeitige Hyperbel, OG und KZ ihre Aſymtoten, ferner $AN = y$; ſo iſt $PN = \frac{1}{y}$, wenn die Potenz der Hyperbel $= 1$ iſt, und die Ordinaten PN mit der Aſymtote OG Parallel gezogen werden. Iſt nun RS eine andere Ordinate, ſo iſt eigentlich $NPSR$ dem Logarithmen des Verhältniſſes $\frac{AR}{AN}$ proportional, und in dem Fall, wenn $AN = 1$, iſt es eine bloße Verkürzung des Ausdruckes, wenn man ſagt, es ſey

NPSR der Logarithme der Abſciſſe AR. (1 Abtheil. §. 13.) Man muß eigentlich ſagen; jedes Trapezium der Hyperbel, ſo zwiſchen zweyen mit der einen Aſymtote parallelen Ordinaten fällt, ſey der Logarithme des Verhältniſſes der dieſen Ordinaten auf der andern Aſymtote zugehörigen Abſciſſen: Das unbeſtimmte Integral $\int \frac{dy}{y} + C$ kann bekanntermaßen ein Trapezium zwiſchen jeden zweyen parallelen Ordinaten ausdrücken, und es werden zwey Beſtimmungen erfordert, wenn man in jedem beſondern Fall wiſſen will, welches das Trapezium ſey, ſo dieſes Integral ausdrückt. Die eine Beſtimmung erhält man dadurch, daß man die beſtändige Größe C beſtimmt, indem hiedurch feſtgeſetzt wird, welches die Ordinate ſeyn ſoll, von welcher die quadrirte Fläche ihren Anfang nimmt: Die andere Beſtimmung kömmt hinzu, wenn man für y einen beſtimmten Werth ſetzet; hiedurch beſtimmt man die Ordinate, wo die quadrirte Fläche aufhört. Wenn nun AN $= 1$ iſt, ſo iſt die gewöhnliche Vorausſetzung dieſe, die Fläche ſoll von PN an gerechnet werden, oder das Integral ſoll $= 0$ ſeyn, wenn $y = 1$ iſt. Dieß giebt $ly + C = 0$, alſo $C = - l\,1$, und dann wird das Integral $= ly - l\,1 = l\frac{y}{1} = ly$. Wenn demnach $y = AR$ geſetzt wird; ſo iſt $NPSR = l\frac{AR}{NA} = l\,AR$, weil $AN = 1$. Man ſetze dieſe Fläche, welche durch Beſtimmung der beſtändigen Größe in ſoferne beſtimmt iſt, daß ſie von PN ihren Anfang nehmen ſoll, überhaupt $= S$; ſo iſt $S = ly$. Will man nun aus dieſer Gleichung alle die Werthe von S folgern, welche allen möglichen, ſowohl poſitiven, als negativen Werthen von y zugehören; ſo iſt unumgänglich nothwendig, daß man den Ausdruck ly nach ſeinem ganzen Umfang ſchon kenne, und wiſſe, was er bedeutet, man mag ſtatt y ſetzen, was man wolle. Sonſt lauft man Gefahr, daß man das ſchon vorausſetze, was erſtlich erwieſen werden ſoll. Da nun hierüber der Streit entſtand, ſo fieng man an, die Sache umzukehren, und aus den Werthen von S auf die Werthe von ly zu ſchließen. Man meynte, die Fläche S bleibe möglich für negative y, alſo müſſe auch $l-y$ möglich bleiben. Herr Bernoulli glaubte, die Sache laſſe ſich am beſten aus der Differentialgleichung beurtheilen. Es ſey nämlich $dS=\frac{dy}{y}$; wenn man nun $-y$ ſtatt y nehme, ſo erhalte man $dS=\frac{-dy}{-y}=\frac{dy}{y}$, und alſo wiederum $S=l-y=l+y$. Folglich gehöre gleichen und entgegengeſetzten y eine gleiche Fläche S zu. Hiedurch beweist Hr. Bernoulli ganz richtig, daß zu gleichen und entgegengeſetzten z einerley **Differential der Fläche** S gehöre; und es folgt alſo richtig daraus, daß die Differentiallinien der Logarithmen negativer Größen möglich ſeyn, welches Niemand läugnet. Aber die Differentialgleichung iſt ganz unbeſtimmt, die Integralgleichung enthält ſchon eine Beſtimmung mehr, wenn die beſtändige Größe beſtimmt iſt, und dieſe Beſtimmungen ſind es eben, worauf hier alles ankommt. Es iſt wahr, für negative y iſt $dS=\frac{-dy}{-y}$, aber hieraus folget durch die Integration $S=l-y+C$. Soll nun S noch von eben der Ordinate angerechnet werden, wie vorhin, ſo muß dieß Integral $=0$ werden für $y=+1$ und es wird alſo nun $C=-l+1$, und $S=l-y-l+1=l\frac{-y}{+1}=l-y$, aber keinesweges $=l+y$. Wenn demnach $y=-Ar$, ſo bedeutet dieß S, die zwiſchen PN und rs enthaltene Fläche, wie es der erſten Vorausſetzung gemäß iſt. Will man im Gegentheil, in dem Integral $S=\int\frac{-dy}{-y}+C$ die beſtändige Größe ſo beſtimmen, daß dieß Integral $=0$ werde für $y=-1=-An$, ſo erhält man $C=-l-1$, und $S=l-y-l-1=l\frac{-y}{-y}=l+y$. Aber nun bedeutet dieß S die Fläche, $npsr$, und keinesweges die vorige, welche zwiſchen PN und rs enthalten war. Hiemit wird alſo bewieſen, daß $l\frac{-Ar}{-An}=l\frac{+AR}{+AN}$ ſey; und dieß läugnet Niemand (Abtheil. §. 21.) Ueberhaupt erhellet hieraus, daß es nicht einerley ſey, wenn man fragt: ob von der Aſymtot *OG* an gerechnet ſich auf beyden Seiten, von A nach Z und von A nach K hin, ſo weit man will, mögliche Flächen erſtrecken? und wenn man ſo fragt: ob ſich von einer gegebenen Ordinate *PN* an gerechnet, auf beyden Seiten von N nach Z und von N nach K hin, ſo weit man will, mögliche Flächen erſtrecken? Die erſte Frage muß man bejahen; daß aber die andere zu verneinen ſey, wird die Folge beweiſen.

§. 3.

Herr d'Alenbert hält dieſen Beweis des Herrn Bernoulli zwar an ſich für richtig, glaubt aber, er könne noch verbeſſert werden, ſo daß die Sache dadurch außer allen Zweifel geſetzt werde. In ſolcher Abſicht trägt er ihn auf der 188 S. der Opuſcules, in einer allgemeinern Form vor. Da Hr. d'Alenbert dieſen Beweis für entſcheidend hält, und in der Folge ſich allemal darauf wieder bezieht, ſo werde ich ihn nach allen Puncten genau prüfen müſſen. In dieſer Abſicht wird es am beſten ſeyn, wenn ich denſelben zuförderſt mit des Herrn Verfaſſers eigenen Worten ganz herſetze.

Suppoſons en géneral $dx = \frac{a^n dy}{y^n}$, *n* êtant un nombre entier poſitif impair, il eſt certain qu'on pourra conſtruire la courbe à laquelle cette équation appartient. Il faut d'abord tracer les hyperboles OPV, GTK, dans les quelles l'abſciſſe AN $= y$, & l'ordonnée PN $= \frac{a^n}{y^n}$; il faut enſuite chercher l'aire $\int \frac{a^n dy}{y^n}$ repondante à une abſciſſe quelconque AR, en ſuppoſant, que cette aire ſoit $= 0$, lorsque $y =$ AN; la courbe, dont les ordonnées ſeront proportionelles à ces aires ſera la courbe cherchée. Or l'on trouvera facilement, qu'à une abſciſſe quelconque y, poſitive ou negative, il repond la meme valeur de l'aire. Car ſoit

An = AN & Ar = AR; l'aire repondante à l'abſciſſe Ar ſera NPoA + AnpG + npſr. Or les aires AnpG, npſr étant negatives par rapport à l'aire NPOA, qui eſt negative elle meme par rapport à l'aire NPSR; il s'enſuit que l'aire repondante à l'abſciſſe negative Ar, c'eſt a dire, l'ordonnée x repondante à cette abſciſſe, équivaut à la quantitè ſuivante — NPOA + NPOA + NPSR = NPSR; d'ou il s'enſuit, qu'à deux valeurs de y égales & de differens ſignes, il répond une même valeur de x. Donc toute courbe, dans laquelle dx = $\frac{a^n dy}{y^n}$, *n* etant un nombre impair quelconque, a deux branches égales, ſemblables & ſemblablement ſituées de part & d'autre de la ligne de x. Il eſt vrai, que dans le cas de n = 1 l'integration n'a pas lieu. Mais la methode, que nous venons de donner pour conſtruire la courbe dx = $\frac{a^n dy}{y^n}$, par la quadrature d'une hyperbole, dont les ordonnées ſoient = $\frac{a^n}{y^n}$, léve toute difficulté. Car l'hyperbole ordinaire, dont les ordonnées ſont $\frac{a}{y}$, eſt préciſément dans le même cas, que les autres; & il eſt impoſſible de rien établir ſur les aires repondantes aux abſciſſes de celles ci, qui ne convienne également a l'hyperbole ordinaire.

§. 4.

Herr d'Alenbert nimmt hier, wie es ſcheinet, ganz richtig an, daß vermöge der Vorausſetzung, nach welcher bey der Integration die beſtändige Größe beſtimmt werden ſoll, die der Abſciſſe $y = Ar$ zugehörige Fläche ſich von der Ordinate PN bis zur Ordinate rv erſtrecken müſſe. Er ſagt nämlich dieſe Fläche müſſe = NPOA + A*np*G + *npsr* ſeyn. Hiergegen habe ich noch nichts zu erinnern. Zwar kommen Fälle vor, welche dieſer Vorausſetzung ihre Gränzen ſetzen, und in der That findet ein ſolcher Fall hier in gewiſſer Abſicht Statt. Inzwiſchen muß ich dieſe

Betrachtung noch ausſetzen, und bloß dem Herrn d'Alenbert in ſeinen Schlüſſen folgen. Dieſe hängen nun eigentlich ſo zuſammen, wenigſtens bin ich nicht im Stande, einen andern Sinn, als dieſen herauszubringen, ob ich gleich noch immer zweifle, daß Hr. d'Alenbert im Ernſt ſo habe ſchließen können. Es iſt die ganze Fläche zwiſchen AG und sr der Fläche $NPOA$ entgegen geſetzt. Aber $NPOA$ iſt negativ in Abſicht auf $NPSR$. Was einer negativen Größe entgegen geſetzt iſt, muß poſitiv ſeyn; alſo iſt die ganze Fläche $AGsr = AnpG + npsr$ poſitiv. Da nun $NPOA$ für ſich $= AnpG$ und $npsr$ für ſich $= NPSR$, ſo iſt die zwiſchen PN und rs enthaltene Fläche $= - NPOA + NPOA + npsr = npsr = NPSR$. Aber wenn das richtig ſchließen heißt, ſo laſſen ſich die ſonderbarſten Sätze von der Welt demonſtriren. Läßt ſich nicht auf eben die Art darthun, daß die Abſciſſe $Nr = + NR$ ſey? Es iſt Ar negativ gegen AN, und NA negativ gegen NR. Weil alſo Ar der negativen Größe AN entgegen geſetzt iſt; ſo iſt Ar poſitiv, und $Nr = - NA + An + nr = - NA + AN + nr = nr = NR$. Alſo hätte Hr. d'Alenbert erwieſen, daß einer poſitiven Abſciſſe, die $= NR$ iſt, eine mögliche Fläche $= NPRS$ zugehöre, und er wollte doch beweiſen, daß ſie zu einer negativen Abſciſſe gehöre. Der Satz; eine Größe, die einer negativen entgegen geſetzt iſt, iſt poſitiv, gilt natürlicher Weiſe nur, wenn beyde ſich auf eben dieſelbe Gränze beziehen. Soll N die Gränze ſeyn, welche die poſitiven Abſciſſen NR von den negativen Nr abſondert, und man ſoll nun eine Abſciſſe nehmen die NA entgegen geſetzt iſt; ſo muß man ſie von dem Punct N an rechnen, und dann fällt ſie freylich auf der poſitiven Seite NZ. Und ob man gleich in einem richtigen Sinn ſagen kann, es ſey $AN = An$, wenn ſtatt N nunmehro A für den Anfangspunct genommen wird; ſo wird doch wohl Niemand, wenn die Frage iſt, wie groß die Linie Nr ſey? im Ernſt antworten, es ſey $Nr = - AN + AN + nr$

$= nr$: Das hieße ja behaupten, ein Theil ſey dem ganzen gleich. Wenn man die algebraiſchen Zeichen und Redensarten, welche ſonſt bey entgegen geſetzten Größen gewöhnlich ſind, hier richtig anwenden will, ſo muß man vielmehr ſagen, es ſey $Nr = nr + An - (-An) = nr + An + An = nr + An + AN$. Es iſt nämlich Nr nicht die algebraiſche Summe, ſondern die algebraiſche Differenz von Ar und $-AN$. Wenn alſo gleich alles übrige in den vorigen Schlüſſen ſeine Richtigkeit hätte; wenn man gleich in einem richtigen Verſtande ſagen könnte, es ſey $NPOA = -AnpG$, ſo würde man doch ſagen müſſen, es ſey die zwiſchen NP und sr enthaltene Fläche $= npsr + AnpG - (-NPOA) = npsr + AnpG + NPOA$.

§. 5.

Ueberdem aber iſt auch dieß eine falſche Vorausſetzung, daß die Fläche NPOA der Fläche AnpG entgegen geſetzt ſey, ob es gleich ſeine Richtigkeit hat, daß NPOA der Fläche NPSR entgegen geſetzt iſt, wenn PN die Grenze iſt, von welcher man die Flächen anrechnet. Zwar ſind die Ordinaten, welche unter der Abſciſſenlinie einer krummen Linie fallen, denjenigen entgegen geſetzt, welche über der Abſciſſenlinie ſtehen. Aber hievon kann man keinen Schluß machen, auf das Zeichen, welches der Ausdruck der Fläche vor ſich haben muß. Dieß kann + oder — ſeyn, die Fläche mag über oder unter der Axe liegen. Man muß ſich nämlich von der Art und Weiſe, wie eine poſitive geometriſche Größe negativ wird, folgende Vorſtellung machen. Jede geometriſche Größe iſt zwiſchen gewiſſen Gränzen eingeſchloſſen, und nachdem ſich dieſe Gränzen erweitern, oder verengern, nimmt die Größe zu, oder ab. Eine grade Linie hat derſelben nur zwo, nämlich den Anfangs- und Endepunct (9. Fig.). Iſt ihr Anfangspunct O beſtimmt und der Abſtand des Endepuncts B von demſelben, ſo iſt ihre Größe beſtimmt: Es kann aber bey dem allen der Endpunct ſowohl auf der einen als der andern Seite des Anfangspuncts C liegen. Geſetzt B liegt oberhalb des Puncts C, ſo wird CB kleiner, wenn B gegen C rückt, und größer, wenn B ſich von C entfernet. Sobald aber B unterhalb C irgendwo in *b* fällt, wird C*b* negativ, nämlich gegen C*B*: es ſey nun, daß B durch c nach *b* hinrückt, oder daß die Conſtruction, welche den Ort des Puncts B beſtimmt, auf andere Art ergiebt, daß *b* unter C fallen müſſe. Hier iſt alſo **ein Punct** die Gränze, welche das Negative von dem Poſitiven unterſcheidet. Der Ort dieſes Puncts kann unbeſtimmt ſeyn, ſo daß z. E. eine grade Linie gegeben iſt, worinn er liegen ſoll, wie AD: und dieß iſt der Fall bey den krummen Linien, wenn AD die Axe der Abſciſſen, CB aber eine Ordinate iſt. Mit den ebenen Figuren iſt es ſchon anders bewandt. Ihre Grenzen ſind Linien, und es hat dabey eine große Mannigfaltigkeit Statt. Eine ebene Figur kann durch die Erweiterung oder Verengerung ihrer Gränzen auf mannigfaltige Art wachſen, oder abnehmen. Es können alle ihre Gränzen ſich nach allen Seiten erweitern, oder umgekehrt verengern, wie wenn der Halbmeſſer eines Kreiſes größer oder kleiner würde, oder wenn in einem Parallelogramm ſich jede zwo entgegen geſetzte Seiten von einander entfernten. Es kann aber auch ſeyn, daß nach dieſer oder jener Seite die Gränzen ſich nicht ändern, da dieß gegentheils nach andern Seiten erfolget; ſo können zwo entgegen geſetzte Seiten eines Parallelogramms ſich von einander entfernen, indem die beyden übrigen ihre Lage unverändert behalten. Es kann der Winkel am Mittelpunct im Ausſchnitt eines Cirkels wachſen oder abnehmen, ohne daß ſich der Halbmeſſer ändert, u. ſ. f. Wenn man die Quadratur einer Linie ſucht, deren Natur durch eine Gleichung für parallele Ordinaten ausgedrückt iſt, ſo ſetzt man voraus, daß die Fläche, deren Größe man finden will, zwiſchen zweyen von den parallelen Ordinaten, wie PN, RS, (8 Fig.) und denjenigen Stücken der Axe, und der zu quadrirenden Linie ſelbſt, die zwiſchen dieſen parallelen Ordinaten fallen, wie NR, PS, enthalten ſey. Durch die Integration bringt man einen noch ganz unbeſtimmten Ausdruck für dieſe Fläche heraus, der ein Stück derſelben zwiſchen jeden zweyen parallelen Ordinaten bedeuten kann. Von dieſen parallelen Ordinaten wird die eine durch Hinzuſetzung der beſtändigen Größe beſtimmt, z. E. PN, und nunmehro drückt das Integral das Geſetz aus, nach welchem ſich die Größe der Fläche ändert, wenn die zweyte Ordinate RS von der erſten entweder weiter fortrückt, oder ſich derſelben nähert, und es muß die Gränze, welche die poſitiven Werthe der Fläche von den negativen unterſcheidet, eine von den Ordinaten der krummen Linie ſeyn. Sie iſt alſo entweder PN ſelbſt, oder doch wenigſtens eine Linie, die mit PN parallel liegt, wenn etwa das Integral eine ſolche Function iſt, die noch für andere Werthe, als $x = AN$ verſchwindet. Deswegen kann es nie die Axe der Abſciſſen ſeyn, (es ſey dann, daß man die Coordinaten verwechſelt, wie ſich von ſelbſt verſtehet) und der Umſtand, ob die quadrirte Fläche unter oder über der Abſciſſenlinie liege, kann die Frage, ob ſie poſitiv oder negativ ſey? gar nicht entſcheiden.

§. 6.

Hat nun dieſes alles ſeine Richtigkeit; ſo bin ich berechtiget zu behaupten, es ſey von Hrn. d'Alenbert keinesweges bewieſen, daß der Abſciſſe Ar die Fläche $nprs = NPRS$ zugehöre. Wenn inzwiſchen der Beweis eines Satzes fehlerhaft iſt, ſo folgt daraus die Falſchheit des Satzes ſelbſt noch nicht. Es kann ſeyn, daß der Satz ſelbſt aus andern Gründen ſich richtig herleiten laſſe. Und in der That hat es mit dem eben genannten Satz dieſe Bewandtniß. Nur muß dieſer Satz richtig verſtanden werden. Ich ſage nicht, die zwiſchen den Ordinaten PN und rs enthaltene Fläche ſey $= npsr$, dieß wäre offenbar ungereimt. Ich ſage vielmehr ſo: die der Abſciſſe $y = - Ar$ in der Integralgleichung $\int \frac{a^n dy}{y^n} + C$ zugehörige Fläche, ſey $= npsr$; oder mit andern Worten: wenn man in dem Ausdruck $\int \frac{a^n dy}{y^n}$ die Abſciſſe $y = - Ar$ ſetzt, ſo drückt dieſe Formul **nicht die Fläche zwiſchen** PN und rs, ſondern $npsr$ aus. Dieß ergiebt ſich ſogleich, wenn man die Integration ſelbſt vornimmt, und wenn Hr. d'Alenbert ſeinem Beweiſe dieſe Wendung gegeben hätte, ſo würde er dadurch ſehr gewonnen haben, obgleich der Hauptſatz, welcher eigentlich erwieſen werden ſoll, doch daraus nicht folget. Vieleicht hat Hr. d'Alenbert in der That aus dieſer Integralformul geſchloſſen, und ſeine Schlüſſe nur nicht vollſtändig entwickelt. Er hat es dem Leſer überlaſſen, die ausgelaſſenen Zwiſchenſätze ſelbſt zu ergänzen. Ich werde aus dieſer Urſache dieſe Integration, nebſt ihren Folgen vollſtändig auseinander ſetzen, und bemühet ſeyn, dem Beweiſe des Hrn. d'Alenberts alle Stärke zu geben, deren er fähig iſt. Damit ich nicht genöthiget ſey, in der Folge allemal zu erinnern, daß in der Gleichung $PN = \frac{a^n}{y^n}$ die Zahl n eine ungerade Zahl ſeyn ſoll, will ich $2m+1$ ſtatt n ſchreiben, da dann a eigentlich den Exponenten $2m+2$ haben muß, wenn die Abmeſſungen auf beyden Seiten gleich ſeyn ſollen. Es wird alſo die Gleichung für die Hyperbel OPVGpF (8 Fig.) eigentlich dieſe: $= \frac{a^{m+1}}{y^{m+1}}$, wenn man PN $= x$ ſagt, und AN $= y$. Die Integration giebt, $\int \frac{a^{2m+2}}{y^{2m+1}} dy = C - \frac{a^{2m+2}}{2m y^{2m}}$. Weil dieß Integral $= 0$ ſeyn ſoll, wenn $y =$ AN iſt, welche Linie ich $= b$ ſetzen will; ſo wird $\int \frac{a^{2m+2}}{y^{2m+1}} dy = \frac{a^{2m+2}}{2m b^{2m}} - \frac{a^{2m+2}}{2m y^{2m}} = \frac{a^{2m+2}}{2m} \left(\frac{1}{b^{2m}} - \frac{1}{y^{2m}}\right)$. Setzt man nun, um die Gleichheit der Abmeſſungen zu erhalten, $ax = \frac{a^{2m+2}}{2m} \left(\frac{1}{b^m} - \frac{1}{y^{2m}}\right)$, ſo wird die Gleichung der Quadratricis dieſe: $x = \frac{a^{2m+1}}{2m} \left(\frac{1}{b^{2m}} - \frac{1}{y^{2m}}\right)$.

§. 7.

Da der veränderliche Theil dieſes Integrals abnimmt, wenn y wächst, ſo wächst das Integral ſelbſt mit y, ſo lange $y > b$ iſt, und drückt dieſemnach die Fläche NPSR aus. Für $y = b$ iſt das Integral $= 0$, wie vorausgeſetzt worden; aber für $y < b$ wird es negativ, und wächst bis $y = 0$ wird, da es negativ unendlich iſt. Zwiſchen den Gränzen $y = b$ und $y = 0$ drückt es alſo die Fläche NPML aus, für $y = AL$. Wird y negativ, ſo bleibt dieß Integral Anfangs noch negativ, ſo lange nämlich $-y < -b$ iſt, aber es nimmt ab, wenn y wächst. Nimmt man demnach $y = -Al$, und den Punct l zwiſchen A und n, ſo daß lm die der Abſciſſe $-Al$ zugehörige Ordinate iſt; ſo würde es ungereimt ſeyn zu ſagen, daß das Integral noch die zwiſchen PN und lm enthaltene Fläche ausdrücke, da es offenbar iſt, daß dieſe mit $-Al$ wachſen müſſe. Dieſemnach muß die Fläche, welche jetzt das Integral ausdrückt, auf der andern Seite der Ordinate lm liegen, und ſie iſt keine andere als $lnpm$, weil für $y = -An = -b$ das Integral abermal $= 0$ wird. Wächst endlich $-y$ über $-b$ hinaus, ſo wird das Integral wieder poſitiv, und wächst mit $-y$, da es dann die Fläche $nprs$ ausdrückt. Vermöge dieſer Rechnung muß man alſo ſo viel zugeben, daß in allen Hyperbeln, welche die Gleichung $= \frac{a^{2m+2}}{y^{2m+1}}$ ausdrückt, den negativen Abſciſſen mögliche, und eben ſo große Flächen, als den ihnen gleichen und entgegengeſetzten poſitiven Abſciſſen zugehören. Nur in dem Fall, da $m = 0$, oder die Hyperbel die Apollonianiſche iſt, könnte es zweifelhaft ſeyn, weil man in dieſem Fall aus der Integralformul $\frac{a^1}{0}\left(\frac{1}{b^0} - \frac{1}{y^0}\right)$ ſo unmittelbar nichts ſchließen kann. Hr. d'Alenbert ſelbſt iſt genöthiget dieſes einzugeſtehen. Il eſt vrai (ſagt er) que dans le cas de $n = 1$ l'integration n'a nas lieu. Allein eben deswegen ſetzt er einen Grund hinzu, der nach ſeiner Meynung überzeugend darthun ſoll, daß alles Vorige noch für die apollonianiſche Hyperbel gelte. Er iſt in den Worten enthalten: L'hyperbole ordinaire eſt preciſément dans le même cas, que les autres, & il eſt impoſſible de rien établir ſur les aires repondantes aux abſciſſes de celles-ci, qui ne convienne également a l'hyperbole ordinaire. Ich weis nicht, ob dieß nicht eben daſſelbe iſt, was Hr. d'Alenbert doch erſt beweiſen wollte. Doch vielleicht hat Hr. d'Alenbert ſich auch hier nicht vollſtändig ausgedrückt, und dem Leſer überlaſſen, die ausgelaſſenen Zwiſchenſätze zu ergänzen. Vermuthlich ſind die Schlüſſe, welche Hr. d'Alenbert hier im Sinne gehabt hat, eigentlich folgende.

§. 8.

Wenn in der allgemeinen Gleichung $\int \frac{a^{2m+2}}{y^{2m+1}} dy = \frac{a^{2m+2}}{2m} \left(\frac{1}{b^{2m}} - \frac{1}{y^{2m}}\right)$ nunmehro $m = 0$ geſetzt wird, ſo erhält man $\int \frac{a^2}{y} dy = \frac{a}{2 \times 0} \left(\frac{1}{b^{2 \times 0}} - \frac{1}{y^{2 \times 0}}\right) = \frac{a^2}{2 \times 0} \left(\frac{1}{(b^2)^0} - \frac{1}{(y^2)^0}\right.$. Weil nun $\frac{1}{(b^2)^0} = \frac{1}{(b^2)^0} = (b^2)^0$, und $\frac{1}{(y^2)^0} = \frac{1}{(y^2)^{-0}} = (y^2)^0$, ſo wird das Integral $= \frac{a^2}{2 \times 0} (b^{2 \times 0} - y^{2 \times 0})$; und weil $\frac{a^2}{2 \times 0} = \frac{a^2}{2 \times -0}$, ſo wird eben dieſes Integral auch $= \frac{a^2}{2 \times 0} (y_{2 \times 0} - b^{2 \times 0}) = \frac{a^2}{2 \times 0} (\left(\frac{y^2}{b^2}\right)^0 - 1) = \frac{1}{2} aa \frac{\left(\frac{yy}{bb}\right)^0 - 1}{0}$. Nun mag dieſe Formul für ſich bedeuten, was ſie wolle, ſo iſt doch ſo viel gewiß, daß ſie für gleiche und entgegengeſetzte y einerley gebe, eben ſo, wie der allgemeine Ausdruck, wenn m nicht $= 0$ iſt. Wofern die Schlüſſe des Hrn. d'Alenberts, wie ich glaube, ſo zuſammen hängen, ſo habe ich nichts weiter dagegen einzuwenden, vielmehr behaupte ich mit dem Hrn. d'Alenbert, que l'hyperbole ordinaire ſoit preciſément dans le même cas, que les autres. Es gehören nämlich nun in der apollonianiſchen Hyperbel gleichen und entgegengeſetzten Abſciſſen gleiche Flächen zu. So gehört die Fläche NPSR zur Abſciſſe + AR, und zur Abſciſſe $Ar = - AR$ gehört die Fläche $npsr = NPSR$. Aber eben dieß iſt dem Satz ſchnurſtracks entgegen, daß zur Abſciſſe Ar die zwiſchen PN und rs enthaltene Fläche gehöre. Und alſo läugne ich, daß Hr. d'Alenbert ferner ſo ſchließen könne; die den negativen Abſciſſen zugehörigen Flächen ſind die Logarithmen dieſer Abſciſſen; alſo ſind die Logarithmen negativer Größen möglich, weil jene Flächen möglich ſind. Der Satz: **Die den negativen Abſciſſen zugehörigen Flächen ſind die Logarithmen dieſer negativen Abſciſſen**, iſt zweydeutig. Er kann ſo viel heißen: jene Flächen ſind die Logarithmen der Verhältniſſe dieſer negativen Abſciſſen zur negativen Einheit, ſo daß zum E. $nprs = l\,\frac{Ar}{An} = l\,\frac{-AR}{-AN}$; und in dieſer Bedeutung iſt er richtig. Aber denn hat der Schlußſatz dieſen Sinn: **alſo ſind die Logarithmen der Verhältniſſe negativer Größen zur negativen Einheit** möglich. Dieß läugnet Niemand, und dieß war es nicht, was Hr. d'Alenbert beweiſen wollte. Es kann aber auch der vorhin genannte zweydeutige Satz dieſen Sinn haben: **Die den negativen Abſciſſen zugehörigen Flächen ſind die Logarithmen der Verhältniſſe dieſer negativen Abſciſſen zur poſitiven Einheit.** Wäre dieß der rechte Sinn, und wäre der Satz in dieſem Sinn genommen; ſo würde kein Zweifel übrig ſeyn, daß die Möglichkeit der Logarithmen der Verhältniſſe negativer Größen zur poſitiven Einheit nicht daraus folgen ſollte. Aber in dieſem Sinn genommen, iſt der Satz grundfalſch. Es iſt keineswegs $npsr$ der Logarithme des Verhältniſſes $\frac{Ar}{AN} = \frac{-AR}{+AN}$ ſondern vielmehr der Logarithme des Verhältniſſes $\frac{Ar}{An} = \frac{-AR}{-AN}$. Alſo ſchließt Hr. d'Alenbert entweder aus einem grundfalſchen Satz: oder ſein Beweis erhärtet auch nichts weiter, als was ſeine Gegner gerne zugeben, und worüber eigentlich nie iſt geſtritten worden.

§. 9.

§. 9.

Wenn ich behaupte, es ſey grundfalſch, daß $npsr$ der Logarithme des Verhältniſſes $\frac{Ar}{AN}$ ſey, ſo fürchte ich zwar im Ernſt keinen Zweifel dagegen: inzwiſchen könnte man vielleicht ſo ſchließen: bey der Integration iſt vorausgeſetzt worden, daß die Fläche von NP angerechnet werden ſolle; es mag alſo y bedeuten, was es wolle, ſo muß man die Fläche von dieſer Grenze anrechnen. Nun drückt für $y = Ar$ freylich das Integral nur eine Fläche $= nprs$ aus, aber das iſt eben ein Beweis, daß die beyden Flächen ANPO und $AnpG$ einander aufheben, und daß die zwiſchen PN und rs enthaltene Fläche $= - ANPO + AnpG + nprs = nprs$ ſey, und deswegen muß man einräumen, daß $nprs = l\frac{Ar}{AN}$ ſey. Wie geſagt, ich fürchte im Ernſt dieſe Einwendung nicht. Um inzwiſchen alles aus dem Wege zu räumen, was mit irgend einigem Schein eingewandt werden könnte, will ich auch hierauf antworten. Es iſt eine Sache, die man bey den Schriftſtellern in der Integralrechnung nicht eben allemal angemerkt findet, die aber für ſich leicht in die Augen fällt, daß die erſte Vorausſetzung, welche bey Beſtimmung der beſtändigen Größe angenommen worden, nicht allemal durch die ganze Fläche der Linie *ausſchließungsweiſe* beſtehen könne. Ich will ſo viel ſagen; wenn man annimmt, es ſoll das Integral für einen gewiſſen Werth von y (z. E. für $y = AN$) $= 0$ ſeyn, ſo folget hieraus nicht, daß eben das Integral nicht auch für andere Werthe von y verſchwinden könne. Die Function, welche man durch die Integration heraus bringt, kann aus mehrern möglichen einfachen Factoren beſtehen, und dann giebt es ſo viele mögliche Werthe der Abſciſſe, für welche das Integral verſchwindet, als mögliche Factoren da ſind. Dann aber kann das Integral nicht allemal die Fläche zwiſchen **jeden zweyen** parallelen Ordinaten ausdrücken, wenn man mit dem Integral auf die ſonſt gewöhnliche Art umgehet. Es giebt nämlich in ſolchen Fällen unter den Werthen des Integrals mehrere Maxima und Minima, als man Anfangs vorausgeſetzt hat. Wenn man annimmt, das Integral ſoll für $y = AN$ verſchwinden, ſo nimmt man ſtillſchweigends dabey an, es ſoll für größere y mit dieſem y beſtändig wachſen, und für kleinere y mit dieſen abnehmenden y auf die entgegengeſetzte Art beſtändig wachſen. (Zu den abnehmenden y gehören den auch die negativ wachſenden). Wäre dieß, ſo müßte das Integral nie mehr, als höchſtens ein Minimum und ein Maximum geben. Jenes würde der größte negative, und dieſes der größte poſitive Werth deſſelben ſeyn, wenn auf beyden Seiten von PN mögliche Flächen fielen. Aber das Integral giebt oft mehr Maxima und Minima, und ſodann muß man in jedem beſondern Fall mehreres zu Hülfe nehmen, wenn man beſtimmen will, welches Stück der zu quadrirenden Fläche für jeden beſtimmten Werth von y das Integral ausdrücken könne. Man muß hiebey zugleich in Betrachtung ziehen, daß zdy nicht allein das Differential der Fläche NPSR, ſondern zugleich auch das Differential derjenigen Fläche ſey, welche auf der andern Seite der Ordinate z, wie in dieſem Fall gegen VZ zuliegt. Aus allen dieſen Umſtänden zuſammen genommen, muß es ſich ergeben, welches Stück der Fläche das Integral für jeden Werth von y ausdrücke. Die letzte ſehr erhebliche Anmerkung hat Hr. Varignon ſchon in den memoires de l'Academie de Paris l'année 1706. gemacht, da er die von Hrn. Wallis ſogenannten **mehr als unendlichen Räume** beurtheilte. Das Integral drückt eigentlich nur im Allgemeinen das Geſetz aus, nach welchem ſich die Fläche ändert, wenn die Abſciſſe wächst, oder abnimmt. Die Abſciſſe aber mag wachſen, oder abnehmen, ſo iſt noch nicht beſtimmt, ob **die Fläche** wachſe oder abnehme.

Dieß letztere hängt noch von andern Umſtänden ab, und die Lage der Fläche gegen die veränderliche Ordinate, kann ſehr oft abwechſeln. Dieſemnach iſt es nicht einerley, wenn man fragt: wie groß iſt die Fläche, welche zwiſchen zweyen gegebenen Ordinaten liegt? und wenn man ſo fragt: welches iſt die Fläche, welche die Integralformul für einen gegebenen Werth der Abſciſſe ausdrückt? Es iſt alſo etwas anders, wenn man fragt: wie groß iſt die Fläche zwiſchen den beyden Ordinaten, die durch die Endpuncte der Abſciſſen AN und Ar durchgehen; und wenn man ſo fragt: welches iſt dasjenige Stück der Fläche, ſo die Integralformul ausdrückt, wenn man die Abſciſſe = Ar ſetzte.

§. 10.

Daß eine ſolche Abwechſelung von der Lage der quadrirten Fläche gar nicht ungewöhnlich ſey, und daß das Integral, ſo man auf die gewöhnliche Art heraus bringt, nicht allemal diejenige Fläche ausdrücke, die es nach der erſten Vorausſetzung auszudrücken ſcheinen möchte, davon giebt ſchon die Quadratur der graden Linie ein Beyſpiel ab. Es ſchneide nämlich die gerade Linie MN die Axe BC in A (10 Fig.) unter einen Winkel, deſſen Tangente = n. Man nehme den Anfangspunct der Abſciſſen in A, und es ſey AP = x, PM = y, ſo iſt $y = nx$, und $\int y dx = \frac{1}{2} nx^2 + C$. Wenn man die Fläche, welche dieß Integral ausdrückt, von der Ordinate durch A an rechnet, ſo iſt $C = 0$, und es drückt allemal das Stück der Fläche aus, das zwiſchen der Ordinate durch A und derjenigen Ordinate fällt, die durch den Endpunct der Abſciſſe gehet, man mag x poſitiv, oder negativ nehmen. Dieß Integral bleibt poſitiv, wenn x negativ, z. Exempel = — AQ genommen wird, obgleich AQN die dadurch ausgedruckte Fläche iſt, und dieß Stück unter der Abſciſſenlinie liegt. Aendert man die vorige Vorausſetzung, und nimmt an, die Fläche ſoll von der Ordinate DE an gerechnet werden, die vom Anfangspunct der Abſciſſen um das Stück AD $= a$ abſtehet, ſo muß $\frac{1}{2}nxx + \text{C}$ verſchwinden für $x = a$, alſo wird $\text{C} = -\frac{1}{2}naa$, welches $\int ydx = \frac{1}{2}n(xx - aa)$ giebt. Dieß Integral iſt poſitiv, wenn x poſitiv und größer als a iſt, und es wächst mit x; alſo drückt es die Fläche DEMP aus, ſo lange $x = \text{AP}$ poſitiv und größer als a bleibt. Wird $x < a$, ſo wird dieß Integral negativ und wächst, wenn x abnimmt. Es drückt demnach für $x = \text{A}p$ die Fläche DEmp aus, ſo lange bis $x = o$, da es $= -\frac{1}{2}naa$ wird, und die Fläche DEA giebt. Für negative x bleibt das Integral Anfangs noch negativ, ſo lange $-x < -a$ genommen wird. Aber es nimmt ab, wenn $-x$ zunimmt: deswegen kann es für $x = -\text{A}q$ die Fläche DEAqn nicht mehr ausdrücken, es muß vielmehr eine Fläche ausdrücken, die auf der andern Seite von qn liegt; und dieß iſt keine andere, als F$qn$G, weil für $x = -\text{AF} = -a$ das Integral wieder verſchwindet. Wenn $-x$ über $-$AF hinaus wächst, ſo wird das Integral wieder poſitiv, und wächst mit $-x$. Wenn alſo $x = -\text{AQ}$, ſo drückt das Integral die Fläche FQNG, keinesweges aber die Fläche DEAQN aus. Will man die Größe dieſer letztern wiſſen, ſo muß man die drey Werthe DEA, AFG, FQNG ohne Abſicht auf die Zeichen + oder − zuſammen addiren. Denn es wäre doch wohl ſehr ſonderbar, wenn man DEAQN $= -$ ADE + AFG + FQNG = FQNG ſetzen wollte. Ueberdem giebt die Integration nicht einmal dieſe Zeichen; ſondern vielmehr − ADE, − AFG, und + FQNG. Aber das Zeichen − hat vor ADE eine andere Beziehung, als vor AFG. Die Integration giebt ADE negativ gegen DEMP, und AFG negativ gegen FQNG. Juſt eben die Bewandtniß hat es mit allen den hyperboliſchen Flächen, davon beym Hrn. d'Alenbert die Rede iſt. (8 Fig.) Die Integration giebt AOPN ſowohl, als A$np$G negativ, aber jene Fläche in Abſicht auf NPSR, und dieſe in Abſicht auf $npsr$.

§. 11.

Ich habe geſagt, es habe eben dieſelbe Bewandtniß mit allen den hyperboliſchen Flächen, davon beym Hrn. d'Alenbert die Rede iſt, das iſt, mit den Flächen aller derjenigen Hyperbeln, welche die Gleichung $x = \frac{a^{2m+2}}{y^{2m+1}}$ ausdrückt. Ich habe dieß bereits aus der allgemeinen Formul des Integrals $\int xdy \frac{a^{2m+2}}{2m} (\frac{1}{b^{2m}} - \frac{1}{y^{2m}})$ hergeleitet, und es wird nicht undienlich ſeyn, über den Fall, wenn $m = 0$, und die Hyperbel die Apollonianiſche iſt, noch einige beſondere Betrachtungen anzuſtellen. Nun wird $x = \frac{a^2}{y}$ und $\int xdy = \frac{1}{2} aa \frac{(\frac{yy}{bb})^0 - 1}{0}$ (§. 8.) $= \frac{1}{2} aa \infty ((\frac{yy}{bb})^{1:\infty} - 1)$. Vermöge des 15 und 18 §. der 1 Abtheilung iſt der Ausdruck $\infty ((\frac{yy}{bb})^{1:\infty} - 1) = l \frac{yy}{bb}$ wenn l den natürlichen Logarithmen bedeutet. Alſo wird $\int xdy = \frac{1}{2} a^2 \, l \frac{yy}{bb}$. Dieß beſtätiget nun alles dasjenige vollkommen, was ich von den Flächen der apollonianiſchen Hyperbel im 8 §. behauptet habe. Dieſer Ausdruck iſt poſitiv für poſitive y, ſo lange $y > b$, und wird negativ für $y < b$, er wird $-\infty$, wenn $y = 0$, er bleibt noch negativ für negative y, die kleiner ſind als b, nimmt aber ab, wenn $-y$ wächst, und verſchwindet, für $y = -b$, da er dann für größere y wieder poſitiv wird, und mit ihnen wächst. Man kann eben das aus dem Ausdruck $\frac{1}{2} aa \infty ((\frac{yy}{bb})^{1:\infty} - 1)$ herleiten, wenn man ſich vermittels der Reihe aus dem 15 §. der 1 Abtheilung davon verſichert hat, daß dieſer Ausdruck poſitiv ſey, wenn y nur etwas weniges größer als b genommen wird, ſo daß $\frac{yy}{bb}$ nicht größer als 2, oder $y < b \surd 2$ iſt. In dieſer Vorausſetzung alſo, daß $y = f$, und $f < b \surd 2$ ſey, werde $(\frac{ff}{bb})^{1:\infty} = 1 + \frac{1}{\infty} \beta$, ſo wird ſich β aus der angeführten Reihe beſtimmen laſſen.

Nun ſey überhaupt $\frac{yy}{bb} = (\frac{ff}{bb})^{r}$, ſo wird $(\frac{yy}{bb})^{1:\infty} = (\frac{ff}{bb})^{r:\infty} = (1 + \frac{1}{\infty}\beta)^{r}$ $= 1 + \frac{1}{\infty} r\beta$. Alſo wird $\frac{1}{2} aa \infty \, ((\frac{ff}{bh})^{1:\infty} - 1) = \frac{1}{2} aa \, (\infty + \beta - \infty)$ $= \frac{1}{2} aa\beta$, und überhaupt $\frac{1}{2} aa \, \infty \, ((\frac{yy}{bb})^{1:\infty} - 1) = \frac{1}{2} aa\, r\, \beta$. So lange nun $y > b$ iſt, muß r poſitiv ſeyn, und mit y wachſen, für $y = b$ aber verſchwinden. Wenn $y < b$ wird, ſo muß r negativ ſeyn, und für $y = 0$, muß r negativ unendlich werden. Für negative y bleibt Anfangs r negativ, ſo lange $y < b$ iſt, nimmt aber ab, wenn y wächst, bis für $y = -b$, wiederum $r = 0$ wird. Für größere negative y wächst r wieder poſitiv. Alſo hat es ſeine Richtigkeit, daß die Werthe für $m = 0$ in dem Integral $\frac{a^{2m+2}}{2m} (\frac{1}{b^{2m}} - \frac{1}{y^{2m}})$ noch eben ſo abwechſeln, wie in den Fällen, da m nicht $= 0$, ſondern einer beſtimmten ganzen Zahl gleich iſt. Ich habe dieß mit Fleiß beſonders bewieſen, um den Gründen des Hrn. d'Alenbert alles mögliche Gewicht zu geben.

§. 12.

Man conſtruire nämlich nunmehro nach Vorſchrift des Hrn. d'Alenbert die Gleichung $dx = \frac{a^{2m+1} dy}{y^{2m+1}}$, oder $x = \frac{a^{2m+1}}{2mb^{2m}} - \frac{a^{2m+2}}{2my^{m2}}$, wo die Gleichheit der Abmeſſungen gehörig hergeſtellet iſt; ſo fällt in die Augen, daß die Linie MN*nm*, (11 Fig.) welche dieſe Gleichung ausdrückt, die Hyperbel der Ordnung $2m+1$ ſey, deren Aſymtoten EF, CD ſind, und worinn die Abſciſſenlinie mit der Aſymtote EF in der Diſtanz CA $= \frac{a^{2m+1}}{2mb^{2m}}$ parallel liegt, der Anfangspunct der Abſciſſen aber im Durchſchnitt A der Abſciſſenlinie mit der Aſymtote CD genommen worden. Man kann hieraus dieſe Folge ziehen. Die Quadratrix einer jeden Hyperbel, deren **Exponent der Ordnung** eine gerade Zahl iſt, aber ſo, daß die

Ordinate eine **einförmige** Function der Abſciſſe bleibet, ſey die nächſt niedrigere Hyperbel, die zum **Exponenten ihrer Ordnung**, die nächſt kleinere ungrade Zahl hat. Man kann daraus ferner in einem richtigen Verſtande ſchließen, die Quadratrix der Hyperbel der zweyten Ordnung ſey eine Hyperbel der erſten Ordnung, und dann wird die Hyperbel der erſten Ordnung einerley mit der logarithmiſchen Linie ſeyn. So wie nun alle Hyperbeln ungrader Ordnungen aus zweyen gleichen ähnlichen, und gegen die mit den Ordinaten parallele Aſymtote ähnlich liegenden Stücken beſtehen; ſo wird dieß auch von der Hyperbel der erſten Ordnung, oder der logarithmiſchen Linie gelten. Alles wird in ſein völliges Licht geſetzt, wenn man den beſondern Fall, wenn $m = 0$ iſt, gehörig entwickelt. In dieſem Fall wird die beſtändige Größe $\frac{a^{2m+1}}{2mb^{2m}} = AC = PR$ unendlich. Alſo behält die Linie eigentlich nur die eine Aſymtote CD. Ferner drückt in der allgemeinen Gleichung $x = \frac{a^{2m+1}}{2mb^{2m}} - \frac{a^{2m+1}}{2my^{2m}}$ der veränderliche Theil das Stück PM aus, welches gleichfalls unendlich wird, ſo daß nunmehro die Ordinate RM, die Differenz zweyer unendlichen Größen RP, und PM wird, wie die Gleichung richtig angiebt. Uebrigens erhellet, 1) daß x zweymal $= 0$ werde, nämlich für $y = +b = +$ AN, und für $y = -b = An$; 2) daß x einmal negativ unendlich werde, für $y = 0$, und 3) daß x zweymal poſitiv unendlich werde, für $y = +\infty$, und $y = -\infty$. Zwiſchen den Gränzen $y = +b$, und $y = +\infty$ wächst x von 0 bis ∞, zwiſchen den Gränzen $y = +b$ und $y = 0$ iſt x negativ und wächst bis zu ∞; zwiſchen den Gränzen $y = 0$, und $y = -b$ bleibt x negativ, und nimmt ab bis zur 0; endlich zwiſchen den Gränzen $y = -b$, und $y = -\infty$ wird x wieder poſitiv und wächst bis $+\infty$. Vermöge dieſer Verzeichnung ergeben ſich nun ohne Zweifel zwey gleiche und ähnliche Stücke der logarithmiſchen Linie, nämlich VN*m* und *vnm*. Jede poſitive Abſciſſe

AR hat mit der ihr gleichen und entgegengeſetzten negativen Ar eine gleiche Ordinate $RN = rn$. So weit iſt an allen dieſen Schlüſſen nichts auszuſetzen, und man kann ohne Bedenken zugeben, daß die logarithmiſche Linie, wenn ſie als die Quadratrix der Hyperbel angeſehen wird, und ihre Ordinaten den möglichen Flächen der Hyperbel auf beyden Seiten proportional ſeyn ſollen, einen Durchmeſſer habe, oder aus zweyen gleichen und ähnlichen Stücken beſtehe. Sobald man aber weiter ſchließt, wenn $AN = 1$; ſo iſt $RM = l\,AR$, und $rm = l - Ar = l + AR = RM$, alſo hat $-Ar$ eben den Logarithmen, welchen $+AR$ hat, und ſo weiter; ſo läugne ich dieſe fernere Folge. Vermöge der Verzeichnung iſt freylich $RM = l\,AR$, wenn $AN = r$ iſt, oder eigentlich $RM = l\frac{AR}{1}$; aber es iſt keineswegeſ $rm = l\frac{Ar}{+1}$; es iſt vielmehr $rm = l\frac{Ar}{An} = l\frac{-AR}{-1}$, denn dieſe Ordinate iſt der Fläche $npsr$ (8 Fig.) proportional, und dieſe Fläche iſt $= l\frac{-AR}{-1}$ (§. 8.) und keineswegeſ $= l\frac{-RA}{+1}$

§. 13.

Die Gleichung dieſer Linie wird nun dieſe ſeyn: $x = \frac{1}{2}a\,l\frac{yy}{bb}$, und es bedeutet hier x die Ordinate, und y die Abſciſſe. Wenn man aber MQ mit AR parallel ziehet, ſo wird $x = RM = AQ$ und $y = AR = QM$. Nimmt man alſo die Abſciſſen AQ, auf der Aſymtote, und die Ordinaten MQ auf derſelben perendiculär, ſo dienet eben die Gleichung, nur mit dem Unterſcheid, daß die Bedeutung der Buchſtaben x und y ſich verwechſelt, und x die Abſciſſe, y aber die Ordinate anzeigt. Wenn nun c die Baſis der natürlichen Logarithmen iſt, ſo giebt die Gleichung $x = \frac{1}{2}a\,l\frac{yy}{bb}$ auch dieſe $e^{2x:a} = \frac{yy}{bb}$, und es wird $y = \pm b\,e^{x:a}$, ſo daß jeder Abſciſſe x zwey gleiche und entgegengeſetzte y zugehören. Nun ſind die Abſciſſen die Logarithmen der Ordinaten. Man kann zugeben, daß die Abſciſſen auch die Logarithmen der negativen Ordinaten ſind. Aber ſo, wie die Abſciſſen eigentlich die Logarithmen der Verhältniſſe der poſitiven Ordinaten gegeneinander ſind; ſo ſind ſie zugleich die Logarithmen der Verhältniſſe der negativen Ordinaten gegeneinander. So wie nun $AQ = l\frac{QM}{AN}$ iſt, ſo iſt zugleich $AQ = l\frac{Qm}{An} = l\frac{-QM}{-AN}$, aber keinesweges $AQ = l\frac{-QM}{+AN}$. Man kann demnach der logarithmiſchen Linie zwey Aeſte laſſen, man kann zugeben, daß ſie einen Durchmeſſer habe: inzwiſchen behalten die Hrn. von Leibnitz und Euler noch immer recht, wann ſie es läugnen, daß dieſe Linie einen Durchmeſſer habe. Denn ſie haben es in einem andern Verſtande geläugnet, als es hier erwieſen iſt. Gemeiniglich wird die Gleichung für die logarithmiſche Linie ſo ausgedrückt $x = a\,l\frac{y}{b}$, oder $e^{x:a} = \frac{y}{b}$, und es iſt offenbar, daß dieſe Gleichung nur einen Aſt allein ausdrücken könne, deswegen würde die Frage ſeyn, welche Gleichung man nehmen müſſe? Es iſt nun nicht ſchwer, hierauf zu antworten, und es in ſein gehöriges Licht zu ſetzen, worauf die ganze Streitigkeit von der Geſtalt der logarithmiſchen Linie ankomme. Gegen die Folge des Satzes: wenn alle die Linien, welche die Gleichung $dx = \frac{dy}{y^{2m+1}}$ ausdrückt, einen Durchmeſſer haben, ſo muß dieſer Durchmeſſer noch bleiben, wenn $m = o$ iſt, hatte Hr. Euler in den Memoires de Berlin das Nöthige ſchon erinnert. Man iſt nur ſo lange davon verſichert, daß alle dieſe Linien einen Durchmeſſer haben, als dieſe Gleichung algebraiſch integrabel iſt. Aber das Integral bleibt nicht algebraiſch, wenn $m = o$ iſt, alſo kann man auch nicht verſichert ſeyn, daß der Durchmeſſer bleibe. Um deſto überzeugender darzuthun, daß dergleichen Sätze, ſo allgemein ſie ſcheinen möchten, dennoch in ſpeciellen Fällen zuweilen Ausnahmen leiden, führt er die Gleichung zum Exem. an $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(b+x)}$. Alle Linien, welche dieſe Gleichung ausdrückt, ſind algebraiſch und haben einen Durchmeſſer; dennoch aber behält die Linie keinen Durchmeſſer mehr, wenn $b = 0$ iſt. Hierauf antwortet Hr. d'Alenbert, das habe zwar ſeine Richtigkeit, aber es rühre eigentlich daher, weil in dem Fall die Gleichung des achten Grades, welche $y = \surd\, a x + \sqrt[4]{}\, a^3\, (b + x)$ giebt, ſich in zwey rationale Gleichungen der vierten Ordnung theile, und alſo in der That zwey unterſchiedene Linien ausdrücke, die für einerley Axe und Anfangspunct der Abſciſſe beſchrieben worden. Hierauf erwiedere ich nun, daß juſt derſelbe Fall Statt habe, wenn von der Gleichung $x = \frac{a^{2m+1}}{2m} \left(\frac{1}{b^{2m}} - \frac{1}{y^{2m}}\right)$ die Rede iſt. Wenn $m = 0$ iſt, ſo wird daraus $\frac{2x}{a} = l\,\frac{yy}{bb}$, oder $e^{2x:a} = \frac{yy}{bb}$. Jene theilt ſich in die beyden Gleichungen $\frac{x}{a} = l\,\frac{y}{b}$ und $\frac{x}{a} = l\,\frac{-y}{-b}$, und dieſe in die beyden Gleichungen $e^{x:a} = \frac{y}{b}$ und $e^{x:a} = \frac{-y}{-b}$; alſo gehören die beyden Aeſte der logarithmiſchen Linie, welche die allgemeine Gleichung giebt, eigentlich nicht weiter zuſammen, als ein paar Linien, die für einerley Axe und Anfangspunct der Abſciſſen beſchrieben ſind. Beyde Aeſte drücken auch keine verſchiedene Logarithmenſyſteme aus, ſondern der eine Aſt drückt gerade daſſelbe Syſtem aus, was der andere ausdrückt. In der That hat es alſo damit eben die Bewandtniß, wie mit der Gleichung $yy = nnxx$, welche ein Syſtem zweyer gegen die gemeinſchaftliche Axe auf beyden Seiten ähnlich liegender geraden Linien giebt. Wer wollte aber hieraus die Folge ziehen, daß zu einer jeden geraden Linie eine andere gehöre, die auf der andern Seite gegen die Axe eine ähnliche Lage hat. Inzwiſchen kömmt man doch oft bey Auflöſung einer Aufgabe auf dieſe Gleichung, da es denn ein Beweis iſt, daß zur vollſtändigen Verzeichnung zwey grade Linien erfordert werden, wie wenn man die Gleichung für den Schnitt eines ſenkrechten Kegels ſucht, der durch die Axe gehet. Ein und eben derſelbe Logarithme gehöret nicht nur dem Verhältniſſe $\frac{y}{b}$, ſondern auch dem

Verhältniſſe $\frac{-y}{-b}$ zu. Weder die Gleichung $x = l\frac{y}{b}$, noch die Gleichung $x = l\frac{-y}{-b}$ kann beydes zugleich ausdrücken; will man eine Gleichung haben, die beydes zugleich ausdrückt, ſo muß man beyde zuſammen addiren, oder welches einerley iſt die Gleichungen $e^{x:a} = \frac{y}{b}$ und $e^{x:a} = \frac{-y}{-b}$ in einander multipliciren. Bey obiger Art, die Hyperbel zu quadriren, enthielte das Integral die Logarithmen der Verhältniſſe der poſitiven Abſciſſen zur poſitiven Einheit ſowohl, als der negativen Abſciſſen zur negativen Einheit. Alſo mußte eine Gleichung heraus kommen, die beydes ausdrückte, und die Quadratrix mußte aus zweyen Stücken beſtehen, ſo wie der Kegelſchnitt durch die Axe des Kegels aus zweyen graden Linien.

§. 14.

Hr. d'Alenbert braucht noch verſchiedene andere Gründe zu beweiſen, daß die logarithmiſche Linie einen Durchmeſſer haben müſſe. Auf der 191 und 192 Seite der Opuſcules, finde ich folgende Schlüſſe: Die Gleichung $y = c^x$ giebt für unzählige Werthe von x einen doppelten Werth von y, allemal nämlich, wenn $x = \frac{n}{2m}$ iſt; alſo hat die logarithmiſche Linie auf der andern Seite der Axe wenigſtens unzählige puncta diſcreta. Dieß geben auch wohl andere Geometer zu, die ſonſt auf des Herrn von Leibnitz Seite ſind. Ich muß aber die Richtigkeit deſſelben läugnen, weil c^x keine andere, als poſitive Werthe haben kann, was auch x bedeutet, (1 Abth. §. 31.) daferne es nur eine mögliche Größe iſt, wie an dem angeführten Ort vorausgeſetzt wird. Hr. d'Alenbert gehet noch weiter und behauptet, daß dieſe puncta diſcreta eine ſtätige Linie ausmachen. Denn ſagt er, man muß vorausſetzen, daß c einen doppelten Werth habe, einen poſitiven und einen negativen, und dieß deswegen, weil c die Zahl iſt, deren Logarithmen = 1 und nach ſeinem Syſtem jedem Logarithmen zwey gleiche und entgegengeſetzte Zahlen zugehören. Dieſer letzte Satz iſt, wie ich glaube, hinlänglich widerlegt, alſo fällt der ganze Beweis für den doppelten Werth von c weg. Ueberdem iſt die Vorausſetzung dieſes doppelten Werths von c deswegen unrichtig, weil ein Logarithmenſyſtem, deſſen Baſis $= -c$ ſeyn ſoll, von demjenigen deſſen Baſis $= +c$ iſt, ſo gewiß unterſchieden ſeyn muß, als ein Syſtem, deſſen Baſis $= 10$, unterſchieden iſt von demjenigen, deſſen Baſis $= 8$, oder einer andern von 10 unterſchiedenen Zahl. Ferner iſt dieſe Vorausſetzung wider alle Begriffe der in den analytiſchen Gleichungen vorkommenden beſtändigen Größen. Dieſe müſſen **ganz beſtimmt** ſeyn, ſowohl in Anſehung **der Größe**, als auch in Anſehung **der Lage**, ehe und bevor man die Linie, welche die Gleichung ausdrückt, verzeichnen kann. Man könnte ſonſt auf eben die Art allerhand ſonderbare Sätze heraus bringen. Wenn Hr. d'Alenbert behauptet, es habe mit der Gleichung $y = c^x$ eben die Bewandtniß, wie mit der Gleichung $y = \sqrt{x}$ für die Parabel; ſo muß ich aufrichtig geſtehen, daß ich dieß gar nicht verſtehen könne, wie es eigentlich gemeynet ſey. Dieſe Gleichung muß deswegen quadrirt werden, weil ſie irrational iſt. Das iſt die Urſache, warum weder $y = +\sqrt{x}$, noch $y = -\sqrt{x}$ die Parabel ganz ausdrückt, ſondern vielmehr die Gleichung $yy = x$. Hier muß alſo die auf die Potenz $\frac{1}{2}$ ſchon erhöhete Größe nämlich $x^{1:2}$ beyde Zeichen haben. Aber Hr. d'Alenbert wollte beweiſen, daß c, die Größe unter dem Exponenten beyde Zeichen haben müſſe. Wie das nun aus dem angebrachten Exempel der Parabel folge, weis ich nicht.

§. 15.

Mit dem vorigen Beweiſe verbindet Herr d'Alenbert an eben der Stelle noch einen andern. (12 Fig.) Er ſagt ſo: man nehme auf der Axe der logarithmiſchen Linie, einen Punct Q nach

Belieben, ſchneide auf der Axe zwey gleiche Stücke AQ, QP ab, und ziehe die Ordinaten AB, PM; ſo iſt die Ordinate in Q zwiſchen AB und PM die mittlere Proportionallinie, welche allemal einen doppelten Werth hat, QS und QR = — QS, u. ſ. f. In der That iſt dieß eben das, was die Gleichung $c^{2x;a} = \frac{yy}{bb}$ ausdrückt, und Hr. d'Alenbert hätte hieraus eben dieſe Gleichung herleiten können. Inzwiſchen bleibt dieſer Grund für ſich allein allemal unzulänglich, weil man ſonſt auf eben die Art beweiſen könnte, daß jede Linie, wenn gleich in ihrer Gleichung die Ordinate y eine rationale ganze Function von der Abſciſſe x iſt, dennoch aus zweyen gleichen und ähnlichen Stücken beſtehen müſſe, indem es eben ſo viel iſt, als ob man die Gleichung quadrirte. So iſt z. E. $y = nxx$ die Gleichung einer Parabel ASM, (13 Fig.) von der ſich eben ſo beweiſen läßt, daß jeder Abſciſſe AQ zwey gleiche entgegengeſetzte Ordinaten QS und QR zugehören. Man nehme nämlich einen Punct D nach Gefallen zwiſchen A und Q, und P ſo, daß $AD^2 : AQ^2 = AQ^2 : AP^2$ wird, und ziehe die Ordinaten DE und PM, ſo iſt nun die Ordinate in Q zwiſchen DE und RM die mittlere Proportionallinie, welche einen doppelten Werth haben muß, QS und QR = — QS. Man kann die Gleichung leicht ſo einrichten, daß ſie dieſen Umſtand ausdrückt. Es ſey nämlich $AQ = x$, und $QS = y$, ſo iſt $DE = n\,AD^2$ und $PM = n\,AP^2$, folglich $DE . PM = nn\,AD^2 . AP^2$; das iſt aber eben ſo viel, als $QS^2 = nn\,AQ^4$ oder überhaupt $yy = nn\,x^4$. So wenig dieſe Schlüſſe beweiſen können, daß die Parabel auf beyden Seiten der Abſciſſenlinie AP gleiche und ähnliche Stücke habe; eben ſo wenig können es jene Schlüſſe des Hrn. d'Alenbert von der logarithmiſchen Linie darthun. Würde man inzwiſchen bey Auflöſung einer Aufgabe auf jene Gleichung $yy = nn\,x^4$ geleitet; ſo würden beyde Parabeln deswegen, weil ſie den ſogenannten Ort der Aufgabe ausmachen, zuſammen gehören. Hievon iſt die Anwenwendüng leicht auf die logarithmiſche Linie zu machen. Ihre Gleichung $e^{x:a} = \frac{y}{b}$ iſt für ſich ſchon rational, und deswegen iſt es nicht verſtattet ſie zu quadriren, wofern es nicht wegen andrer Gründe geſchehen muß. Dieſe ſind aber vorhanden, wenn man ſie als die Quadratricem der Hyperbel anſiehet, welche die möglichen Flächen der Hyperbel auf beyden Seiten ausdrücken ſoll.

§. 16.

Gegen dieſe bisher von mir beurtheilte Lehre, von den beyden gleichen und ähnlichen Stücken der logarithmiſchen Linie, macht ſich Hr. d'Alenbert auf der 222 Seite folgenden Zweifel. On pourroit faire contre l'argument tiré des aires hyperboliques une objection que voici, & qui paroit avoir echappé à tous ceux, qui ont jusqu'ici traité cette matiére. Soit AP $= x$, PM $= y$, AC $= a$, & $y = \frac{1}{(a-x)^n}$ n etant un nombre pair poſitiv; il eſt viſible, que cette équation ſera celle d'une hyperbole du degré n, qui aura pour aſymtote CO, & dont les deux branches BMQ, qmb, ſeront du même coté de l'Axe Aa. Il eſt viſible de plus, que l'integrale de ydx, ou l'aire ABMP $= \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{(a-x)^n} - 1 - \frac{1}{a^n}\right)$; & comme les deux branches BMQ, qmb, appartiennent à une ſeule & même courbe, il ſemble, que cette integrale devroit exprimer auſſi l'aire AQ qmp, dans laquelle Ap eſt > AC. *Cependent elle ne l'exprime pas.* Car quand x eſt $> a$, l'integrale précédente eſt toujours finie, au lieu, que laire AQ qmp eſt infinie, étant compoſée des deux aires infinies ABQC, qmpc. Voila donc un exemple ou l'équation des aires n'eſt pas aſſujettie à la loi de continuité, quoique celle des branches le ſoit. Or dira-t-on, ne pourroit-il pas en être de même de l'hyperbole équilateré? Ich merke hiebey an, daß in dem Ausdruck des Integrals APMP $= \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{(a-x)^{n-1}} - \frac{1}{a^n}\right)$ ohne Zweifel ein Druckfehler eingeſchlichen ſey, und daß es $\frac{1}{a^{n-1}}$ ſtatt $\frac{1}{a^n}$ heißen müſſe. Es iſt nämlich $\int \frac{dx}{(a-x)^n} = \frac{1}{(n-1)(a-x)^{n-1}} + C$, und dieß Integral ſoll $= 0$ ſeyn, für $x = 0$. Alſo wird $C = -\frac{1}{(n-1)\,a^{n-1}}$, und $\int y dx = \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{(a-x)^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}}\right)$. Da n hier eine grade Zahl bedeutet, ſo will ich wegen mehrerer Deutlichkeit $2m$ ſtatt n ſchreiben; ſo wird $\int y dx = \frac{1}{2m-1} \left(\frac{1}{(a-x)^{2m-1}} - \frac{1}{a^{2m-1}}\right)$. Dieſe Gleichung ſoll, wie Herr d'Alenbert glaubt, für $x > a$ nicht mehr gelten, und zwar aus dem Grunde, weil dieß Integral für $x > a$ allemal unendlich, die Fläche AQqmp aber, die es in dieſem Fall ausdrücken ſollte, allemal unendlich groß iſt. Aber warum kann man nicht hier auch ſagen, es ſey AQqmp = ABMP + PMQC — pmQC = ABMP + PMQC — PMQC = ABMP, da in einem unſtreitig richtigen Verſtande die Fläche pmQC = — PMQC iſt? Hr. d'Alenbert drückt ſich hier ſo aus: Die Gleichung der Flächen ſey **dem Geſetz der Stätigkeit nicht unterworfen**, und es kommt hiebey alſo darauf an, daß der Sinn der Redensart, **eine Integralgleichung ſey dem Geſetz der Stätigkeit unterworfen** feſtgeſetzt werde. Will man dieß ſo erklären, eine Gleichung von dieſer Art, wenn ſie die Quadratur einer Linie ausdrückt, ſey alsdann nur dem Geſetz der Stätigkeit unterworfen, wenn das Integaal für jeden möglichen Werth der Abſciſſe x die zwiſchen denjenigen Ordinaten enthaltene Fläche ausdrückt, davon die eine bey Hinzuſetzung der beſtändigen Größe beſtimmt worden, die andere aber durch den Endpunct der Abſciſſe gehet; ſo muß man zugeben, daß obige Gleichung für die Quadratur der Hyperbel $\int y dx = \frac{1}{2m-1} \left(\frac{1}{(a-x^{2m-1}} - \frac{1}{a^{2m-1}}\right)$ dem Geſetz der Stätigkeit nicht unterworfen ſey. Aber alsdann iſt auch die Gleichung $\int y dx = \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{(a-x)^{2m}} - \frac{1}{a^{2m}}\right)$ dieſem Geſetz nicht unterworfen, wenn $y = \frac{1}{(a-x)^{2m+1}}$ iſt. Denn dieſe der

Hyperbel MPVmpF (8 Fig.) zugehörige Gleichung, wenn nämlich die Abſciſſen von N gerechnet werden, und NA $= a$ iſt, drückt für $x = Nr > a$ ebenfalls die zwiſchen PN und rs enthaltene Fläche nicht aus. Wofern dieß alſo ein Beweis ſeyn ſoll, daß die Integralgleichung gar keine zu eben der Linie gehörige Flächen mehr ausdrücken könne, wenn $x > a$ iſt; ſo widerſpricht Hr. d'Alenbert ſeinem eigenen Syſtem von den beyden gleichen und ähnlichen Stücken der logarithmiſchen Linie, denn es hat in der That mit beyden Gleichungen einerley Bewandtniß.

§. 17.

Meine Gedanken von der Sache ſind dieſe. Das Geſetz der Stätigkeit erfordert nur, daß das Integral jedesmal eine zwiſchen zweyen parallelen Ordinaten enthaltene Fläche ausdrücke. Die übrigen Umſtände müſſen es ergeben, welche Ordinaten diejenigen ſind, zwiſchen denen die Fläche jedesmal fällt. Der Ausdruck ydx giebt nicht allein das Differential der Fläche zwiſchen AB und PM (14 Fig.); ſondern es iſt zugleich ydx das Differential einer Fläche, die auf der andern Seite von PM liegt, und um das Differential ydx abnimmt, wenn ABPM um dieſes Differential anwächst. Das iſt die Urſache, warum das Integral $\int ydx$ ſowohl die eine, als die andere dieſer Flächen ausdrücken kann, und es ergiebt ſich in jedem beſondern Fall ohne Schwierigkeit, welche von dieſen beyden Flächen verſtanden werden müſſe. Wenn in der Gleichung $\int ydx = \frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{(a-x)^{2m-1}} - \frac{1}{a^{2m-1}}\right)$ die Abſciſſe $x > a$ genommen wird, ſo iſt dieß Integral negativ, und nimmt ab, wenn x wächst. Dieß iſt ein Beweis, daß die dadurch ausgedrückte Fläche auf der andern Seite von pm falle, welche der vorigen entgegen geſetzt iſt. Man nehme an, die Axe der Abſciſſen ſey auf beyden Seiten nach S und s bis ins Unendliche verlängert, und zugleich die beyden zugehörigen Aeſte der krummen Linie nach V und *v*; ſo erhellet, daß die Fläche *pmvs* abnehme, wenn *x* wächst, ſo wie es der Ausdruck des Integrals erfordert. Für $x = \infty$, wird das Integral $= -\frac{1}{(2m-1)a^{2m-1}}$. Für $x = -\infty$ behält das Integral denſelben Werth, da es die Fläche ABVS ausdrückt, dieß erhellet daraus, weil es noch weiter abnimmt, wenn $-x$ kleiner wird. So drückt es für $x = -AR$ die Fläche ABNR aus, ſo lange bis $x = 0$ iſt, da dann das Integral wieder verſchwindet. Dieſemnach drückt das Integral, wenn $x > a$ genommen wird, die Flächen *pmvs* und VSAB zuſammen genommen aus. So ſonderbar dieß ſcheinen möchte, ſo gewiß iſt es, daß es damit ſeine völlige Richtigkeit habe, und daß es eben hiedurch völlig einleuchte, wie die Flächen auf beyden Seiten durch einerley Integralformul ausgedrückt werden, oder wie Hr. d'Alenbert redet, nach dem Geſetz der Stätigkeit zuſammen hängen. Das anſcheinende ſonderbare rühret blos von der Vorausſetzung her, die man bey der Addition der beſtändigen Größe angenommen hat. Es kann nämlich die beſtändige Größe $-\frac{1}{a^{2m-1}}$ nicht hinzu kommen, wofern man nicht vorausſetzt, daß das Integral $= 0$ ſeyn ſoll, wenn $x = 0$ iſt. Aber die natürlichſte Vorausſetzung iſt, das Integral $= 0$ zu ſetzen, wenn $x = \infty$ iſt, da dann die beſtändige Größe $= 0$, und das Integral $\int y dx = \frac{1}{(2m-1)(a-x)^{2m-1}}$ wird. Nun drückt es für $x > a$ die Fläche *pmvs* aus, und das Integral iſt zwiſchen den Gränzen $x = a$, und $x = +\infty$, negativ. Wird aber *x* negativ, ſo wird das Integral poſitiv, und drückt z. E. für $x = -AR$ die Fläche VSRN aus, welche wächst, wenn AR abnimmt, ſo wie es das Integral verlangt; für $x = 0$ iſt das Integral $= \frac{1}{(2m-1)a^{2m-1}}$, welches die Fläche VSAB ausdrückt. Wird *x* poſitiv, ſo wächst dieſe Fläche noch über VSAB hinaus, bis ſie für $x = a$ unendlich, und für $x > a$

wieder negativ wird. Durch die Vorausſetzung alſo, daß das Integral $= o$ ſeyn ſoll, wenn $x = o$ iſt, vermindert man die ganze Reihe der poſitiven Flächen um das Stück VSAB. Wenn aber eine poſitive veränderliche Größe mit einer andern negativen nach dem Geſetz der Stätigkeit zuſammen hängt, und o die Gränze zwiſchen beyden iſt, ſo kann man die poſitive Größe, nicht um ein gewiſſes Stück vermindern, daß man nicht die damit zuſammen hängende negative um eben dieſes Stück vermehren ſollte. Vermindert man die poſitiven Abſciſſen einer krummen Linie um die beſtändige Größe b dadurch, daß man den Anfangspunct der Abſciſſen um die Diſtanz b vorwärts rückt; ſo werden zugleich alle negative Abſciſſen um eben dieſes Stück vermehret. Vermindert man die poſitiven Ordinaten dadurch, daß man mit der vorigen Abſciſſenlinie eine andere in der Diſtanz b parallel legt, ſo werden zugleich alle negative Ordinaten um eben dieſes Stück vergrößert. Dieſer Umſtand hat nur alsdann Statt, wenn die poſitiven Werthe mit den negativen nach dem Geſetz der Stätigkeit zuſammen hängen. Alſo giebt er in dem obigen Fall einen Beweis ab, daß wirklich die Flächen VSPM und $vspm$ nach dem Geſetz der Stätigkeit verbunden ſind. Wenn man $dz = \frac{dx}{(a-x)^{2m}}$ ſetzt, und dieſe Gleichung conſtruirt, oder welches einerley iſt, die Quadratricem der Hyperbel $y = \frac{1}{(a-x)^{2m}}$ verzeichnet, ſo wird dieß alles dadurch vollſtändig erläutert. Allein ich enthalte mich darüber weitläuftiger zu ſeyn, da dieß in der That bekannte Dinge ſind.

§. 18.

Ich glaube nunmehro, daß die Schwäche des Hauptbeweiſes, womit Herr d'Alenbert gegen dem Hrn. von Leibnitz die

Möglichkeit der Logarithmen verneinter Größen, hat erhärten wollen, völlig ins Licht geſetzet ſey. Ob dieſes gleich hinlänglich iſt, das ganze Syſtem des Hrn. d'Alenberts von den Logarithmen verneinter Größen zu widerlegen; ſo wird es doch nicht undienlich ſeyn, auch die vornehmſten von denjenigen Gründen, welche Hr. d'Alenbert insbeſondere dem Hrn. Euler entgegen geſetzt hat, zu prüfen. Ich habe ſchon im 2 §. angeführet, daß Hr. Bernoulli unter andern dieſen Beweis gebraucht habe: weil $\frac{-dx}{-dx} = \frac{+dx}{+dx}$, ſo ſey $l - x = l + x$. Hierauf antwortet Hr. Euler mit Recht, man könne aus der Gleichheit der Differentiale auf die Gleichheit der Integrale nicht ſchließen, weil die Integrale um eine beſtändige Größe unterſchieden ſeyn können, die bey der Differentiation wegfällt. So iſt hier wirklich $l - x = l\,x + l - 1$, woraus es ganz deutlich erhellet, warum $d\,l - x = d\,l + x$ werde, ohne daß deswegen $l - x = l + x$ ſey, wofern man nicht ſchon vorausſetzt, daß $l - 1 = 0$ ſey, welches doch erſt bewieſen werden ſoll. Man könnte alſo auf eben die Art beweiſen, daß $lnx = lx$ ſey, weil $d.\,lnx = \frac{ndx}{nx} = \frac{dx}{x} = d\,lx$; ein Satz von dem Hr. Euler ſagt, daß ihn Hr. Bernoulli ſelbſt ohne Zweifel für falſch erklären würde, und den ja wohl ein Jeder für falſch erklären muß. Inzwiſchen thut es Hr. d'Alenbert nicht, ſondern er ſagt ausdrücklich: je ne vois pas ce que cette conſéquence avoit de choquant. So wie ſich Hr. d'Allenbert aber darüber erklärt, hat freylich der Satz $lnx = lx$ nichts anſtößiges, wenn nämlich von **verſchiedenen** Syſtemen die Rede iſt. Aber in einem und eben demſelben Syſtem kann doch wohl unmöglich $lnx = lx$ ſeyn, und dieß iſt es, was aus der obgedachten Art zu ſchließen folgen würde. Es iſt d. log. naturalis $nx = \frac{ndx}{nx}$ und d. log. nat. $x = \frac{dx}{x}$, alſo würde log. naturalis nx = log. nat. x ſeyn, und dieß iſt es, deſſen Unmöglichkeit Hr. Euler behauptet. Hr. d'Alenbert ſelbſt will ja auch nebſt dem Hrn.

Bernoulli auf dieſe Art beweiſen, es ſey log. nat. $-x =$ log. nat. $+x$. Doch ich muß auch dasjenige nicht verſchweigen, was Hr. d'Alenbert beybringt, um dieſes alles zu rechtfertigen. En effet (ſo heißt es auf der 194 Seite) qu'eſt-ce que lx en regardant x comme l'ordonnée d'une Logarithmique? c'eſt *le logarithme du rapport* de x à une ordonnée b, que l'on prend pour unité (Hr. d'Alenbert nimmt alſo an dieſer Stelle ſelbſt den Begriff eines Logarithmen ſo an, wie ich ihn im 13 §. der 1 Abth. gebildet habe.) Qu'eſt ce que lnx? C'eſt en general le logarithme du rapport de nx à une ligne quelconque c, que l'on prend pour l'unité. Si on fait $c = b$ on trouvera aiſément, que log. $\frac{nx}{c} = l\frac{x}{b} + l\frac{nx}{b}$, ou $lnx = lx + ln$; mais ſi on fait $c = nb$, on aura $l\frac{nx}{nb} = l\frac{x}{b} = lx$. En general il eſt évident, que ſi on prend ln pour zero, ou ce qui revient au même, ſi on prend n pour repreſenter l'unité, lnx ſera égal au logarithme de x. Pourquoi donc en prenant -1 pour repreſenter l'unité, c'eſt a dire, pour le nombre dont le log. $= 0$, n'auroit-on pas $lnx = l{-x} = lx$? Entweder die bisherige Theorie von den Logarithmen muß ganz umgearbeitet werden, oder alles dieſes will nichts weiter ſagen, als ſo viel: Die Logarithmen ſind gleich, wenn die Verhältniſſe gleich ſind, und es heißt $l{-x} = l{+x}$ nach der eigenen Erklärung des Hrn. d'Alenberts, die an dieſer Stelle wenigſtens ſehr deutlich angetroffen wird, nichts anders, als $l\frac{-x}{-1} = l\frac{+x}{+1}$. Hr. d'Alenbert giebt nämlich zu, daß lnx nicht $= lx$ ſeyn könne, wenn die Einheiten einerley ſind, womit man x und nx vergleicht. Dagegen ſagt er, wenn die Einheit, womit x verglichen wird $= b$, diejenige aber, womit man nx vergleicht $= nb$ genommen werde, ſo ſey $lx = lnx$; das heißt nach ſeiner eigenen Erklärung $l\frac{nx}{n} = l\frac{x}{1}$. Hierauf folgt nun der Zuſatz: wenn alſo $n = -1$, oder -1 ſelbſt die **Einheit** iſt, womit man

nx, ſo nun $-x$ iſt, vergleicht, warum ſollte nicht $lnx = l-x = lx$ ſeyn? demnach kann dieſe Frage nichts anders, als ſo viel ſagen wollen: Warum ſollte nicht $l\frac{nx}{x} = l\frac{-x}{-1} = l\frac{x}{1}$ ſeyn? das hat Niemand beſtritten, und es wird nie beſtritten werden.

§. 19.

Hr. Euler hatte geſagt, wenn man die Gleichung $lnx = lx$ gelten laſſe, ſo beſtehe die logarithmiſche Linie nicht aus zweyen, ſondern unzählig vielen Stücken. Auch dieſe Folge läugnet Hr. d'Alenbert, und zwar ſetzt er die Urſache hinzu: wenn man $lnx = lx$ ſetze, ſo verrücke man nur den Anfangspunct der Abſciſſen. Allein ſo viel ich einſahe, wird hiedurch der Sinn der Streitfrage wiederum von Hrn. d'Alenbert ganz verändert. Bey ihm iſt lnx ſo viel als $l\frac{nx}{n}$; wenn nun in der logarithmiſchen Linie BMN, die Ordinate $PM = x$, $AB = 1$, (12 Fig.) und alſo $AP = lx$ iſt; wenn ferner $LN = nx$ und $GH = n$ iſt, ſo iſt freylich $GL = AP = l\frac{LN}{GH} = l\frac{nx}{n}$, und alſo $AP = lnx - ln$ oder $AP + ln = lnx = GL + ln$. Will man alſo nunmehro wieder x ſtatt nx ſchreiben, und die Gleichung $GL + ln = lx$ ſtatt der vorigen $AP = ln$ nehmen, ſo heißt dieß freylich nur, deñ Anfangspunct der Abſciſſen von A nach G rücken. Aber beym Hr. Euler heißt lnx nicht ſo viel als $l\frac{nx}{n}$, ſondern vielmehr ſo viel als $l\frac{nx}{1}$, wo eben diejenige Einheit verſtanden werden muß, womit man x vergleicht. Wäre nämlich der Schluß richtig $\frac{-dx}{-x} = \frac{+dx}{+x}$, alſo $l-x = l+x$, ſo müßte man auch ſchließen können, $\frac{ndx}{nx} = \frac{dx}{x}$, alſo $lnx = lx$, was auch n bedeutet. Es kann demnach n jede Linie bedeuten, die von derjenigen unterſchieden iſt, welche man $= 1$ geſetzt hat: und wenn dieß iſt, ſo wird die Gleichung $AP = lnx$ für jede Abſciſſe unzählig viele Ordinaten geben, und alſo die Linie unſtreitig unzählig viele verſchiedene Aeſte bekommen. Uebrigens iſt es eine allgemein bekannte Sache, daß zwar eine und eben dieſelbe logarithmiſche Linie unzählig viele Logarithmenſyſteme ausdrücken könne, aber dieß aus keiner andern Urſache, als weil man bey der erſten Vorausſetzung die Freyheit hat, die Subtangente, oder welches auf eins hinaus läuft, den Logarithmen eines angenommenen Verhältniſſes durch jede beliebige Zahl auszudrücken. Es iſt aber auch ferner ausgemacht, daß ſich das Syſtem ſogleich ändere, wenn man die Subtangente, oder auch den Logarithmen eben deſſelben Verhältniſſes, durch eine andere Zahl ausdrückt. Wenn alſo in dem erſten Syſtem $\lambda = l\frac{x}{1}$ geweſen, ſo kann in dem zweyten $\lambda = l\frac{nx}{1}$ ſeyn. Aber ſodann iſt in dem zweyten nicht mehr $\lambda = l\frac{x}{1}$, wofern man nicht glauben will, es könne z. Ex. im briggiſchen Syſtem $l10 = l2x10 = l3x10 = l4x10$ u. ſ. f. ſeyn. Es ſey alſo in dem zweyten Syſtem $L = l\frac{x}{1}$ die Baſis des erſten e, die Baſis des zweyten b, ſo wird $l^{\lambda} = x$, und $b^{L} = x$. Wenn nun $b = e^{\mu}$, ſo wird $e^{\lambda} = e^{\mu L}$, folglich $\lambda = \mu L$, oder $L = \frac{\lambda}{\mu}$: und der Modulus des zweyten Syſtems $= \frac{1}{\mu}$, wenn der Modulus des erſten $= 1$ iſt. Alles dieſes ſind ganz bekannte und unläugbare Sätze: alſo wird der Satz, daß $lx = lnx$ ſeyn könne, wenn man ihn ſo erklärt, wie ihn ein Jeder natürlicher Weiſe verſtehen wird, nur zuzugeben ſeyn, wenn von verſchiedenen Syſtemen die Rede iſt. Es ſcheint, daß Hr. d'Alenbert dieß auch endlich ſelbſt eingeſtehe. Er ſetzt aber hinzu, wenn gleich zugegeben würde, daß die Vorausſetzung $lnx = lx$ nur von verſchiedenen Syſtemen gelte, ſo würde doch nicht folgen, daß auch dieß noch bey der Vorausſetzung $l{-x} = l{+x}$ wahr ſey: denn er habe das Gegentheil bewieſen. Daß dieß geſchehen ſey, muß ich vermöge des Vorigen läugnen. Hr. d'Alenbert hat nichts weniger bewieſen, als daß $l\frac{-x}{+1} = l\frac{+x}{+1}$, wohl aber, daß $l\frac{-x}{-1} = l\frac{+x}{+1}$ ſey, und das iſt es gar nicht, worauf hier die Sache ankommt.

§. 20.

Wenn Hr. Bernoulli behauptet hatte, es ſey $l-1 = l+1 = 0$, ſo folgert Hr. Euler daraus, es müſſe demnach auch $l\sqrt{-1} = 0$, $l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = 0$ ſeyn u. ſ. f., womit aber, die ſonſt bekannten Lehren von den unmöglichen Größen nicht beſtehen können. Hr. d'Alenbert findet auch in dieſen Folgen nichts ungereimtes. Er ſagt auf der 195 S. En effet tout ſyſtéme de Logarithmes eſt arbitraire en ſoi; & il eſt clair, que $0, 0, 0, 0$, &c. formant une progreſſion Arithmetique, je puis audeſſus d'une progreſſion Géométrique quelconque imaginer une ſuite de zeros, qui feront chacun les logar. du nombre qui leur répond. Ainſi poſant 0 pour le Logarithme de 1 & de -- 1. j'aurai 0 pour le Logarithme de $\sqrt{-1}$ & de $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. Aber heißt das nicht wieder den Sinn der Streitfrage ganz verändern? Die Frage iſt nicht; ob ſich ein Syſtem angeben laſſe, worinn $l+1 = l-1 = l\sqrt{-1}$ &c. $= 0$ ſey; es iſt vielmehr die Frage, ob in den gebräuchlichen Syſtemen, im Neperſchen, Briggiſchen und andern, die davon nach einem beſtändigen Modulo abhängen $l-1$, $l\sqrt{-1}$, und ſ. f. $= 0$ ſey. Auf die Art kann ich behaupten, es ſey 23. 12 = = 1002; und wenn man mir entgegen ſetzt, dieß ſey wider alle Rechnungsregeln, ſo darf ich nur folgendes antworten. Die Art, wie wir unſere Zahlen ſchreiben iſt ganz willkührlich. Statt deſſen, daß man die erſten neun Zahlen durch einfache Ziffern ausdrückt, kann man auch, wie Weigelius gewieſen hat, die erſten drey Zahlen durch einfache Ziffern ausdrücken, und ſodann die Werthe der Claſſen von der rechten gegen die linke Hand in ratione quadrupla ſteigen laſſen, ſtatt deſſen, daß ſie ſonſt in ratione decupla ſteigen. Dann aber iſt 23 = eilf, und 12 = ſechs; aber ſechsmal eilf iſt ſechs und ſechzig, und eben ſoviel drückt die Ziffer 1002 in der angenommenen Vorausſetzung aus. So wenig hiedurch dargethan werden kann, daß nach dem einmal eingeführten decadiſchen Algarithmo 23. 12 = 1002 ſey: eben ſo wenig beweiſen auch die Schlüſſe des Hrn. d'Alenbert, daß in den gebräuchlichen Syſtemen $l-1$ $l\sqrt{-1}$, u. ſ. f. $= 0$ ſey, und dieß iſt es doch eigentlich, was geläugnet wird. Hr. Euler ſchließt weiter, wenn $l\sqrt{-1} = 0$ ſey, ſo müſſe der Satz falſch ſeyn, davon ſelbſt Hr. Bernoulli der Erfinder iſt, daß der Halbmeſſer ſich zum Quadranten verhalte, wie $\sqrt{-1} : l\sqrt{-1}$, und hierauf erwidert Hr. d'Alenbert folgendes. Si dans cette propoſition $l\sqrt{-1}$ n'eſt pas $= o$, mais imaginaire, cela vient du ſyſtéme de Logarithmes, que l'on ſuppoſe dans l'équation entre les arcs de cercle z & leurs ſinus x. En effet $dz = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ donne $dz = \frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{(xx-1)}} = \frac{-dx}{\sqrt{-1}.\sqrt{(xx-1)}}$; d'ou l'on tire $z = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, l \frac{\sqrt{-1}}{x+\sqrt{(xx-1)}}$. Cette equation appartient a un ſyſtéme de Logarithmes tel, 1) que la ſoutangente de la Logarithmique, qui le repreſente, ſoit $\frac{1}{\sqrt{-1}}$, c'eſt à dire imaginaire, 2) que le Logarithme de $\frac{\sqrt{-1}}{x+\sqrt{(xx-1)}}$ ſoit imaginaire en donnant à x toutes les valeurs poſſibles depuis o jusqu'a l'unité. C'eſt un ſyſtéme, qui n'a rien de commun avec l'équation de la Logarithmique $x = ly$, dans laquelle y eſt ſuppoſée toujours réelle. Allein, entweder die Integration iſt falſch, oder das l bedeutet hier den natürlichen Logarithmen von $\frac{\sqrt{-1}}{xx\sqrt{(xx-1)}}$, und das Syſtem mag durch den Modul $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ verändert werden, wie es wolle, ſo muß doch durch die Diviſion mit dieſem Modul das natürliche Syſtem wieder heraus kommen, und alſo $z\sqrt{-1} = \log.\mathrm{nat}. \frac{\sqrt{-1}}{x+\sqrt{(xx-1)}}$

ſeyn, welches für $x = 1$ dieſe Gleichung giebt $\frac{1}{2}\sqrt{-1} = \log.\ \text{nat.}\ \sqrt{-1}$, und alſo giebt Hr. d'Alenbert hier zu, daß $\log.\ \text{nat.}\ \sqrt{-1}$ nicht $= 0$ ſey. Was übrigens dieſe Art Gleichungen eigentlich ſagen wollen, werde ich bald ausführlicher zeigen.

§. 21.

Hr. Euler bedienet ſich, um den ſcheinbaren Schwierigkeiten in der Lehre von den Logarithmen abzuhelfen, des Satzes: **daß jede Größe unzählig viele Logarithmen habe**, und bereichert eben hiedurch die Analyſin mit einer neuen überaus ſinnreichen Theorie. Was die möglichen Größen betrift, ſo war es nur nöthig zu beweiſen, daß $l+1$ ſowohl, als $l-1$ unzählig viele Werthe habe, indem überhaupt $l+a = la + l1$ und $l-a = la + l-1$ ſeyn muß. Nun ergiebt die Gleichung, welche alle Werthe von $l+1$ ausdrückt, einen möglichen Werth dieſes Logarithmen, nämlich den Werth $= 0$. Die übrigen Werthe ſind alle unmöglich. Die Gleichung aber, welche alle Werthe von $l-1$ ausdrückt, giebt für dieſen Logarithmen gar keinen möglichen Werth. Die Gleichung ſelbſt, iſt folgende $1+y:n = \cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{(2\lambda-1)\pi}{n}$, worinn π die halbe Peripherie eines Zirkels, deſſen Halbmeſſer $= 1$, $y = l-1$ und $n = \infty$ iſt, λ aber alle ganze Zahlen bedeuten kann, ſelbſt die 0 nicht ausgeſchloſſen. Dieſe Gleichung nun giebt $y = \pm(2\lambda-1)\pi\sqrt{-1}$, welcher Werth nie $= 0$ ſeyn kann, ſondern allemal unmöglich iſt. Inzwiſchen macht Hr. d'Alenbert auf der 197 S. der Opuſcules dagegen dieſen Zweifel. Er meynet, aus jener Gleichung $1+y:n = \cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1},\ \sin\frac{(2\lambda-1)\pi}{n}$ folge nicht allein diejenige, welche Hr. Euler daraus geſchloſſen hat, ſondern noch überdem dieſe Gleichung $y = 0$, oder $l-1 = 0$. Wenn man nämlich in jener Gleichung $y = 0$, und $n = \infty$ ſetze, ſo werde ſie identiſch, und gebe $1 = 1$. Hr. d'Alenbert hat vermuthmuthlich ſo geſchloſſen, es ſey $o:\infty$ unendlich klein, und könne alſo weggelaſſen werden; eben ſo ſey auch $\frac{(2\lambda-1)\pi}{\infty}\sqrt{-1}$ unendlich klein, und falle daher ebenfalls weg: welches denn $1=1$ giebt. Hierauf muß ich aber dieſes erwidern. Wenn man aus obgedachter Gleichung den Werth von y herleiten, und mit der Gleichung ſelbſt regelmäßig umgehen will, ſo muß man erwägen, daß dieſe Gleichung aus endlichen und unendlich kleinen Theilen beſtehe, daß die endlichen Theile einander aufheben, und y in einem unendlich kleinen Theil der Gleichung enthalten ſey. Nun iſt bekannt, wenn gleich unendlich kleine Größen ſonſt gegen endliche verſchwinden, daß doch in Gleichungen von dieſer Art die unendlich kleinen Größen ſelbſt untereinander verglichen werden müſſen, und man alſo alle endliche Größen erſtlich wegzuſchaffen habe, bevor man aus der Gleichung weiter ſchließen kann. Man muß in obiger Gleichung zuerſt unterſuchen, was aus der Vorausſetzung $n=\infty$ folgt, bevor man daran denken kann y zu beſtimmen. Aber die Vorausſetzung $n=\infty$ giebt $1+y:\infty=1\pm\frac{(2\lambda-1)\pi}{\infty}\sqrt{-1}$. Nun läßt ſich der Werth von y nur durch die Vergleichung des Theils $y:\infty$ mit $\frac{(2\lambda-1)\pi}{\infty}\sqrt{-1}$ beſtimmen, da 1 auf beyden Seiten durch die Subtraction wegfällt. Sonſt kann man beweiſen, daß y jeder endlichen Zahl gleich ſey. Man ſetze z. Ex. $y=3$, ſo giebt das auch $1=1$, wenn man wie Hr. d'Alenbert ſchließen will: alſo iſt auch $l-1=3$, und ſ. f. Aus eben der Gleichung glaubt Hr. d'Alenbert, noch auf eine andere Art den Werth $y=0$ herzuleiten. Er ſchließt ſo. Man ſetze $\lambda=n=\infty$, ſo hat man $1+y:n=\cos. 2\pi=\sqrt{-1}\sin 2\pi$, oder $1+y:n=1$, alſo $y=0$. Allein wenn die Gleichung $1+y:n=1$ auch richtig aus der Vorausſetzung folgte, ſo würde man doch nichts weiter als $y=0\,n$ daraus ſchließen können. Da aber $n=\infty$, ſo iſt $0\,n$ ein ganz unbeſtimmter

ter Werth, den man keineswegeſ ſo ſchlechthin $= 0$ ſetzen kann. Ueberdem gilt die vorige Erinnerung auch hier: denn es wird eigentlich $1 + \frac{y}{n} = \text{coſ.}\,(2\pi - \frac{\pi}{n}) \pm \sqrt{-1}.\,\text{ſin}\,(2\pi - \frac{\pi}{n})$. Aber $\text{ſin}\,(2\pi - \frac{\pi}{n})$ iſt $= -\,\text{ſin}\,\frac{\pi}{n} = -\,\frac{\pi}{n}$, alſo wird vielmehr $1 + \frac{y}{n} = 1 \pm \frac{\pi}{n}\sqrt{-1}$, welches $y = \pm\,\pi\sqrt{-1}$ giebt; und dieß iſt eben der Werth, der gefunden wird, wenn man $\lambda = 0$ ſetzt, welches der Natur dieſer Formuln völlig gemäß iſt. Inzwiſchen muß ich auch dieſes erinnern, daß eigentlich λ nie unendlich groß genommen werden müſſe, wie ſogleich unten erhellen wird.

§. 22.

Gegen den Satz ſelbſt: daß jede Zahl unzählig viele Logarithmen habe, und gegen den Beweis deſſelben, womit Herr Euler ihn beſtätiget, bringt Hr. d'Alenbert an der angezogenen Stelle weiter keine Zweifel vor. Inzwiſchen iſt er doch nicht ſo ſchlechterdings mit dem Hrn. de Forcenex zufrieden, welcher in den Miſcellaneis ſocietatis privatæ Taurinenſis der Lehre des Hrn. Euler beytritt: er ſetzt ihm in dem Supplement au memoire ſur les logarithmes des quantités négatives, auf der 210 und f. S. der Opuſcules Mathematiques ſolche Zweifel entgegen, die auch gewiſſermaßen wider die Theorie des Hrn. Eulers gerichtet ſind. Allein ich hoffe, daß ich nicht allein im Stande ſeyn werde, auch dieſe Zweifel zu widerlegen, ſondern bey dieſer Gelegenheit zugleich verſchiedene Anmerkungen beyzufügen, die dazu dienen können, dieſe ganze Theorie von der Mannigfaltigkeit der Werthe der Logarithmen in ihr völliges Licht zu ſetzen. Die Analyſis des Hrn. Eulers ſetzt es außer Zweifel, daß der Satz ſelbſt richtig ſey: jede Zahl hat unzählig viele Logarithmen. Hr. von Segner ſetzt im IV Theil ſeines vortreflichen Curſus mathematici dieſe Analyſin noch vollſtändiger auseinander, und trägt dadurch zur Aufklärung dieſer Theorie nicht wenig bey. Inzwiſchen ſcheint die Theorie noch in der Abſicht unvollſtändig zu ſeyn, weil, ſo viel mir bekannt iſt, noch Niemand gewieſen hat, daß die geometriſche Conſtruction alle dieſe unzähligen Logarithmen einer Zahl ebenfalls darſtelle, und alſo die Geometrie auf die Frage: welches iſt der Logarithmus einer gegebenen Größe? grade eben ſo viele Antworten ertheile, als die Analyſis. Es ſcheint mir der Mühe nicht unwerth zu ſeyn, dieſe Unterſuchung vorzunehmen, nicht allein deswegen, weil ſich daraus aufs deutlichſte ergiebt, woher dieſe Mannigfaltigkeit ihren Urſprung habe; ſondern auch um deswillen, weil ſich eben dadurch ein weit größeres Licht über manche andere hiemit verwandte analytiſche Theorien verbreitet, wovon der Ausſpruch des Hrn. Bernoulli (Mem. de l'Acad., de Pruſſe 1753. p. 148.) welchen auch Hr. Kaeſtner bey einer ähnlichen Gelegenheit einmal anführt, ſonſt gelten möchte: une Analyſe abſtraite, qu'on écoute ſans aucun examen ſynthétique de la queſtion propoſée, eſt ſujette à nous ſurprendre plûtôt, qu'à nous éclairer. Bevor ich aber die Conſtruction ſelbſt vortrage, werde ich zuforderſt einige wenige die analytiſche Theorie ſelbſt betreffende Anmerkungen voran ſetzen.

§. 23.

In der erſten Abtheilung dieſer Abhandlung war meine Abſicht nur, den Satz überhaupt zu beweiſen: **In den gewöhnlichen Syſtemen ſind die Logarithmen negativer Größen unmöglich,** da ich dann zugleich Gelegenheit hatte, beyläufig verſchiedene von den Zweifeln, die Hr. d'Alenbert dagegen gemacht hatte, zu beantworten. Aber nun kann man weiter fragen: **Läßt ſich denn der Logarithme einer negativen Zahl gar nicht durch eine analytiſche Formul ausdrucken?** Man muß mit Ja antworten, und die Formul die man ſucht, läßt ſich ohne alle Schwierigkeit ſo heraus bringen. Es ſey e die Baſis der natürlichen Logarithmen, und man ſetze $l-a = p + q\sqrt{-1}$, ſo muß $-a = e^{p+q\sqrt{-1}}$ ſeyn. Man theile beyde Verhältniſſe $e:1$ und $-a:1$ oder $e^{p+q\sqrt{-1}} : 1$ in m gleiche Theile, und ſetze der Kürze wegen $p + q\sqrt{-1} = f$, ſo erhält man für den $m$ten Theil eines jeden dieſer Verhältniſſe folgende $e^{1:m} : 1$ und $e^{f:m} : 1$. Es werde $m = \infty$, ſo iſt $e^{1:m} : 1 = 1 + \frac{1}{m} : 1$ (1 Abtheil. §. 32.), alſo $e^{f\,m} : 1 = 1 + \frac{f}{m} : 1$, und $e^{f} = (1 + \frac{f}{m})^m = -a$. Aus dieſer Gleichung muß nun f geſucht werden. Sie giebt $1 + \frac{f}{m} = (-a)^{1:m}$ und alſo iſt die Frage, was $(-a)^{1:m}$ bedeute? Es ſey m eine ſehr große Zahl, aber noch nicht in der Schärfe $= \infty$, ſo iſt kein Zweifel, daß $(-a)^{1:m}$ nicht ſollte unmöglich ſeyn, wenn m eine grade Zahl iſt. Eigentlich nämlich hat $(-a)^{1:m}$ ſo viele Werthe, als m Einheiten enthält, dieſe ſind aber gewiß alle unmöglich, wenn m gerade iſt. Wäre m ungerade, ſo würde unter allen dieſen Werthen einer möglich und negativ ſeyn. Aber dieſer mögliche Werth, welchen $(-a)^{1:m}$ haben könnte, wenn m ungerade wäre, kann hier gar nicht gebraucht werden. Um alle die übrigen Werthe auf einmal zu überſehen, muß man bekanntermaßen die Zahl $-a$ mit der allgemeinen Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ oder $c(\cos\phi \pm \sin\phi\sqrt{-1}$ vergleichen, welche jede Zahl, ſie mag möglich oder unmöglich ſeyn, ausdrücken kann, wenn $c = \sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}$, $\sin\phi = \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha\alpha - \beta\beta)}}$ und $\cos\phi = \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}$, alſo $\alpha = c\cos\phi$ und $\beta = c\sin\phi$ iſt. Setzt man nun $-a = c(\cos\phi \pm \sin\phi\sqrt{-1})$ ſo wird $(-a)^{1:m} = c^{1:m}(\cos\frac{\phi}{m} \pm \sin\frac{\phi}{m} \times \sqrt{-1})$. Nun iſt im gegenwärtigen Fall $\alpha = -a$, und $\beta = 0$, alſo $\cos\phi = -1$, $\sin\phi = 0$, und $c = a$. Dieſemnach $\phi = \pm(2\lambda - 1)\pi$, und $(-a)^{1:m} = 1 + \frac{f}{m} = a^{1:m} \times (\cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2\lambda-1)\pi}{m})$. Hiebey iſt nun vor allen Dingen dieſes zu merken, daß zwar λ alle ganze Zahlen $0, 1, 2, 3$ und ſ. f. nach der Reihe bedeuten könne, aber nie eine ſo große Zahl, welche gegen m ein endliches Verhältniß hat. Wenn man alle Wurzeln haben wollte, ſo müßte man freylich fortgehen, bis $2\lambda - 1 = m$, oder $\lambda = \frac{m+1}{2}$ würde. Wäre nun m eine ungrade Zahl, ſo würde für $\lambda = \frac{m+1}{2}$, heraus kommen $1 + \frac{f}{m} = a^{1:m} \times -1$, welches nicht angehet, und der Vorausſetzung zuwider iſt; (denn $a^{1:m}$ iſt $= 1 + {}^{1:m}$, und hat hier keinen andern Werth, vermöge der Natur der Formul), dieſe mögliche negative Wurzel fällt alſo ganz weg. Iſt m grade, ſo kann ohnehin keine einzige Wurzel möglich ſeyn. Aber unter allen dieſen unmöglichen Wurzeln, ſind nur diejenigen um ein unmögliches Element von 1 unterſchieden, die aus der Formul ihren Urſprung haben, ſo lange $\frac{2\lambda-1}{m}$ unendlich klein, und alſo coſ $\frac{(2\lambda-1)\pi}{m} = 1$ und ſin $\frac{2\lambda-1\pi}{m} = \frac{(2\lambda-1)\pi}{m}$ iſt, und dieſe können nur gebraucht werden. In dieſer Vorausſetzung alſo: daß λ gegen m kein endliches Verhältniß bekomme, wird $1 + \frac{f}{m} = a^{1:m}(1 + \frac{(2\lambda-1)\pi}{m} \times \sqrt{-1})$. Es ſey der natürliche Logarithme von $a = l$, ſo iſt $a = e^{l}$, und $a^{1:m} = e^{l:m} = (1 + \frac{1}{m})^{l} = 1 + \frac{l}{m}$, alſo $1 + \frac{f}{m} = (1 + \frac{l}{m})(1 \pm \frac{(2\lambda-1)\pi}{m}\sqrt{-1}) = 1 + \frac{l}{m} \pm \frac{(2\lambda-1)\pi\sqrt{-1}}{m} \pm \frac{l(2\lambda-1)\pi}{mm}\sqrt{-1}$. Hieraus folgt $\frac{f}{m} = \frac{l}{m} \pm \frac{(2\lambda-1)\pi\sqrt{-1}}{m} \pm \frac{l(2\lambda-1)\pi\sqrt{-1}}{mm}$, und $f = l \pm (2\lambda-1)\pi\sqrt{-1}$.

§. 24.

In dieſen Formuln bedeutet $a^{1:m}$ die poſitive mögliche Wurzel der Ordnung m von a, keine andere, obgleich $a^{1:m}$ für ſich ebenfalls m verſchiedene Werthe hat. Dieſe Wurzel, welche hier allein verſtanden werden muß, iſt $1+\frac{l}{m}$, wenn $a=e^{l}$ und $e^{1:m}=1+\frac{1}{m}$ iſt. Weil man nun bey der gewöhnlichen Berechnung der Logarithmen poſitiver Größen keinen andern, als dieſen einzigen möglichen Werth von $e^{1:m}$ und $a^{1:m}$ in Betrachtung ziehet, ſo erhält man auch nur einen einzigen Werth für $l+a$. Man ſetzt nämlich alle mögliche poſitive Verhältniſſe aus dem Elementarverhältniß $1+\frac{1}{m}:1$ nach einem möglichen Exponenten zuſammen. Das Elementarverhältniß muß poſitiv ſeyn, wofern alle mögliche Zahlen mögliche Logarithmen haben ſollen. (1 Abtheil. §. 30). Aber aus eben dem poſitiven Elementarverhältniß laſſen ſich die poſitiven Verhältniſſe, auch nach einem **unmöglichen Exponenten**, zuſammen ſetzen. Es folgt alſo nicht, wenn das Elementarverhältniß poſitiv iſt, daß die poſitiven Verhältniſſe **keine andere als mögliche** Logarithmen haben ſollten. Denn man nehme nun an, es ſey der allgemeine Ausdruck des Logarithmen eines poſitiven Verhältniſſes dieſer: $p+q\sqrt{-1}$, ſo daß $l+a=p+q\sqrt{-1}$ iſt, und es wird $a=e^{p+q\sqrt{-1}}$ ſeyn müſſen. Der Kürze wegen ſey auch hier $p+q\sqrt{-1}=f$, ſo hat man $(+a)^{1:m}=e^{f:m}=(1+\frac{1}{m})^{f}=1+\frac{f}{m}$, wo $1+\frac{1}{m}$ die poſitive mögliche Wurzel der Ordnung m von e iſt. Wenn man nun $+a=\alpha+\beta\sqrt{-1}=c(\operatorname{coſ}\phi\pm\sqrt{-1}.\operatorname{ſin}\phi)$ ſetzt, ſo erhält man $+a=\alpha$, $\phi=0$, alſo $\operatorname{ſin}\phi=0$, $\operatorname{coſ}\phi=+1$, $c=a$, $\phi=2\lambda\pi$, und $a^{1:m}(\operatorname{coſ}\frac{2\lambda\pi}{m}\pm\sqrt{-1}.\operatorname{ſin}\frac{2\lambda\pi}{m}$. Es ſey der poſitive mögliche Werth von $a^{1:m}=1+\frac{l}{m}$, ſo wird $a^{1:m}=(1+\frac{l}{m})(\operatorname{coſ}\frac{2\lambda\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\operatorname{ſin}\frac{2\lambda\pi}{m})=1+\frac{f}{m}$, wo ſtatt λ wiederum alle ganze Zahlen 0. 1. 2. 3. u. ſ. w. geſetzt werden können. Man würde alsdann allererſt alle dieſe Wurzeln haben, wenn man bis auf $\lambda = \frac{1}{2} m$ gekommen wäre. Aber dieß würde die zweyte mögliche Wurzel $-(1 + \frac{l}{m})$ geben, welche ſchlechthin ausgeſchloſſen wird. Ueberdem können nur alle diejenigen Wurzeln, welche von 1 um ein unmögliches Element unterſchieden ſind, der Gleichung ein Genüge thun. Alſo darf man nur diejenigen nehmen, welche die Formul giebt, ſo lang λ gegen m kein endliches Verhältniß hat. Man darf alſo λ nicht unendlich groß nehmen, und in dieſer Vorausſetzung wird $1 + \frac{f}{m} = (1 + \frac{l}{m})(1 \pm \frac{2\lambda\pi}{m}\sqrt{-1}) = 1 + \frac{l}{m} \pm \frac{2\lambda\pi}{m}\sqrt{-1} \pm \frac{l.\,2\lambda\pi.\,\sqrt{-1}.}{mm}$ Dieß giebt $\frac{f}{m} = \frac{l}{m} \pm \frac{2\lambda\pi\sqrt{-1}}{m}\sqrt{-1} \pm \frac{l.\,2\lambda\pi\sqrt{-1}}{m.m}$, und $f = l \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$. Vermöge dieſer Analyſis wird alſo dasjenige beſtätiget, was ich im 21 §. gegen den Hrn. d'Alenbert erinnert habe, daß nämlich eigentlich λ nie unendlich groß genommen werden müſſe. Daß aber des Hrn. d'Alenberts Vorausſetzung einen richtigen Werth von y gab, wenn man mit der Gleichung gehörig umgieng, rührte daher, weil allemal, wenn man bis $\lambda = m$ gekommen iſt, die Reihe der Wurzeln wieder von neuem anfängt.

§. 25.

Auf die unmöglichen Größen, werde ich die Analyſin nicht anwenden, da ſie ſowohl von Hr. Euler, als auch von Hrn. von Segner vollſtändig genug ausgeführet, und die Anwendung leicht zu machen iſt. Hier kam es mir nur darauf an, es völlig evident zu machen, daß nicht alle Wurzeln, welche die Formul überhaupt geben kann, ſondern nur diejenigen genommen werden müſſen, welche von 1 um ein unmögliches Element unterſchieden ſind. Ich ſetze deswegen nur noch dieſe Anmerkung hinzu. Wenn

$a = e$ iſt, ſo iſt $le = 1$, alſo wird $e^{1:m} = (1 + \frac{1}{m})(1 \pm \frac{2\lambda\pi}{m}\sqrt{-1}) = 1 + \frac{1}{m} \pm \frac{2\lambda\pi}{m}\sqrt{-1} = 1 + \frac{1}{m}(1 \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1})$ und es enthält die Formul $1 + \frac{1}{m}(1 \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}) : 1$ alle Werthe, die das Elementarverhältniß haben kann, wenn ein poſitives Endliches daraus zuſammen geſetzt werden ſoll. Auf eben die Art findet man aus dem §. 23. $1 + \frac{1}{m}(1 \pm (2\lambda - 1)\pi\sqrt{-1}) : 1$ für den Ausdruck des Elementarverhältniſſes, daraus ſich alle negative Verhältniſſe zuſammen ſetzen laſſen. Jenes Verhältniß iſt $= (1 + \frac{1}{m})^{1 \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}}$, und dieſes $= (1 + \frac{1}{m})^{1 \pm (2\lambda - 1)\pi\sqrt{-1}} : 1$. Beyde Verhältniſſe kann man als ſolche anſehen, die das gemeinſchaftliche Maas $1 + \frac{1}{m} : 1$ haben, obgleich letzteres gar nicht anders, als nach einem unmöglichen Exponenten daraus zuſammen geſetzt werden kann. Alſo iſt das Verhältniß $1 + \frac{1}{m} : 1$ das gemeinſchaftliche Maas aller möglichen, ſowohl poſitiven, als negativen Verhältniſſe. Man kann aber jedes poſitive Verhältniß ſowohl, als auch jedes negative, auf unzählig viele verſchiedene Arten daraus zuſammen ſetzen, wenn die unmöglichen indices multiplicitatis nicht ausgeſchloſſen werden: und dieß iſt der Urſprung der mannigfaltigen Werthe, welche die Logarithmen einer und eben derſelben Zahl, in einem und eben demſelben Syſtem haben können. Das Syſtem bleibt daſſelbe ſo lange $l(1 + \frac{1}{m})^n = n:m$ bleibt, oder, wenn man $\frac{n}{m} = z$ ſetzet; ſo lange $l(1 + \frac{z}{m})^m = z$ bleibt. Aber nun wird auch $l(1 + \frac{1}{m})^n(\cos\phi \pm \sqrt{-1}\sin\phi) = \frac{n(\cos\phi + \sqrt{-1}\sin\phi).}{m}$ Wenn alſo nunmehro $\frac{n(\cos\phi + \sqrt{-1}\sin\phi}{m} = f$ geſetzt wird, ſo erhält man $n(\cos\phi + \sqrt{-1}.\sin\phi) = mf$ und $(1 + \frac{1}{m})^{n(\cos\phi \pm \sqrt{-1}\sin\phi)} = (1 + \frac{1}{m})^{mf} = (1 + \frac{f}{m})^m$, und $l(1 + \frac{f}{m})^m = f$. Aber $(1 + \frac{f}{m})^m$

kann jede gegebene Zahl bedeuten, und es kann f noch unzählige Werthe haben. Alſo gehören alle dieſe mannigfaltigen Werthe von f dennoch zu einerley Syſtem, deſſen Modulus $= 1$ iſt. Nun mag x bedeuten, was es wolle, ſo kann man $x = (1 + \frac{f}{m})^m$ ſetzen, das giebt $x^{1:m} = 1 + \frac{f}{m}$, und $f = mx^{1:n} - m. = lx$, wo alſo unter allen möglichen Werthen von $x^{1:m}$ nur diejenigen zu nehmen ſind, die von der 1 um ein mögliches oder unmögliches Element unterſchieden ſind, nachdem f möglich oder unmöglich iſt. Denn die übrigen können mit der Vorausſetzung nicht beſtehen, daß $1 + \frac{1}{m}$ das gemeinſchaftliche Maas aller Verhältniſſe ſeyn ſoll. Und hiedurch wird die völlige Richtigkeit der Analyſis des Hrn. Eulers erwieſen, wenn er in ſeinen Gleichungen ſtatt λ keine andere, als endliche Zahlen ſetzt.

§. 26.

Nunmehro ſey die gleichſeitige Hyperbel gewöhnlicher maſſen zwiſchen ihren Aſymtoten, TV, XY, verzeichnet, und die halbe Zwergaxe CA, welche der halben conjugirten Axe CE gleich iſt, ſey $= 1$ genommen. Iſt nun $MP = y$ eine rechtwinklichte Ordinate, der auf der Zwergaxe die Abſciſſe $CP = x$ zugehört; ſo hat man für die Hyperbel die Gleichung $y = \pm\sqrt{(xx - 1)}$. Man weis, daß beyde Werthe nur ſo lange möglich ſind, als $+x > +1$ und $-x > -1$ genommen wird. Inzwiſchen nehme man $CQ < 1$, ſo wird $y = \pm\sqrt{(CQ^2 - 1)} = \pm\sqrt{(1 - CQ^2)}\sqrt{-1}$. Man mache die Ordinate $QG = +\sqrt{(1 - CQ^2)}$ und $QH = -\sqrt{(1 - CQ^2)}$, ſo wird die der Abſciſſe $x = CQ$ zugehörige Ordinate $y = \pm QG\sqrt{-1}$ und $\pm QG = \frac{y}{\sqrt{-1}} = -y\sqrt{-1}$. Dieſemnach iſt QG eine unmögliche Ordinate der Hyperbel in eben dem Verſtande, in welchem CE die unmögliche halbe conjugirte Axe der Hyperbel heißt. Es wird nämlich $y = \pm\sqrt{-1}$ für $x = 0$, oder $y = \pm 1.\sqrt{-1}$. Nimmt man nun CE $=$ CF $= 1$, ſo wird $y = \pm CE \sqrt{-1}$, und $\pm CE = \frac{y}{\sqrt{-1}} = -y \sqrt{-1}$. Auf eben die Art kann man für alle x, die zwiſchen den Gränzen $+1$ und -1 fallen, die zugehörigen Ordinaten zeichnen, welche zwar an ſich mögliche Größen ſind, aber deswegen hier als unmögliche Größen in der Rechnung vorkommen, weil ſie Ordinaten der Hyperbel ſeyn ſollen, und es doch nicht ſind. Man ſetze $z = \pm \sqrt{(1-xx)}$, ſo wird für die Hyperbel $y = z \sqrt{-1}$, aber $z = \pm \sqrt{(1-xx)}$ iſt eine Gleichung für den Zirkel, der aus dem Mittelpunct C mit dem Halbmeſſer CA $= 1$ beſchrieben werden kann. Alle Ordinaten dieſes Zirkels ſind unmögliche Ordinaten der Hyperbel, weil $z = \frac{y}{-\sqrt{-1}} = \mp y \sqrt{-1}$ iſt. Aber auch umgekehrt, alle Ordinaten der Hyperbel ſind unmögliche Ordinaten des Zirkels, weil $y = z \sqrt{-1}$ iſt. Hieraus folget, daß der Zirkel ein unmögliches Stück der Hyperbel ſey, ſo wie die Hyperbel ein unmögliches Stück des Zirkels iſt. Der Zirkel hängt mit der Hyperbel in zwenen Puncten A und B zuſammen. Deswegen giebt es Bogen, die in der Hyperbel den einen Endpunct z. E. M, und im Zirkel den andern Endpunct z. E. G haben. Alle Bogen von dieſer Art können ſowohl unmögliche Bogen des Zirkels, als auch unmögliche Bogen der Hyperbel heißen. Beyde Linien haben bey A und B eine gemeinſchaftliche Tangente, und formiren bey dieſen Puncten zwey entgegengeſetzte Spitzen MAG, NAH, ingleichen mBF, nBE. Weil überdem alle die Bogen, welche in A ſowohl, als B zuſammen ſtoſſen, durch eine gemeinſchaftliche Gleichung ausgedrückt werden, ſo iſt jeder von den vier Bogen, die in A oder B zuſammen ſtoſſen, die Fortſetzung eines jeden der drey übrigen. Zwiſchen jeden zweyen Puncten alſo, davon der eine in der Hyperbel, der andre im Zirkel liegt, fallen unzählig viele verſchiedene Bogen. So fallen zwiſchen M und G folgende;

MAG, MAGEBFHAG, und überhaupt MAG $+ 2\lambda\pi$ ferner auch dieſe

MAHFBEG, und überhaupt MAHFBEG $+ 2\lambda\pi$, wo λ und π die vorhin ſchon gebrauchte Bedeutung haben. Wenn nun der Ausdruck Arc. Abſc. x den Bogen bedeutet, welcher in A anfängt, und da aufhört, wo die zu x gehörige Ordinate PM, oder PN die Hyperbel trift; ſo bezeichnet dieſer Ausdruck unzählig viele verſchiedene Bogen, nämlich alle folgende.

AM, AEBFAM, AEBFAEBFAM u. ſ. w. ingleichen AM, AFBEAM, AFBEAFBEAM, u. ſ. w.

Wenn die Bogen, ſo ſich von A durch E erſtrecken, mit + bezeichnet werden, ſo muß man diejenigen, ſo ſich von A durch F erſtrecken mit — bezeichnen. Alſo gehören dahin alle Bogen, welche der Ausdruck $\pm \lambda$ AEBFA + AM bezeichnet, wenn λ alle ganze Zahlen, 0. 1, 2, 3, u. ſ. w. andeutet. Wenn demnach der Ausdruck Sect. Abſc. x den Ausſchnitt bedeutet, welchen der jeder Abſciſſe x zugehörige Bogen der Hyperbel einſchließt, ſo bezeichnet eben dieſer Ausdruck unzählig viele verſchiedene Ausſchnitte, die alle zwiſchen CA, CM, und den von A bis M fortgehenden Bogen enthalten ſind.

§. 27.

Man weis aus den bekannten Eigenſchaften der Hyperbel, daß D. Sect. ACM $= \frac{dx}{2\sqrt{(xx-1)}} = \frac{dx}{2\sqrt{(1-xx)}\sqrt{-1}}$ ſey. Aber dieß iſt nicht allein ein Differential des Ausſchnitts, dem der Bogen AM zugehört, ſondern eines jeden andern, dem einer von den übrigen Bogen zugehört, die ſich von A bis M erſtrecken. Demnach iſt eigentlich D Sect. Abſc. $x = \frac{dx}{2\sqrt{(xx-1)}} = \frac{dx}{2\sqrt{(1-xx)}\sqrt{-1}}$, und durch die Integration erhält man Sect. Abſc. $x = \frac{1}{2}\, l(x + \sqrt{(xx-1)}) = \sqrt{-1} \times \frac{1}{2}$ Arc. coſ$x = \sqrt{-1}$. Sect. coſx, in der Vorausſetzung nämlich, daß dieſer Ausſchnitt $= 0$ ſey, wenn $x = 1$, wie denn dieß auch wirklich einer von den Werthen dieſes Ausſchnitts iſt, für $x = 0$. Frägt man alſo, welches der natürliche Logarithme von $x + \sqrt{(xx-1)}$ ſey, ſo frägt man in der That nach etwas, daß auf unzählig viele verſchiedene Arten beantwortet werden kann. So lange x kleiner als 1 iſt, wird Sect. coſx zwar für ſich eine mögliche Größe, weil aber dieſer Ausſchnitt hier als ein Ausſchnitt der Hyperbel angeſehen wird; ſo iſt er unmöglich. Für $x = 1$ iſt dieſer Ausſchnitt $= \pm \lambda\pi\sqrt{-1}$. Der natürliche Logarithme von $x + \sqrt{(xx-1)}$ iſt vermöge der Formul doppelt ſo groß, als dieſer Ausſchnitt, alſo erhält man $l + 1 = \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$. In der That drückt auch dieſes alle hyperboliſche Sectoren aus, deren Bogen in A anfangen und wieder aufhören. Sie ſind

AEBFA, 2 AEBFA, 3 AEBFA, u. ſ. w. oder
AFBEA, 2 AFBEA, 3 AFBEA, u. ſ. w.

Wenn $x > 1$ genommen wird, ſo hat man $l(x + \sqrt{(xx-1)} =$ 2 Sect. Abſc. x, das iſt, $l(x + \sqrt{(xx-1)})$, hat folgende Werthe. 2 ACM; 2 ACM $\pm$ 2 Sect. AEBFA; 2 ACM $\pm$ 4 Sect. AEBFA; u. ſ. w. oder 2 ACM; 2 ACM $\pm 2\pi\sqrt{-1}$; 2 ACM $\pm 4\pi\sqrt{-1}$; u. ſ. w. alſo überhaupt $l x + \sqrt{(xx-1)} =$ 2 ACM $\pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$, welches mit der Analyſi, völlig übereinſtimmt. Es kann nun $x + \sqrt{(xx-1)}$ eine jede poſitive mögliche Zahl, die > 1 iſt, ausdrücken, und man kann x allemal ſo nehmen, daß $x + \sqrt{(xx-1)}$ einer Zahl von dieſer Art gleich wird. Soll $x + \sqrt{(xx-1)} = 1 + A$ ſeyn, ſo wird $\sqrt{(xx-1)} = 1 + A - x$. Es iſt offenbar, daß dieß allemal eine einfache Gleichung werde: denn wenn man quadrirt, ſo erhält man $xx-1=(1+A)^2-2x(1+A)+xx$, wo xx nothwendig allemal heraus fällt; ſo daß $x=\frac{(1+A)^2+1}{2(1+A)}=1+\frac{AA}{2(1+A)}$, und folglich allemal größer als 1 wird. Der Ausdruck 2 Sect. coſ$x\surd-1$ bezeichnet nun noch immer ebenfalls den $l(x+\surd(xx-1)$, oder wie man es auch ausdrücken kann, den $l(x+\surd(1-xx)\surd-1$. Nun muß man ſich aber durch die Zeichen $\surd-1$ nicht verführen laſſen, hier eine andere Unmöglichkeit zu ſuchen, als wirklich da iſt. Da $x>1$ iſt, ſo iſt $\surd(1-xx)\surd-1$ eine mögliche Größe. Der hyperboliſche Ausſchnitt, den man ſucht, iſt wirklich ein unmöglicher Zirkelausſchnitt, weil man aber keinen Zirkelausſchnitt ſucht, ſondern den Hyperboliſchen, ſo iſt in dem Ausdruck 2 Sect. coſ. $x\surd-1$ die Unmöglichkeit auch nur ſcheinbar. Die Zeichen Sect. Abſc. x, und Sect. coſ. $x\surd-1$ ſind nun äquipollent, denn eigentlich iſt jetzt der Zirkelausſchnitt unmöglich, und Sect. coſ. $x=-$ Sect. Abſc. $x\surd-1$. Wenn man dieß in dem Ausdruck Sect. coſ. $x\surd-1$ ſubſtituirt, ſo hat man Sect. Abſc. x. Die möglichen Logarithmen ſind alſo mögliche Ausſchnitte der Hyperbel, dieſe aber ſind zugleich unmögliche Ausſchnitte des Zirkels, deſſen Durchmeſſer mit der Axe der Hyperbel einerley iſt. Von einer andern Unmöglichkeit iſt hier gar die Rede nicht. Uebrigens iſt hiebey noch anzumerken, daß der Ausdruck $\surd(xx-1)$ ſeiner Natur nach zweydeutig ſey, man kann ihn alſo auch negativ nehmen, und ſo hat man überhaupt 2 Sect. Abſc. $x=l(x\pm\surd(xx-1)$. Es iſt nämlich vermöge der bekannten Eigenſchaften der Hyperbel $\frac{x+\surd(xx-1)}{1}=\frac{1}{x-\surd(xx-1)}$, alſo $lx-\surd(xx-1)=-l(x+\surd(xx-1)$. Weil nun der Ausſchnitt ACN $=-$ACM; ſo wird ACN $=-l(x+\surd(xx-1)=lx-\surd(xx-1)$. Wenn man alſo in dem allgemeinen Ausdruck 2 Sect. Abſc. $x=lx\pm\surd(xx-1)$ das untere Zeichen braucht, ſo muß allemal der Ausſchnitt ver-

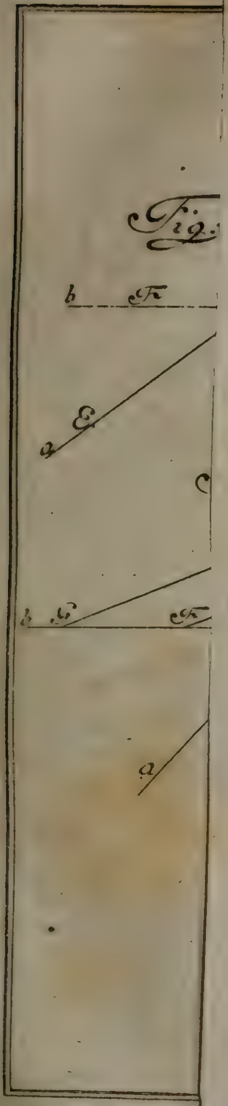
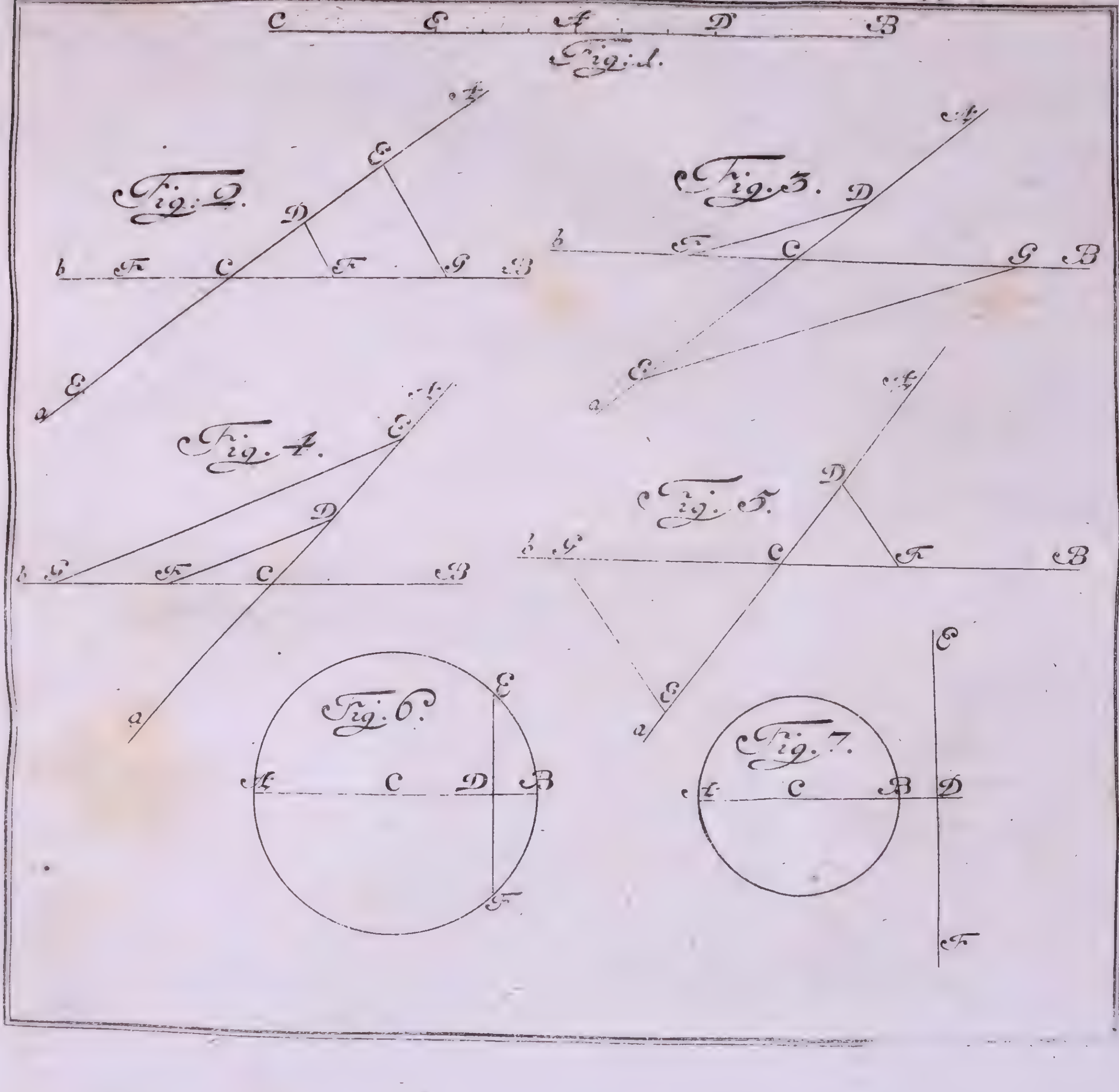
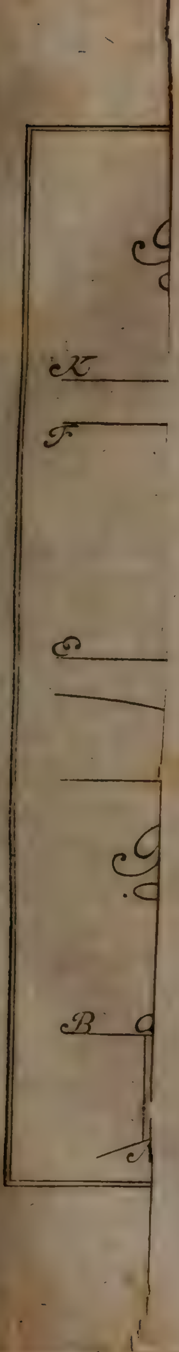


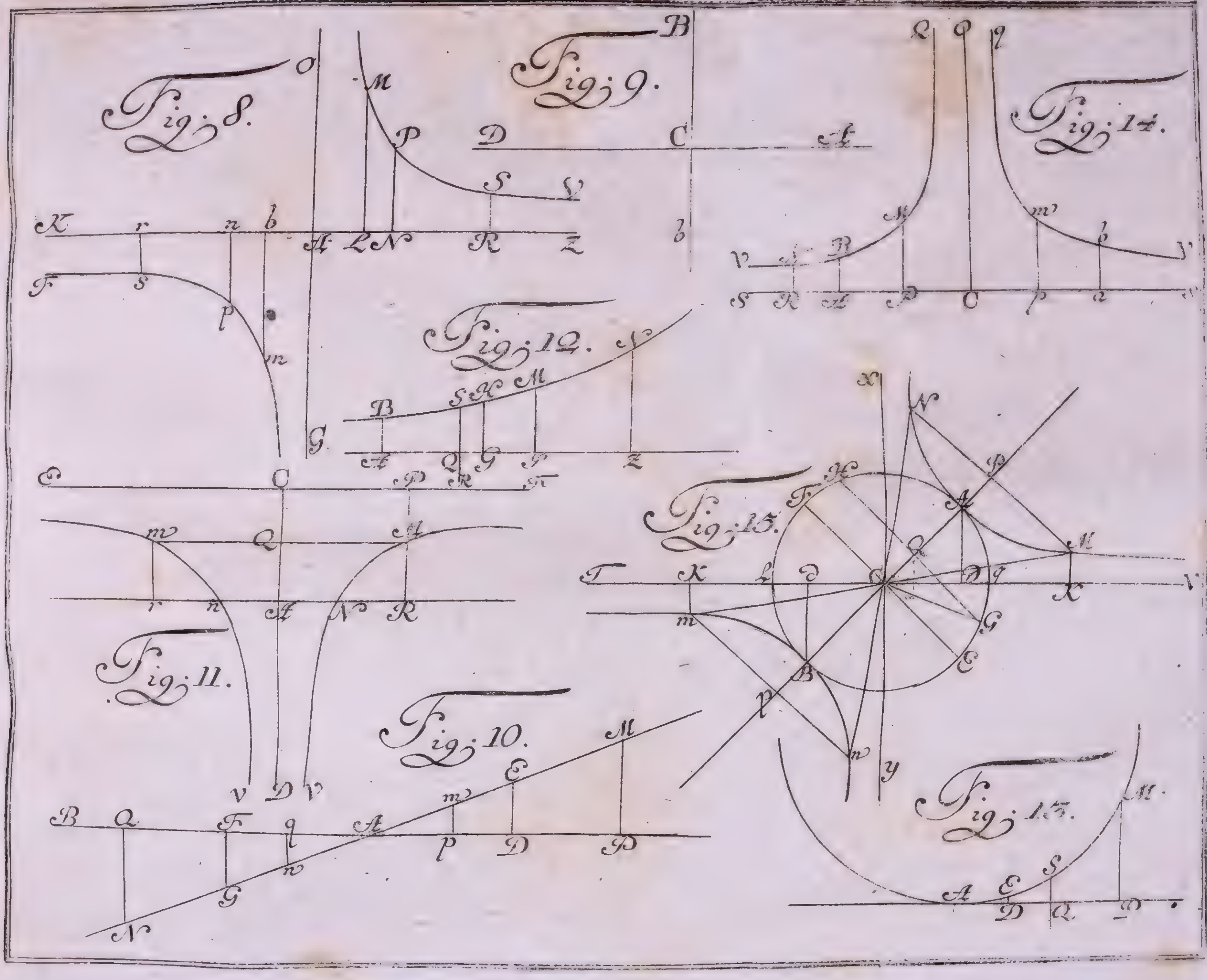
Fig.
b
F
E
a
C
b
G
F
a

5.ter B. Philoſoph. Abhandl. pag. 108. Tab. I.


C E A D B
Fig. 1.
Fig. 2.
A E D b F C F G B E a
Fig. 3.
A D b F C G B E a
Fig. 4.
A E D b G F C B a
Fig. 5.
A D b G C F B E a
Fig. 6.
E A C D B F
Fig. 7.
E A C B D F


G
K
F
E
G
B
A

5.ter B. Philosoph. Abhandlung. pag: 108. Tab. II.


Fig; 8.
Fig; 9.
Fig; 10.
Fig; 11.
Fig; 12.
Fig; 13.
Fig; 14.
Fig; 15.
O
M
P
S
V
B
D
C
A
K
r
n
b
A
L
N
R
Z
F
s
p
m
G
b
N
B
S
K
M
A
Q
G
P
Z
E
C
P
R
F
m
Q
A
r
n
A
N
R
v
D
v
B
Q
F
q
A
p
D
P
m
E
M
n
G
N
Q
Q
q
M
B
A
V
S
R
A
P
O
p
a
m
b
V
x
N
P
H
F
A
Q
T
K
L
d
O
d
q
M
V
X
m
G
E
B
p
n
y
M
A
E
S
D
Q
P

verſtanden werden, deſſen Bogen ſich von A bis N erſtreckt. Aber ſolcher Ausſchnitte giebt es wiederum unzählige, und alſo findet man für den Logarithmen eines jeden Bruchs folgende: 2 ACN; 2 ACN ± Sect. 2 AEBFA; 2 ACN ± 4 Sect. AEBFA; u. ſ. w. oder 2 ACN; 2 ACN $\mp 2\pi\sqrt{-1}$; 2 ACN $\mp 4\pi\sqrt{-1}$ u. ſ. w. alſo überhaupt $l(x-\sqrt{(xx-1)}) = 2\,ACN \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1} = -2\,ACM \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$. Es läßt ſich auch hier allemal x ſo nehmen, daß $x-\sqrt{(xx-1)}$ jeden gegebenen eigentlichen Bruch ausdrückt, wovon man ſich eben ſo, wie vorhin, überzeugen kann.

§. 28.

Die bisherige Verzeichnung, giebt alſo die Logarithmen aller poſitiven Zahlen von $+\infty$ bis zur 0. Wird nun $x<1$, ſo wird $x \pm \sqrt{(xx-1)}$ eine unmögliche Zahl. Man kann ſie jetzt am bequemſten auf dieſe Art ausdrücken: $x \pm \sqrt{(1-xx)}\sqrt{-1}$. Es ſey $x = CQ$, ſo iſt $QG = \sqrt{(1-xx)}$ eine unmögliche Ordinate der Hyperbel, aber eine mögliche Ordinate des Zirkels, und wenn man den Bogen $AG = \rho$ ſetzt, ſo iſt $x = \cos\rho$ und $\sqrt{(1-xx)} = \sin\rho$. Braucht man dieſe Ausdrücke, ſo wird 2 Sect. Abſc. $x = l(\cos\rho \pm \sin\rho.\sqrt{-1})$. Die Größe $\cos\rho. \pm \sin\rho\sqrt{-1}$ iſt unmöglich, und ſie hat unzählige Logarithmen, die ebenfalls insgeſammt unmöglich ſind. Jeder Ausſchnitt nämlich, der zwiſchen CA, CG, und dem von A nach G ſich erſtreckenden Bogen fällt, doppelt genommen, iſt ihr natürlicher Logarithme. Dieſe Bogen ſind aber

AG; AG + GBFAG; AG + 2 GBFAG, u. ſ. w. oder auch AFBG; AFBG + GAFBG; AFBG + 2 GAFBG, u. ſ. f.

Alſo ſind auch obiger Ausſchnitte unzählige, welche die Formul $\frac{1}{2}\rho\sqrt{-1} \pm \lambda\pi\sqrt{-1}$ überhaupt ausdrückt; daher erhält man $l(\cos\rho$

$+ \sin\rho\sqrt{-1}) = \rho\sqrt{-1} \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$ hat $\sin\rho\sqrt{-1}$. Das Zeichen — vor ſich, ſo iſt auch ρ negativ, und man muß die entgegengeſetzten Ausſchnitte nehmen, deren Bogen ſich von A nach H erſtrecken, und man erhält $l(\cos\rho - \sin\rho\sqrt{-1}) = -\rho\sqrt{-1} \mp 2\lambda\pi\sqrt{-1}$. Wird $x=0$, ſo fällt G in E und H in F, und es wird $l + \sqrt{-1} = \pm(\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1} \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1})$. Weil man auch $\lambda = 0$ nehmen kann, ſo iſt dieß die bernoulliſche Regel $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$, oder $\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{2}\pi$, und es erhellet, daß $l\sqrt{-1}$ hier kein andrer, als der natürliche Logarithme von $\sqrt{-1}$ ſeyn könne. Für negative x bleibt die Verzeichnung eben ſo, aber nur ſo lange, als $-x < -1$ iſt. Es wird nunmehro $\rho > 90°$, da dann noch $\sin\rho$ entweder poſitiv oder negativ ſeyn kann, obgleich $\cos\rho$ nun negativ iſt. Um nun hieraus abzunehmen, wie der Logarithme einer jeden unmöglichen Zahl ſich geometriſch verzeichnen laſſe, darf man nur bemerken, daß ſie allemal unter der Form $a + b\sqrt{-1}$, begriffen ſeyn werde. Demnach nehme man ρ ſo, daß $\tang\rho = b:a$ wird, ſo hat man $\sin\rho = \frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$, $\cos\rho = \frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$ und $a + b\sqrt{-1} = (\cos\rho + \sin\rho\sqrt{-1})\sqrt{(aa+bb)}$. Nun nehme man $ACM = l\sqrt{(aa+bb)}$, und $CQ = \frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$, da denn $QG = \frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$ wird, (man müßte QH nehmen, wenn b negativ wäre) ſo ſind alle Ausſchnitte, deren Bogen ſich von M nach G, oder auch von M nach H erſtrecken, diejenigen, welche man ſucht. Die hieher gehörigen Bogen ſind MAG; MAG + 2 GBFAG; MAG + 2 GBFAG, und ſ. f. ingleichen MAFBG; MAFBG + GAFBG; MAFBG + 2 GAFBG, und ſ. w. welches alles den euleriſchen Formuln völlig gemäß iſt.

§. 29.

§. 29.

Es werde nun $x = -1 = CB$, ſo iſt $x + \surd(xx-1) = -1$, $p = 180°$, und der Bogen, welche zwiſchen A und B fallen, ſind keine andere, als AEB; AEB + BFAEB; AEB + 2 BFAEB, u. ſ. f. oder auch AFB; AFB + BEAFB; AFB + 2BEAFB, u. ſ. f. daraus folgt, daß die Ausſchnitte, denen dieſe Bogen zugehören, doppelt genommen, die natürlichen Logarithmen von -1 ſind. Unter dieſen iſt gewiß keiner $= 0$, ſondern ſie ſind alle in der Formul begriffen $l-1 = \pm(2\lambda+1)\pi\surd-1$, und ich fürchte nicht, daß dieſe Verzeichnung einer Unrichtigkeit beſchuldiget werden könne. Wird $-x > -1$ ſo wird $-x \pm \surd(xx-1)$ eine negative Zahl, und auch hier ſtimmt die Verzeichnung mit der Analyſi völlig überein. Es ſey $x = -Cp$, und $+\surd(xx-1) = pn$, ſo iſt $l(-x+\surd(xx-1)$ der doppelte Ausſchnitt, zwiſchen CA, Cn und dem Bogen, welcher ſich von A bis n erſtreckt: dahin gehören nun die Bogen AEBn; AEBFAEBn, u. ſ. f. ingleichen AFBn, AFBEAFBn, u. ſ. f. demnach wird $l-x+\surd(xx-1) = \pm(2\lambda+1)\pi\surd-1 + 2\,BCn$. Aber es iſt $Bln = ACN = \frac{1}{2}l(+x-\surd(xx-1)$ wenn hier der mögliche Logarithme allein verſtanden wird. Alſo hat man $l(-x+\surd(xx-1) = l(+x-\surd(xx-1) \pm(2\lambda+1)\pi\surd-1$. Für eben die Abſciſſe $x = -Cp$ ſey $pm = -\surd(xx-1)$, ſo iſt $l(-x-\surd(xx-1)$ der doppelte Ausſchnitt zwiſchen CA, Cm, und dem Bogen, der ſich von A bis m erſtreckt. Aber ſolcher Bogen giebt es wiederum folgende: AEBm; AEBFAEBm, u. ſ. f. ingleichen AFBm; AFBEAFBm, u. ſ. f. dieſemnach wird $l(-x-\surd(xx-1)) = \pm(2\lambda+1)\pi\surd-1 + 2\,BEm$. Da nun wiederum $BCm = ACM = \frac{1}{2}l(x+\surd(xx-1))$, ſo erhält man $l(-x-\surd(xx-1)) = l(+x+\surd(xx-1)) \pm(2\lambda+1)\pi\surd-1$. Die Geometrie iſt alſo der leibnitziſchen Lehre, daß die Logarithmen negativer Größen unmöglich ſeyn, ſo wenig entgegen, daß ſie vielmehr dieſelbe völlig beſtätiget. Und wie die bisher vorgetragenen geometriſchen Verzeichnungen aufs genaueſte für jede Zahl alle diejenigen unzähligen Logarithmen ergeben, welche derſelben vermöge der euleriſchen Analyſis zugehören; ſo iſt dieß ein vortrefliches Beyſpiel davon, wie genau die geometriſche Verzeichnung mit der Analyſi übereinſtimme, daferne nur die Verzeichnung der analytiſchen Formul genau angemeſſen iſt, und ſie völlig erſchöpfet. So erſchöpfet dasjenige die Formul $x + \sqrt{(xx-1)}$ bey weitem nicht, was Hr. d'Alenbert auf der 215 und 216 S. der Opuſcules davon ſaget: und wenn Hr. d'Alenbert behauptet, daß die hyperboliſchen Ausſchnitte, wenn $-x > -1$ genommen wird, wieder möglich werden, ſo muß ich dieß ſchlechterdings läugnen, es ſey denn, daß man ſie von B an rechnet, und alſo für $x = -1$ wieder $= 0$ ſetzt: aber dann ſind ſie die Logarithmen von $\frac{-x+\sqrt{xx-1}}{-1} = + x \mp \sqrt{(xx-1)}$, und keinesweges die Logarithmen von $- x \pm \sqrt{(xx-1)}$.

§. 30.

Man kann die Gleichung Sect. Abſc. $x = lx + \sqrt{(xx-1)}$ überhaupt ſo ausdrücken $\rho\sqrt{-1} = l(\cos\rho \pm \sin\rho\sqrt{-1})$, dann wird $\cos\rho$ unmöglich als Abſciſſe des Zirkels, aber eine mögliche Abſciſſe der Hyperbel, wenn $\cos\rho > \pm 1$ genommen wird. Zugleich wird $\sin\rho$ ſowohl, als der Ausſchnitt ρ ſelbſt unmöglich, aber $\sin\rho \sqrt{-1}$ wird eine mögliche Ordinate und $\rho\sqrt{-1}$ ein möglicher Ausſchnitt der Hyperbel. Dieſe Gleichung braucht Herr Foncenex. Allein Hr. d'Alenbert iſt damit auf der 217 u. f. Seite gar nicht zufrieden. Inzwiſchen fallen nunmehro die Zweifel, ſo er dagegen macht, alle von ſelbſt weg. Sie ſind durch die vorhergehende Verzeichnung alle beantwortet, dieſe zeiget, daß man ſowohl eine Idée nette, als auch exacte (wie Herr d'Alenbert ſich ausdrückt, von einem unmöglichen Zirkelbogen haben könne. Es hat ſeine unſtreitige Richtigkeit, daß $\rho\sqrt{-1}$ den hyperboliſchen Ausſchnitt allemal bezeichne, und ſo, wie es gewiß iſt, daß $\rho\sqrt{-1}$ unzählige Werthe habe, wenn $x = \pm 1$; ſo iſt es auch gewiß, daß der hyperboliſche Ausſchnitt in eben den Fällen unzählige Werthe habe, und es iſt höchſt unrichtig, daß der hyperboliſche Ausſchnitt $= 0$ ſey, wenn $x = -1$. Es iſt ferner unrichtig, daß $\rho\sqrt{-1}$ wieder möglich werde, wenn man $x > -1$ nimmt, denn die Bogen oder Winkel ρ werden von A angerechnet, und für $x = -Cp$, beſtehet ρ aus einem möglichen Stück $\pm$ AEB, oder überhaupt $\pm(2\lambda+1)\pi$, und einem unmöglichen Winkel BCn, oder BCm; daher beſteht auch $\rho\sqrt{-1}$ aus einem unmöglichen und einem möglichen Stück, deren Summe gewiß unmöglich iſt. Für $+x > +1$ hat $\rho\sqrt{-1}$ deswegen einen möglichen Werth, weil der Winkel ACM unmöglich, und dieß einer von denen iſt, welche ρ in dieſer Vorausſetzung bedeutet.

§. 31.

Die hyperboliſchen Trapezien laſſen ſich bey dieſer Verzeichnung ſo bequem nicht, wie die Ausſchnitte, gebrauchen: und bey Verzeichnung der Logarithmen unmöglicher Größen dienen ſie gar nicht. Dieß rühret daher, weil in dem unmöglichen Stück der Hyperbel, dem Zirkel nämlich, die Gleichheit der Ausſchnitte, und der ihnen reſpondirenden Trapezien wegfällt; denn in dem Zirkel iſt das ſogenannte Parallelogrammum inſcriptum nicht mehr von beſtändiger Größe. Wenn man inzwiſchen die Trapezien gebrauchen will, ſo weit es angehet, ſo beſtätigen ſie alles dasjenige, was vermittelſt der Ausſchnitte gefunden wird. Es ſey, wie ſonſt gewöhnlich iſt, $AD = CD = 1$ geſetzt, ſo iſt $AC = \sqrt{2}$, und $ADKM = l\frac{CK}{CD} = l\,CK$. Wenn $CK = t$, und $km = u$; ſo ſchließt man jene Gleichung daraus, weil $d.\,ADKM = \frac{dt}{t}$ iſt; aber eben dieß Differential gehöret zu allen Trapezien, die zwiſchen DK, AD, MK, und den Bogen fallen, der ſich von A nach M erſtreckt. Alſo gehört hieher auch das Trapezium

$$ADI + IEBL + LHAD,\ ADKM$$

und überhaupt

$$\lambda.\,(ADI + IEBL + LHAD) + ADKM.$$

Ferner: $ADHL + LBEI + IDA + ADKM.$

und überhaupt

$$\lambda\,(ADHL + LBEF + IDA) + ADKM.$$

Da aber nunmehro die Peripherie des Zirkels, welcher das unmögliche Stück der Hyperbel ausmacht, $= 2\pi\sqrt{2}\sqrt{-1}$ und alſo die Fläche deſſelben $ADI + IEBL + LHAD = 2\pi\sqrt{2}\sqrt{-1} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\pi\sqrt{-1}$ iſt, ſo wird eigentlich das Trapez. Abſc. $t = ADKM \pm 2\lambda\pi.\sqrt{-1}$. Nimmt man $-Ck$ ſtatt CK, ſo iſt das Trapez. Abſc. $-t$ keinesweges $= Bdnm$, wenn die Vorausſetzung bleibt, daß das Integral $\int\frac{dt}{t} = o$ ſeyn ſoll, wenn $t = +1$ iſt. Soll das Trapz. Abſc. $t = Bdkm$ ſeyn können, ſo muß das Integral $\int\frac{dt}{t} = o$ ſeyn, wenn $t = -1$ iſt. Dann aber wird Trapez. Abſc. $-t = l-t-l-1 = l\frac{-t}{-1} = l+t$. Aber in der Vorausſetzung, daß das Integral nur $= o$ ſey, wann $t = +1$ iſt, welche nicht geändert werden darf, hat das Trapez. Abſc. $-t$ folgende Werthe

$$ADI + IEBd + Bdkm,$$

$$ADI + IEBd + BdL + LHAI + IEBd + Bdkm,\ \text{u. ſ. f.}$$

ingleichen

CAHL

$$DAHL + LdB + Bdkm$$

$$DAHL + LdB + dBEI + IAHL + LdB + BDkm, \text{ u. ſ. f.}$$

oder überhaupt dieſe $(2\lambda+1)\pi\sqrt{-1} + Bdkm = (2\lambda+1)\pi\sqrt{-1} + l + k$.

§. 32.

So leidet es alſo wohl weiter gar keinen Zweifel, daß dasjenige ſeine Richtigkeit habe, was ich am Ende des §. 2. behauptet habe. Zwiſchen jeden zwenen mit der Aſymtote xy parallelen Ordinaten fällt eine mögliche Fläche der Hyperbel, dafern beyde Ordinaten auf einer und eben derſelben Seite der Aſymtote xy liegen. Aber jede Fläche der Hyperbel iſt unmöglich, die zwiſchen zween ſolchen Ordinaten fällt, davon die eine auf der einen, die andere auf der andern Seite der Aſymtote xy liegt, dergleichen AD und mk ſind. Es wird nämlich vorausgeſetzt, daß die Fläche zwiſchen den beyden parallelen Ordinaten AD und mk, dem Stück der Abſciſſe Dk, und demjenigen Bogen der Hyperbel enthalten ſey, der ſich von A nach m erſtreckt: aber von A nach m erſtreckt ſich gar kein möglicher Bogen der Hyperbel. Wenn man ſich, wie gewöhnlich die Vorſtellung macht, der Bogen werde beſchrieben, indem der Punct A von A nach m vorgehet, ſo iſt es ſchlechterdings unmöglich, daß A durch den möglichen Aſt AN fortgehen, niemal aus dieſem Aſt durch einen ununterbrochnen möglichen Weg in den Aſt Bn hinein kommen, und ſodann durch B nach m hin gelangen könne. Weil nämlich die Aeſte AN und Bn auf entgegengeſetzten Seiten der Aſymtote xy liegen, und längſt den entgegengeſetzten Stücken derſelben Cx, Cy ſich bis ins unendliche erſtrecken, ſo iſt es ſchlechterdings unmöglich, daß ſie einmal zuſammen ſtoſſen könnten. Ich denke nicht, daß man ſagen werde, ſie ſtoſſen im unendlichen zuſammen, das wäre eben ſo ungereimt, als wenn man ſagen wollte, die beyden entgegengeſetzten Stücke Cx und Cy der graden Linie

xy, wenn man ſie nach beyden entgegengeſetzten Seite verläugnete, müßten einmal im unendlichen im x und y zuſammen ſtoſſen. Es iſt gar kein möglicher Weg von A nach m zu kommen, wenn der Punct A in der Hyperbel bleiben ſoll. Inzwiſchen verbindet die Gleichung der Hyperbel die beyden entgegengeſetzten Stücke derſelben MAN, mBn, vermittelſt des Zirkels AEBF, und macht denſelben zu einem unmöglichen Stück der Hyperbel. Dieſerwegen kann A in der Peripherie des Zirkels fortgehen, und auf die Art durch B nach m hinkommen, weil aber der Weg, welchen A auf ſolche Art nehmen muß, aus einem unmöglichen und möglichen Stück der Hyperbel beſtehet, ſo iſt doch allemal der Bogen der Hyperbel von A bis m ein unmöglicher Bogen, und dieſemnach ſowohl das Trapezium zwiſchen AD und mk, als auch der Ausſchnitt zwiſchen CA und Cm eine **unmögliche** Fläche der Hyperbel.

Theorie
von den
Projectionen der Kugel
zum
aſtronomiſchen und geographiſchen Gebrauch
von
W. J. G. Karſten
1766.

1 §.

Unter den beſondern Vorwürfen, womit ſich die ausübende Mathematik beſchäftiget, iſt zwar vieleicht keiner mehr übrig, worauf man die Analyſin nicht bereits angewandt, und eben dadurch dieſe Wiſſenſchaft zu einem neuen Grad der Vollkommenheit gebracht hätte. Inzwiſchen ſcheint es, daß man bey einigen ſich bisher begnügt habe, nur zu zeigen, wie ſich die Analyſis darauf anwenden ließe, ohne der Theorie die gehörige Vollſtändigkeit zu geben, damit ihr Nutzen in der Ausübung unmittelbar in die Augen leuchte. Es iſt gewiß, daß ſich ganze Wiſſenſchaften durch Hülfe analytiſcher Kunſtgriffe auf ſehr wenige allgemeine Formuln bringen laſſen, die ein Meiſter in der Kunſt allemal ohne große Schwierigkeit weiter entwickeln kann. Allein man kann doch nicht ſagen, daß die Formuln ſchon brauchbar gemacht ſind, bevor alle beſondre in der Ausübung dienliche Regeln daraus ſind hergeleitet worden. Man muß den ganzen Zuſammenhang aller ſpeciellen Fälle mit der allgemeinen Theorie zeigen, wenn die letztere für die Ausübung nutzbar werden ſoll. Diejenigen, welche ſich mit der Ausübung beſchäftigen, ſind nur ſelten mit den nöthigen Känntniſſen verſehen, welche erfordert werden, die practiſchen ſpeciellen Regeln aus der allgemeinen Theorie herzuleiten. Dadurch wird der Werth einer an ſich ſchönen Theorie allemal erhöhet, wenn ſie auf leichte und vortheilhafte Regeln für die Ausübung leitet.

2 §.

Die mancherley Arten, eine Kugel mit ihren Kreiſen, die der Aſtronom und Geograph darauf verzeichnet, auf einer Ebene perſpectiviſch abzubilden, ſind den Alten lange bekannt geweſen, bevor die Analyſis zu der heutigen Vollkommenheit iſt gebracht worden. Sie nannten dieſe Abbildungen Planiſphæria, auch Aſtrolabia. Jetzt iſt der Name der Projectionen am gewöhnlichſten. Man bedient ſich ihrer häufig ſowohl in der Aſtronomie, als Geographie, und die Verzeichnung der geographiſchen Charten iſt ein wichtiges Stück in der Ausübung, bey dem dieſe Projectionen gebraucht werden. Unter den mancherley Arten dieſe Projectionen der Kugel zu zeichnen, ſind vornehmlich folgende zwo merkwürdig. Die Tafel iſt die Ebene eines größten Kreiſes der Kugel, und das Auge ſtehet in der Axe deſſelben. Nachdem man nun entweder vorausſetzt, daß das Auge unendlich weit, oder nur um den Halbmeſſer der Kugel von der Tafel entfernt ſey, nachdem heißt die Projection **orthographiſch** oder **ſtereographiſch**. Jene hat man beſtändig in der Aſtronomie gebraucht, die Erde abzubilden, bey den Verzeichnungen der Sonnenfinſterniſſe, und andrer ähnlicher Erſcheinungen am Himmel; bis Herr **Lambert** nur im vorigen Jahr gewieſen hat, daß man ſich hier der ſtereographiſchen Projection weit vortheilhafter bedienen könne, in ſeiner Beſchreibung und Gebrauch einer neuen ecliptiſchen Tafel: nachdem der unter den deutſchen Geographen ſo berühmte Herr **Haſe** bereits eben den Gedanken gehabt, und überhaupt die Vorzüge dieſer Projectionsart angezeigt hatte, in der Sciographia integri tractatus de conſtructione mapparum omnis generis Geographicarum, Hydrographicarum & Aſtronomicarum, Lipſ. 1717. Die Schrift ſelbſt, wovon Hr. Haſe hier den Abriß liefert, iſt nie gedruckt worden, und es fehlet bis jetzt noch an einer vollſtändigen Ausführung dieſer Theorie zum unmittelbaren Gebrauch in der Ausübung. Hr. v. Wolf trägt im IV Tomo ſeiner Element. Math. im IX Cap. der Geographie nur den leichteſten Fall davon vor.

3 §.

Das wichtigſte, was von dieſer Theorie ſeit der Zeit öffentlich bekannt geworden, iſt ohne Zweifel die kaeſtneriſche Ausführung in dem zu Leipzig herausgegebenen Programma: Perſpectivæ & projectionum Theoriæ generalis analytica, welche der berühmte Hr. Verfaſſer auch nachher ſeiner deutſchen Ausgabe von Smiths Optik angehängt hat. Allein dieſer große Geometer begnügt ſich damit, die Theorie im Allgemeinen ausgeführt zu haben, und macht nur eine kurze Anwendung auf den in den wolfiſchen Elementis gleichfalls berührten Fall der ſtereographiſchen Projection, nebſt noch zween andern Fällen, da die Tafel die Kugel berührt. Ich glaube daher, daß es der Mühe nicht unwerth ſey, dieſe allgemeine Theorie der Ausübung näher zu bringen. Bey Entwickelung der allgemeinen Theorie werde ich in der Hauptſache der Ausführung des Hrn. Kaeſtners folgen, jedoch mit einiger Veränderung der Formuln, um dadurch die Anwendung auf die ſpeciellen Fälle deſto mehr zu erleichtern.

Allgemeine Theorie der Projectionen.

4 §.

Wenn zwiſchen einer Sache LM (1 Fig.) und dem Auge O eine durchſichtige Ebene, oder die Tafel CD ſtehet, ſo werden alle Stralen, die von jedem Punct der Sache M, L, u. ſ. f. ins Auge O kommen, die Tafel in den ſo vielen Puncten I, K, u. ſ. f.

durchboren. Das Auge hat einerley Empfindung, ob es die Stralen uumittelbar von der Sache LM, oder von den zugehörigen Puncten I, K, u. ſ. f. der Tafel empfängt. Deswegen heißt ein jeder Punct K, in welchem der Stral LO durch die Tafel ins Auge gehet, das **Bild** oder die **Projeetion** des Puncts L, und alle Puncte I, K, u. ſ. f. zuſammen machen das Bild der Sache LM auf der Tafel aus.

5 §.

Wird die Ebene der Tafel CD von einer andern Ebene AB in der graden Linie CE ſenkrecht geſchnitten, ſo heißt dieſe Ebene AB die Fundamentalebene, wovon man gemeiniglich annimmt, daß ſie horizontal ſey. Ihre Durchſchnittslinie CE mit der Tafel heißt die **Fundamentallinie.** Dafern nun auf der Tafel die Fundamentallinie gegeben iſt, und in derſelben ein bekannter Punct C, ſo läßt ſich die Lage des Auges O gegen die Tafel auf folgende Art beſtimmen. Vom Auge O ſey OS auf die Fundamentalebene ſenkrecht gezogen, und von S die Linie ST auf der Fundamentallinie, alſo auch auf der Tafel lothrecht. Wenn nun die Größe der dreyen Linien CT, ST, SO bekannt iſt, ſo iſt die Lage des Auges gegen die Tafel bekannt. Man lege durch OST eine Ebene OSTR, welche die Tafel in TR ſchneidet, ſo iſt auch dieſe Ebene auf der Tafel und der Fundamentalebene ſenkrecht. Sie kann die Ebene des Auges heißen. Alſo iſt RT auf der Ebene AB folglich auf ST ſenkrecht. Man ziehe OR auf RT alſo auf der Tafel ſenkrecht, ſo wird nun OS der Abſtand des Auges von der Fundamentalebene, oder die Höhe des Auges, ST = OR der Abſtand des Auges von der Tafel, CT der Abſtand der Ebene des Auges von dem bekannten Punct C in der Fundamentallinie. Wenn die Lage der Ebene des Auges ſonſt ſchon bekannt iſt, ſo braucht man CT nicht zur Beſtimmung der Lage des Au-

Auges, ſondern nur OS und ST, da dann der Punct R, wo die Diſtanz des Auges die Tafel trift, der Augenpunct heißt.

6 §.

Wenn ein Punct M in der Fundamentalebene liegt, ſo beſtimmt man ſeine Lage gegen die Tafel auf folgende Art. Von M ſey MN auf der Fundamentallinie ſenkrecht gezogen: dieß wird der Abſtand des Puncts M von der Tafel ſeyn. Weis man nun die Größe der Linien CN und CM, ſo iſt die Lage des Puncts M gegen die Tafel bekannt. Und wenn die Lage der Ebene des Auges als bekannt angenommen wird, ſo iſt die Lage des Puncts M beſtimmt, wenn man TN und MN kennet. Geht nun der Lichtſtral MO durch die Tafel in I, ſo daß I das Bild des Puncts M iſt, ſo ſey IW auf der Fundamentallinie ſenkrecht. Kennet man nun CW und WI, oder auch TW und WI, ſo iſt die Lage des Bildes I auf der Tafel bekannt. Wäre L ein Punct außer der Fundamentalebene, ſo bedarf man dreyer Linien zur Beſtimmung ſeiner Lage gegen die Tafel. Es ſey nämlich LM auf der Fundamentalebene und MN auf der Fundamentallinie ſenkrecht, ſo iſt die Lage des Puncts L beſtimmt, wenn man CN oder TN, ferner NM und ML kennet. Zur Beſtimmung der Lage des Bildes K auf der Tafel werden nur zwo Linien CW oder TW und WK erfordert, wenn KW auf der Fundamentallinie ſenkrecht iſt.

7 §.

Die Lage des Auges *O* (1 Fig.) gegen die Tafel, und die Lage des Puncts *M* in der Horizontalebene ſind gegeben; man ſoll das Bild *I* auf der Tafel finden.

Aufl. Wenn die Vorausſetzungen des 5 und 6 §. bleiben, ſo iſt IW auf CW ſenkrecht, alſo auch auf der Ebene AB, und deswegen ſind IW und OS parallel. Die Ebene OSWI dieſer Parallelen ſchneidet AB in der graden Linie SW; und weil M in der graden Linie OI liegt, ſo muß dieſer Punct M in beyden Ebenen OSWI und AB zugleich, folglich in der verlängerten Durchſchnittslinie SW liegen. Nun iſt das Dreyeck MWNSTW, alſo $MW : MN = WS : ST$, und $MW + WS : MN + ST = MW : MN$, oder $MS : MW = MN + ST : MN$. Aber auch $MS : MW = OS : IW$, alſo 1) $MN + ST : MN = OS : IW$. Ferner iſt $TW : TS = WN : MN$, alſo $TN : TS + MN = TW : TS$, oder auch 2) $CN - CT : TS + MN = TW : TS$. Es ſey nun $OS = a$, $ST = \delta$, $CT = e$, $CN = f$, $MN = d$, ſo wird 1) $d + \delta : d = a : IW$, und 2) $f - e : d + \delta = TW . \delta$: alſo iſt 1) $IW = \frac{ad}{d+\delta}$, und 2) $TW = \frac{(f-e)\delta}{d+\delta}$. Wenn der Punct T ſelbſt unmittelbar bekannt iſt, ſo iſt es ſoviel, als wenn C mit T zuſammen fiele, oder $T = e = 0$ wäre. Dann iſt $TN = f$, und $CW = TW = \frac{f\delta}{d+\delta}$.

8 §.

Die Lage des Puncts *L* (1 Fig.) über der Fundamentalebene iſt gegeben, man ſoll ſeine Projection *K* auf der Tafel finden.

Aufl. Man ſetze die ſenkrechte Linie $LM = \alpha$, und ſuche des Puncts M Projection I. Weil nämlich KW auf der Fundamentallinie, alſo auf der Ebene AB ſenkrecht iſt, ſo ſind OS, KW parallel; in der Ebene SOKW dieſer Parallelen liegt OK, alſo auch L, und folglich LM, weil auch LM mit OS und KW parallel iſt. Alſo liegt M wieder in der verlängerten Durchſchnittslinie SW: und weil OM in der Ebene SOLM liegt, ſo wird KW von CM irgendwo in I geſchnitten, ſo daß I des Puncts M Projection

jection iſt. Bleiben demnach die Bezeichnungen des vorigen §. ſo iſt $CW = \frac{(f-e)\delta}{d+\delta}$, und $Wf = \frac{ad}{d+\delta}$. Deswegen darf nur noch IK geſucht werden. Da dann IK dasjenige iſt, was ſonſt die perſpectiviſche Höhe des Puncts L heißt, deſſen wahre Höhe LM iſt. Nun hat man aus der Proportion $MW : MN = WS : ST$ (7 §.) auch dieſe $MS : MN + ST = WS : ST$. Ferner $MS : WS = OM : OI$, und $OM : OI = LM : IK$, alſo wird $MN + ST : ST = LM : IK$, und $IK = \frac{\alpha\delta}{d+\delta}$, folglich $WK = WI + IK = \frac{ad+\alpha\delta}{d+\delta}$.

9 §.

Es iſt die Lage der Ebene *XY* (2 Fig.) gegen die Fundamentalebene *AB*, alſo auch gegen die Tafel *CD* gegeben; in dieſer Ebene *XY* iſt eine krumme Linie *Lm* verzeichnet, und ihre Natur durch eine Gleichung zwiſchen rechtwinklichten Ordinaten bekannt, ſo daß die Durchſchnittslinie *XF* die Abſciſſenlinie iſt; die Lage des Auges gegen die Tafel iſt gleichfalls gegeben: man ſoll eine Gleichung zwiſchen rechtwinklichten Coordinaten für die Projection *Kn* der Linie *Lm* ſuchen, ſo daß die Abſciſſen auf der Fundamentallinie genommen werden.

Aufl. Die Lage der Ebene XY gegen die Ebene AB muß auf folgende Art beſtimmt ſeyn. Man ſetze ihre Durchſchnittslinie Ff mit der Ebene AB ſtoſſe verlängert mit der Fundamentallinie in H zuſammen, und ſchneide die Fundamentallinie unter dem Winkel $FHT = \eta$. Ueberdem ſey der Neigungswinkel der Ebene XY gegen die Fundamentalebene $AB = d$. Weil nun die Lage der Ebene des Auges bekannt iſt, ſo iſt T ein bekannter Punct in der Fundamentallinie. Dafern alſo die Linie TH nebſt den

Winkeln η und d bekannt iſt, ſo iſt die Lage der Ebene XY völlig bekannt. Man ziehe ferner LF auf auf XF ſenkrecht, ſo wird LF eine rechtwinklichte Applicate der Linie Lm für Abſciſſen, die man auf der Axe XY von einem bekannten Punct rechnet. Ein ſolcher Punct, den man hiezu erwählen kann, iſt bekannt, wenn von T auf XF die Linie TE ſenkrecht gezogen wird. Denn man ſetze $HT = b$, ſo iſt $ET = b\sin\eta$, und $HE = b\cos\eta$, daß alſo des Puncts E Entfernung von H bekannt iſt. Weil nun auch der Anfangspunct der Abſciſſen der Linie Lm durch ſeinen Abſtand von H gegeben ſeyn muß, ſo iſt auch der Abſtand dieſes Puncts von E bekannt, und man kann die Gleichung der Linie Lm leicht ſo einrichten, daß E der Anfangspunct der Abſciſſen wird. Wenn nun $EF = x$, $FL = y$ iſt, ſo hat man eine Gleichung zwiſchen x und y. Nun ſey K des Puncts L Projection, und KW auf der Fundamentallinie ſenkrecht, ſo iſt WK eine rechtwinklichte Ordinate für die Linie Kn, wenn die Abſciſſen auf der Fundamentallinie von einem bekannten Punct genommen werden. Für dieſen Punct kann man T nehmen, ſo daß die Sache nun darauf ankommt, eine Gleichung zwiſchen TW und WK zu finden. Setzt man demnach $TW = t$, $WK = u$, ſo muß man ein paar Gleichungen ſuchen, welche x und y durch t und u ausdrücken. Wenn man hiernächſt dieſe Werthe ſtatt x und y in der Gleichung der Linie Lm ſetzt, ſo hat man die geſuchte Gleichung zwiſchen t und u.

Um nun zu finden, wie t und u von x und y abhängen, darf man nur folgendes in Erwegung ziehen. Es ſey LM auf der Ebene AB, und MN auf der Fundamentallinie ſenkrecht; ſo ſiehet man leicht, daß TN, NM, ML durch TE, EF, FL, und den Winkel d beſtimmt werden. Wie aber $TW = t$, und $WK = u$ von TN, NM, ML abhängen, iſt aus dem vorigen 7 u. 8 §. bekannt. Setzt man demnach $TN = f$, $NM = d$, und $ML = \alpha$, ſo iſt

$t =$

$t = \frac{f\delta}{d+\delta}$, und $u = \frac{ad+\alpha\delta}{d+\delta}$. Alſo darf man nur f, d, und α durch TE, EF, FL und d ſuchen. Zieht man aber MF ſo iſt MFL $= d$, und man hat 1) $\alpha = y \sin d$, daß alſo nur noch d und f zu ſuchen ſind. In ſolcher Abſicht ſey FR mit MN parallel, alſo auf TN ſenkrecht gezogen, FG aber ſey mit TN parallel, und ſchneide MN in G, ſo wird FRNG ein Rechteck, und überdem das Dreyeck FHR bey R rechtwinklicht. Weil ferner FM mit TE und FG mit TH als der verlängerten TN parallel iſt, ſo wird MFG $=$ HTE $= 90° - \eta$, alſo FMG $=$ EHT $= \eta$. Demnach iſt MG $=$ MF $\cos\eta$, und FG $=$ MF $\sin\eta$. Aber MF $= y\cos d$, alſo MG $= y\cos d \cos\eta$, und FG $= y\cos d \sin d =$ NR, ferner GN $=$ MN $+$ MG $= d + y\cos d \cos\eta$. Aber im Dreyeck FHR hat man FR $=$ HF $\sin\eta$, und HF $= b\cos\eta + x$, alſo FR $= b\sin\eta\cos\eta + x\sin\eta =$ PN. Vorhin war GN $= d + y\cos d\cos\eta$, alſo erhält man $d + y\cos d \cos\eta = b\sin\eta\cos\eta + x\sin\eta$, und dieß giebt 2) $d = b\sin\eta\cos\eta + x\sin\eta - y\cos d\cos\eta$. Auf ähnliche Art ergiebt ſich f. Denn im rechtwinklichten Dreyeck FHR iſt auch HR $=$ HF $\cos\eta = b\cos\eta^2 + x\cos\eta$, und NR $=$ HT $+$ TN $-$ HR $= b + f - b\cos\eta^2 - x\cos\eta$. Vorhin war NR $= y\cos d\sin\eta$, alſo wird $b + f - b\cos\eta^2 - x\cos\eta = y\cos d\sin\eta$, oder $f + b\sin\eta^2 - x\cos\eta = y\cos d\sin\eta$. Daraus folgt 3) $f = y\cos d\sin\eta - b\sin\eta^2 + x\cos\eta$. Setzt man nun die gefundenen drey Werthe ſtatt α, d und f in den beyden Gleichungen $t = \frac{f\delta}{d+\delta}$ und $u = \frac{ad+\alpha\delta}{d+\delta}$, ſo hat man t und u durch x und y, folglich auch umgekehrt x und y durch t und u. Es wird nämlich

$$t = \frac{\delta y \cos d \sin\eta - b\delta \sin\eta^2 + \delta x \cos\eta}{b\sin\eta\cos\eta + x\sin\eta - y\cos d\cos\eta + \delta}$$

$$u = \frac{ab\sin\eta\cos\eta + ax\sin\eta - ay\cos d\cos\eta + \delta y \sin d.}{b\sin\eta\cos\eta + x\sin\eta - y\cos d\cos\eta + \delta.}$$

Man ſchaffe aus dieſen beyden Gleichungen zuerſt y weg, ſo giebt die erſte:

$$bt\sin\eta\cos\eta + xt\sin\eta - yt\cos d\cos\eta + \delta t - \delta y\cos d\sin\eta + b\delta\sin\eta^2 - \delta x\cos\eta = 0$$

und die zweyte

$$vu\sin\eta\cos\eta + xu\sin\eta - yu\cos d\cos\eta + \delta u - ab\sin\eta\cos\eta - ax\sin\eta + ay\cos d\cos\eta - \delta y\sin d = 0.$$

Dieſe Gleichungen kann man ſo ordnen:

$$(t\cos d\cos\eta + \delta\cos d\sin\eta)\,y + \delta x\cos\eta - b\delta\sin\eta^2 - \delta t - xt\sin\eta - bt\sin\eta\cos\eta = 0,$$

$$(a\cos d\cos\eta - u\cos d\cos\eta - \delta\sin d)\,y + bu\sin\eta\cos\eta + xu\sin\eta + \delta u - ab\sin\eta\cos\eta - ax\sin\eta = 0.$$

Man multiplicire die erſte mit $a\cos d\cos\eta - u\cos d\cos\eta - \delta\sin d$, die zweyte mit $t\cos d\cos\eta + \delta\cos d\sin\eta$ und ſubtrahire die letzte von der erſten, ſo wird

$$(\delta x\cos\eta - h\delta\sin\eta^2 - \delta t - xt\sin\eta - bt\sin\eta\cos\eta)(a\cos d\cos\eta - u\cos d\cos\eta - \delta\sin d)$$
$$- (bu\sin\eta\cos\eta + ux\sin\eta + \delta u - ab\sin\eta\cos\eta - ax\sin\eta) \times (t\cos d\cos\eta + \delta\cos d\sin\eta) = 0.$$

Hieraus folgt nach angeſtellter Rechnung

$$a\delta x\cos d - a\delta t\cos d\cos\eta - \delta ux\cos d - \delta\delta x\cos\eta\sin d + b\delta\delta\sin\eta^2\sin d$$
$$+ \delta\delta t\sin d + \delta xt\sin\eta\sin d + b\delta t\sin\eta\cos\eta\sin d - \delta\delta u\cos d\sin\eta = 0.$$

Alſo erhält man

$$x = \frac{at\cos d\cos\eta - b\delta\sin\eta^2\sin d - \delta t\sin d - bt\sin\eta\cos\eta\sin d + \delta u\cos d\sin\eta}{a\cos d - u\cos d - \delta\cos\eta\sin d + t\sin\eta\sin d},$$

oder auch

$$x = \frac{\delta u\sin\eta\cot d + (a\cot d\cos\eta - b\sin\eta\cos\eta - \delta)\,t - b\delta\sin\eta^2}{t\sin\eta - u\cot d + a\cot d - \delta\cos\eta},$$

wenn man nämlich Zehler und Nenner jenes Bruchs durch $\sin d$ dividirt, und dann alles nach t und u ordnet. Subſtituirt man dieſes in einer der beyden vorigen Gleichungen zwiſchen x und y, ſo erhält man auch y durch t und u ausgedrückt. Es war aber

$$(t\cos d\cos\eta+\delta\cos d\sin\eta)\,y=(t\sin\eta-\delta\cos\eta)\,x+\delta t+b\delta\sin\eta^2+bt\sin\eta\cos\eta,$$

$$\text{alſo } y=\frac{t\sin\eta-\delta\cos\eta}{t\cos d\cos\eta+\delta\cos d\sin\eta}\,x+\frac{\delta t+b\delta\sin\eta^2+bt\sin\eta\cos\eta}{t\cos d\cos\eta+\delta\cos d\sin\eta}$$

In dieſe Gleichung ſetze man den erſten Werth von x und bringe beyde Brüche, die nun y ausdrücken, auf gleiche Benennung, ſo wird der Zehler des neuen Bruchs, der y ausdrückt

$$\begin{aligned}&=att\cos d\cos\eta\sin\eta-\delta tu\cos d\cos\eta^2+a\delta t\cos d\sin\eta^2-\delta\delta u\cos d\sin\eta\cos\eta\\&+ab\delta\cos d\sin\eta^2-b\delta u\cos d\sin\eta^2+abt\cos d\sin\eta\cos\eta-btu\cos d\sin\eta\cos\eta.\end{aligned}$$

Dieſer Zehler läßt ſich durch den Factor $t\cos d\cos\eta+\delta\cos d\sin\eta$ des Nenners dividiren, und der Quotient wird $=at\sin\eta-bu\sin\eta-\delta u\cos\eta+ab\sin\eta$. Deswegen wird

$$y=\frac{at\sin\eta-(b\sin\eta+\delta\cos\eta)\,u+ab\sin\eta}{t\sin\eta\sin d-u\cos d+a\cos d-\delta\cos\eta\sin d.}$$

10 §.

Die vornehmſten beſondern Fälle, bey welchen dieſe Aufgabe ihre Anwendung findet, ſind folgende. Wenn das Auge in der Fundamentalebene ſtehet, ſo iſt $a=0$,

$$\text{alſo } x=\frac{\delta u\sin\eta\cot d-(b\sin\eta\cos\eta+\delta)\,t-b\delta\sin\eta^2,}{t\sin\eta-u\cot d-\delta\cos\eta}$$

$$\text{und } y=\frac{(b\sin\eta+\delta\cos\eta)\,u}{u\cos d-t\sin\eta\sin d+\delta\cos\eta\sin d.}$$

Für die orthographiſche Projection iſt überdem $\delta=\infty$, alſo in dieſem Fall $x=\dfrac{t+b\sin\eta^2-u\sin\eta\cot d,}{\cos\eta}$ oder $x=t\sec\eta+b\tan\eta\sin\eta-u\tan\eta\cot d$, und $y=\dfrac{u}{\sin d,}$

11 §.

Wenn FH mit NH parallel iſt, (3 Fig.) ſo wird $b=x$, und $\eta=0$, $\sin\eta=0$, $\cos\eta=1$. Sodann aber kann $b\sin\eta=\infty\, 0$ jede gegebene beſtändige Größe bedeuten, weil dieß nun der Abſtand der Parallele FH von NH wird. Man ſetze TE $=c$, ſo iſt $c=b\sin\eta$, auch noch wenn $b=\infty$, und $\eta=0$ iſt. Alſo wird in dieſem Fall $x=\frac{(a\cot d-c-\delta)\,t}{a\cot d-u\cot d-\delta}$, oder auch $x=\frac{(a\cos d-c\sin d-\delta\sin d)\,t}{a\cos d-u\cos d-\delta\sin d}$, und $y=\frac{ae-(c+\delta)\,u}{ac\cos d-u\cos d-\delta\sin d}$. Für die orthographiſche Projection wird aus dem 10 §. $x=t$, und $y=\frac{u}{\sin d}$.

12 §.

Wenn die Ebene XY (3 Fig.) mit der Fundamentalebene parallel iſt, ſo giebt es keine Durchſchnittslinie FH, worauf man die Abſciſſen EF nehmen könnte. Um nun die Formuln ſo zu verändern, daß ſie ſich auch auf dieſen Fall anwenden laſſen, ſetze man die Ebene XY ſchneide die Tafel in De, die Fundamentalebene aber in FH, ſo daß FH mit TH parallel iſt, damit die Formuln des vorigen §. gelten. Wenn nun Ee und Ff auf De ſenkrecht ſind, und man ziehet eTfR, ſo iſt EeT = FfR der Ebene XY Neigungswinkel gegen die Tafel. Und da die Ebenen ETe, FRf auf TH folglich auch auf der Parallele FH ſenkrecht ſind, ſo iſt TEe = RFf $=d$ der Ebene XY Neigungswinkel gegen AB, und man hat EF $=x$, $=ef$, und FL $=y=$ F$f-f$L. Man ſetze Te = R$f=e$, und Ee = F$f=f$, ſo iſt $c=\frac{e\cos d}{\sin d}=f\cos d$, und $e=f\sin d$. Wenn nun die Natur der Linie Lm durch eine Gleichung zwiſchen den Coordinaten $ef=x$, fL $=z$ ausgedruckt iſt; ſo wird

$x=$

$x = \frac{a\cos d - e\cos d - \delta\sin d}{a\cos d - u\cos d - \delta\sin d}$, und $z = f - y = \frac{\delta(u-e)}{a\cos d - u\cos d - \delta\sin d}$. Nun drehe ſich die Ebene XY um De bis in die Lage DZ mit AB parallel, ſo wird $d = 0$, $\sin d = 0$, $\cos d = 1$, alſo $x = \frac{(a-e)t}{a-u}$, und $z = \frac{\delta(u-e)}{a-u}$. Wenn man eben die Veränderung mit den Formuln für die orthographiſche Projection im vorigen §. vornimmt, ſo erhält man $x = t$, und $f - z = \frac{u}{\sin d}$, alſo $e - z\sin d = u$, und $z = \frac{e-u}{\sin d}$. Für die parallele Lage, wenn $\sin d = 0$, wird $z = \frac{e-0}{u}$. Dieſer Ausdruck ſcheint zwar unendlich zu werden; weil aber z unbeſtimmt ſeyn muß, ſo kann die Gleichung nicht beſtehen, dafern nicht auch $e - u = 0$ alſo $z = \frac{0}{0}$, und folglich $u = e$ iſt. Dieß letztere iſt nun ſchon die Gleichung für die Projection, und es erhellet leicht, daß in dieſem Fall die Projection die grade Linie De ſeyn müſſe, die mit TW in der Entfernung $Te = e$ parallel liegt. Denn es iſt ſo gut, als ob das Auge in der Ebene DZ ſelbſt ſtehe, weil alle durch die Puncte von Lm mit ST parallele Linien in der Ebene DZ fallen.

13 §.

Man ſetze der Winkel η, (4 Fig.) der in der 2 Figur ſpitzig angenommen iſt, wachſe, indem ſich die Linie FH und F herum drehet, und H gegen T zugehet: ſo wird H in R fallen, wenn η ein rechter Winkel iſt, und es wird $TH = b$ nun negativ und $= c$, ſo wie $\sin\eta = 1$ und $\cos\eta = 0$ wird. Alſo iſt in dieſem Fall

$$x = \frac{\delta u\cot d - \delta t + b\delta}{t - u\cot d + a\cot d}$$

$$y = \frac{t\sin d - u\cos d + a\cos d.}{at + bu - ab}$$

Für die orthographiſche Projection erhält man $x = \frac{t - c - u\cot d,}{o}$ und $y = \frac{u}{\sin d}$. Der Werth von x kann wiederum nicht unendlich ſeyn, alſo muß $t - c - u\cot d = o$ ſeyn, und dieß iſt wiederum ſchon die Gleichung für die Projection ſelbſt, welche keine andre als eine grade Linie ſeyn kann, weil es nun ſo gut iſt, als wenn die Ebene der Linie Lm durchs Auge gehet.

Es ſteht nämlich nun LK auf der Tafel ſenkrecht, und die Ebene XY auch, alſo liegt LK und jeder andre Lichtſtral in der Ebene XY, und alle dieſe Lichtſtralen ſind mit OT parallel. Die Puncte H, E und R fallen zuſammen, ſo daß TH = TE = TR $= b = c$ wird. Wenn nun die Ebene XY die Tafel in KR ſchneidet, ſo iſt FRK = 90° = LFR, alſo FL mit HK parallel. Die Ebene KLM ſteht auf der Fundamentalebene AB ſenkrecht: wenn jene alſo die Tafel in KN ſchneidet, ſo iſt KN auf TN ſenkrecht, ſo daß W und N zuſammen fallen. Demnach wird $t =$ TW = TN, $u =$ WK = NK, und HK = TL $= y$, EF = RF $= x$. Nun iſt der Winkel KRM = LFM $= d$, und KW = LG $= y\sin d = u$. Ueberdem HN $= y\cos d$, alſo TN = TH + HN oder $t = c + y\cos d$, und wenn man $y = \frac{u}{\sin d}$ ſubſtituirt, ſo wird $t = c + u\cot d$, oder $4 - c - u\cot d = o$, wie vorhin.

Anwendung der bisherigen Theorie auf die Projectionen der Kugel.

14 §.

Die Tafel ſey der Aequator ÆQ, (5 Fig.) ſein Halbmeſſer $= r$, und das Auge o ſtehe in einem Pol des Aequators.

tors. Die Fundamentalebene ſey ein Meridian, der von einem andern Meridian OLP unter einem gegebenen Winkel LOC geſchnitten wird: man ſucht die Projection des Meridians OLP.

Aufl. Die Puncte E und H fallen hier in t zuſammen, weil FX durch T gehet, und es iſt $\eta = 90°$, $a = 0$, $b = c = 0$, $\delta = r$. Wenn man nun im 13 §. wo bereits $\eta = 90°$ geſetzt iſt, nach $b=0$, $a=0$, und $\delta = r$ ſetzt, ſo wird $x = \frac{r(u\cot d - t)}{t - u\cot d}$ und $y = \frac{0}{t\sin d - u\cos d}$, wo es ſcheint, daß x und y beſtimmte Werthe bekommen, ſo daß $x = -r$, und $y = 0$ wäre. Allein x und y ſind unbeſtimmt, alſo können dieſe Gleichungen nicht beſtehen, wofern nicht der Zehler und Nenner beyder Brüche $= 0$ iſt. Alſo muß $t - u\cot d = 0$, und $t\sin d - u\cos d = 0$ ſeyn. Beyde Gleichungen ſind einerley, und drücken ſchon die Natur der Projection aus, welches hier die grade Linie TK iſt. Weil hier der ſphäriſche Winkel LOC $= d$ iſt, ſo giebt die Gleichung $\frac{u}{t} = \frac{\sin d}{\cos d} = \tan d = \frac{\mathrm{WK}}{\mathrm{TW}}$, alſo LOC=KTW, wie auch aus andern Gründen bekannt iſt.

Für die orthographiſche Projection erhält man eben die Gleichung, wie aus dem vorigen §. folgt, wenn man in der dortigen Gleichung $t - c - u\cot d = 0$ auch $c = 0$ ſetzt: und es erhellet unmittelbar aus der Zeichnung, wenn OL mit OP parallel wird, daß nun das Bild x des Puncts L mit K und T in grader Linie liege. Demnach iſt in dieſem Fall einerley grade Linie ſowohl die orthographiſche, als auch ſtereographiſche Projection des Meridians.

Wäre die Tafel irgend ein andrer größter Kreis der Erde, z. E. des Orts P wahrer aſtronomiſcher Horizont, und das Auge O im Nadir dieſes Orts auf der Erde, um den Halbmeſſer der Erde von der Tafel entfernt, die Fundamentalebene aber der erſte

Verticalkreis; ſo wäre OLP ein andrer Verticalkreis, der den erſten unter dem Winkel d ſchnitte. Die orthographiſche ſowohl als ſtereographiſche Projection dieſes Verticalkreiſes wird ebenfalls eine grade Linie ſeyn, welche die Fundamentallinie im Augenpunct unter eben dem Winkel t ſchneidet, unter welchem der Verticalkreis OLP gegen die Fundamentalebene geneigt iſt.

15 §.

Bey eben der Lage des Auges gegen den Aequator als der Tafel, wie im vorigen §. ſey XLY ein Parallelkreis mit dem Aequator, der vom Pol P um den Bogen $PL = \alpha$ abſtehet: man ſucht ſeine Projection.

Aufl. Dieß iſt der Fall des 11 §. wo $\eta = 0$ iſt, weil Fx mit TN parallel liegt. Nun fällt E in e mit F zuſammen, und es iſt T$e = c = r\cos\alpha$: überdem $a = 0$, $\delta = r$, $d = 90°$. Man ſetze alſo in den Formuln des 11 §. $d = 90°$, $a = 0$, $\delta = r$, $c = r\cos x$, ſo wird $x = (1 + \cos x)t$, und $y = (1 + \cos x)u$. Aber zwiſchen $x = ef$ und $y = f$L hat man die Gleichung $xx + yy = rr\sin\alpha^2$, und dieß giebt zwiſchen t und u folgende Gleichung $(1 + \cos x)^2\ (tt + nu) = rr\sin\alpha^2$, oder $tt + uu = \frac{rr\sin\alpha^2}{(1+\cos\alpha)^2}$. Demnach iſt die Projection ein Kreis, deſſen Halbmeſſer $= \frac{r\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = r\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\alpha$, wie auch ſehr leicht aus blos geometriſchen Gründen folgt.

Für die orthographiſche Projection wird $x = t$, und $y = u$, alſo $tt + uu = rr\sin\alpha^2$, und die Projection iſt ein Kreis von eben dem Halbmeſſer, wie der Parallelkreis ſelbſt, wie auch ſonſt bekannt iſt. Die orthographiſche Projection k des Puncts L liegt, mit der ſtereographiſchen K eben dieſes Puncts in einer graden Linie, die durch T gehet. (14 §.) Wenn demnach k des Puncts L

ortho=

orthographiſche Projection auf der Tafel gegeben iſt, ſo darf man nur auf der graden Linie Tk das Stück $TK = \frac{\tan g \frac{1}{2}\alpha}{\sin\alpha} TK$ nehmen, ſo iſt K deſſelben Puncts L ſtereographiſche Projection.

Wenn ÆQ der Horizont des Orts P iſt, und das Auge ſteht im Nadir deſſelben; ſo werden die Projectionen der Parallelkreiſe des Horizonts oder der Almucantharat eben ſo gefunden.

16. §.

Die Tafel ſey der erſte Meridian der Erdkugel, (6 Fig.) deren Halbmeſſer $= r$ iſt, und die Fundamentalebene ſey der Aequator: überdem ſey der Abſtand $GPL = \gamma$ eines Meridians AP vom erſten, oder ſeine geogrophiſche Länge gegeben: man ſoll ſeine Projection auf der Tafel ſuchen, wenn das Auge O im Pole des erſten Meridians ſtehet, welcher die Tafel abgiebt.

Aufl. Da hier die Puncte H und E in T zuſammen fallen; ſo wird $b = c = o$. Ueberdem iſt $a = o$, $\delta = r$, $\eta = \gamma$, und $d = 90°$, alſo erhält man $x = \frac{rt}{r\cos\gamma - t\sin\gamma}$, und $y = \frac{r\cos\gamma u}{r\cos\gamma - t\sin\gamma}$. Zwiſchen $TF = x$, und $FL = y$ hat man die Gleichung $xx + yy = rr$, alſo wird zwiſchen t und u folgende Gleichung gefunden $\frac{rrtt + rr\cos\gamma^2 uu}{(r\cos\gamma - t\sin\gamma)^2} = rr$, und daraus folgt $tt + \cos\gamma^2 uu = rr\cos\gamma^2 - rrt\sin\gamma\cos\gamma + tt\sin\gamma^2$, oder $tt + uu = rr - rrt.\tan g\gamma$. Die Projection iſt alſo eine Linie der zweyten Ordnung, und weil beyde Factoren des höchſten Theils $tt + uu$ unmöglich ſind, ſo gehört ſie in die Claſſe der Ellipſen, dahin auch der Kreis zu rechnen iſt. Dieſe Gleichung giebt $u = \pm\sqrt{(rr - 2rt.\tan g\gamma - tt)}$, alſo $u = \pm r$, wenn $t = o$ iſt. Folglich gehet die Projectionen durch P und Q, ſo daß $TP = TQ = r$, wie auch aus der Zeichnung erhellet.

Es ſey nun die Projection PDQ (8 Fig.) auf der Ebene der Tafel gezeichnet, ſo daß GH die Fundamentallinie, T der Augenpunct, und $TP = TQ = r$ iſt, ſo ſind TD und Td die Werthe von t wenn $u = o$ iſt. Aber dieſe Vorausſetzung giebt $tt + 2rt.\tang\gamma = rr$, alſo $t = -r\tang\gamma \pm r\surd(1 + \tang\gamma^2)$ oder $t = -r\tang\gamma \mp r\sec\gamma$. Man nehme alſo $TC = -r\tang\gamma$, $CD = +r\sec\gamma$, und $Cd = -r\sec\gamma$, ſo ſind die Puncte D und d in der Projection, und es wird $TD = r(\sec\gamma - \tang\gamma) = r\tang(45° - \frac{1}{2}\gamma) = r\tang\frac{90° - \gamma}{2}$,

$Td = -r(\sec\gamma + \tang\gamma = r\tang(45° + \frac{1}{2}\gamma) = r\tang\frac{90° + \gamma}{2}$.

Man rechne nun die Abſciſſen von dem Anfangspunct C; weil nämlich $CT = r\tang\gamma$, ſo hat man $r\tang\gamma + t = Cw$, und $t = Cw - r\tang\gamma$. Dieß in die gefundene Gleichung zwiſchen t und u geſetzt, giebt zwiſchen CW und u dieſe Gleichung $Cw^2 + uu = rr + rr\tang\gamma^2$, oder $Cw^2 + uu = rr\sec\gamma^2$. Alſo iſt die Projection ein Kreis, deſſen Halbmeſſer $= r\sec\gamma$, und der Mittelpunct C liegt in der Fundamentallinie in der Entfernung $TC = -r\tang\gamma$ vom Augenpunct. Alſo fällt C auf der andern Seite von T, wenn $\gamma > 90°$ iſt. Für $\gamma = 90°$ wird die Projection die grade Linie PQ, weil der Halbmeſſer $r\sec\gamma$ unendlich wird.

Wenn das Auge in der Axe der Tafel unendlich weit weg rückt, (6 Fig.) und alſo die Projection orthographiſch wird; ſo fällt die Projection des Puncts L in K mit T und K in grader Linie. Iſt nämlich LO mit OZ parallel, ſo bleibt doch LO in der Ebene eines Verticalkreiſes ZLO, der bey beyden Arten der Projection eine grade Linie wird, die durch T gehet. (14 §.) Der Winkel dieſes Verticalkreiſes mit dem Meridian PZL, oder das

Azimuth des Puncts L, und ſein Abſtand von Scheitel ZL iſt beſtimmt, wenn man des Puncts L geographiſche Breite $AL = \psi$ weis, da LPZ der Stunden Winkel $= 90° - \gamma$ iſt. Man hat nämlich im ſphäriſchen Dreyeck LPZ die Seite $PL = 90° - \psi$, und die Ergänzung der Polhöhe $ZP = 90°$. Alſo $\mathit{tang}.\,PZL = \frac{\sin PL \sin LPZ}{\cos PL} = \frac{\cos\psi \cos\gamma}{\sin\psi} = \mathit{cotang}.\,KTW$, und $\cos P = \cos ESZ$ $\sin PL = \sin\gamma \cos\psi$. Setzt man nun $x = TF = r\cos\psi$, $y = FL = r\sin\psi$, ſo erhält man $r\cos\psi = \frac{rt}{r\cos\gamma - t\sin\gamma}$, $r\sin\psi = \frac{r\cos\gamma u}{r\cos\gamma - t\sin\gamma}$. Hieraus folgt $t = \frac{r\cos\psi \cos\gamma}{1 + \cos\psi \sin\gamma}$, $u = \frac{r\sin\psi}{1 + \cos\psi \sin\gamma}$, alſo $\frac{u}{t} = \frac{WK}{TW} = \mathit{tang}\,KTW = \frac{\sin\psi}{\cos\psi \cos\gamma}$, und $\cot.\,KTW = \frac{\cos\psi \cos\gamma}{\sin\psi}$, wie vorhin, und $\surd(tt + uu) = TK = \frac{r\surd\,(\sin\psi^2 + \cos\psi^2\ \cos\gamma^2)}{1 + \cos\psi \sin\gamma} = \frac{r\surd(1 - \cos\psi^2 \sin\gamma^2)}{1 + \cos\psi \sin\gamma} = \frac{r\sin ZL}{1 + \cos ZL} = r\mathit{tang}\,\tfrac{1}{2}ZL$, wie nach dem 15 §. erfordert wird.

17 §.

Die Gleichung für die orthographiſche Projection ergiebt ſich ſo. Man ſetze in den Formuln für die orthographiſche Projection des 10 §. hier $\delta = r, b = 0, \eta = \gamma, d = 90°$, ſo wird $x = \frac{t}{\cos\gamma}$, und $y = u$. Dieß in $xx + yy = rr$ geſetzt giebt $\frac{tt}{\cos\gamma^2} + uu = rr$, oder $tt + uu\cos\gamma^2 = rr\cos\gamma^2$. Für $u = 0$, iſt $t = \pm r\cos\gamma = TB$, und für $t = 0$, wird $u = \pm r = TP$. Man ſetze alſo $r\cos\gamma = TB$, ſo wird $\cos\gamma = \frac{TB}{r}$, und $tt + \frac{TB^2}{rr}uu = TB^2$, oder $tt = TB^2 - \frac{TB^2}{rr}uu$, oder auch $uu = rr - \frac{rr}{\mathrm{TB}^2} tt$. Demnach iſt die Projection eine Ellipſe, deren halbe Zwergaxe $= r =$ TP und halbe conjugirte Axe $= \mathrm{TB} = r\cos\gamma$. Die Abſciſſen t ſind auf der conjugirten Axe vom Mittelpunct T gerechnet. Für dieſe orthographiſche Projection ſey nun $\mathrm{T}w = t$, $wk = u$, und wie vorhin $x = \mathrm{TF} = r\cos\psi$, $y = \mathrm{FL} = r\sin\psi$, ſo wird $r\cos\psi = \frac{t}{\cos\gamma}$; alſo $t = r\cos\psi\cos\gamma$; und $r\sin\psi = u$, folglich $\frac{u}{t} = \frac{\mathrm{WK}}{\mathrm{TW}} = \frac{\sin\psi}{\cos\psi\cos\gamma}, = \frac{\mathrm{WK}}{\mathrm{TW}}$, wie erfordert wird, weil T, K und k in grader Linie liegen müſſen. Ferner wird $\mathrm{T}k = r\surd(\sin\psi^2 + \cos\psi^2\cos\gamma^2) = r\surd(1 - \cos\psi^2\sin\gamma^2) = r\surd(1 - \cos\mathrm{ZL}^2) = r\sin\mathrm{ZL}$, wie dem 15 §. gemäß iſt.

18 §.

Unter den Bedingungen des vorigen §. die Projectionen ſo vieler Meridiane als verlangt wird auf der Tafel durch Zeichnung zu finden.

Aufl. Der Kreis GPHQ (8 Fig.) ſtelle die Tafel vor, GH die Fundamentallinie, welche durch den Mittelpunct T der Tafel gehet, der zugleich der Augenpunct iſt, und PQ ſey auf der Fundamentallinie ſenkrecht, ſo iſt PQ die Projection des Meridians von 90° Länge. Den Halbkreis PHQ theile man in gleiche Theile von 20 zu 20 oder von 10 zu 10 Graden, nachdem die Meridiane ſich unter Winkel von 10° zu 10° oder von 5° zu 5° ſchneiden ſollen. Durch alle Theilungspuncte, 20, 40, u. ſ. f. ziehe man grade Linien nach P, welche TH in C, D, E, F u. ſ. f. ſchneiden, ſo ſind die Durchſchnittspuncte nach der Ordnung die geſuchten Projectionen der Meridiane von 10°, 20°, 30°, 40° Länge u. ſ. f. und CP, DP, EP, FP, u. ſ. f. die zugehörigen Halbmeſſer. Beſchreibt man demnach aus C, D, E, F, u. ſ. f. mit den Halbmeſſern CP, DP, EP, FP, u. ſ. f. die Bogen PBQ, P20Q, P30Q, P40Q, u. ſ. f. ſo ſind dieß die geſuchten Projectionen. Die Richtigkeit der Verzeichnung fällt leicht in die Augen. Es iſt nämlich $TC = r\,\mathrm{tang}\,10^\circ$, $CP = r\,\mathrm{ſec}\,10^\circ$, $TD = r\,\mathrm{tang}\,20^\circ$, $DP = r\,\mathrm{ſec}.\,20^\circ$, u. ſ. f. wie nach dem §. erfordert wird. Dieſe Verzeichnung ſcheint mir leichter und in der Ausübung bequemer zu ſeyn als diejenige, welche ſonſt gewöhnlich vorgeſchrieben wird, und auch von Herrn v. Wolf beybehalten iſt, obgleich letztere ebenfalls aus den erwieſenen Formeln fließt. Es ſchneidet nämlich jede Projection PBQ die Fundamentallinie in der Entfernung TB vom Augenpunct, ſo daß $TB = r\,\mathrm{tang}\,\frac{90^\circ - \gamma}{2}$. Deswegen kann man auch den Quadranten GP von 10° zu 10° oder von 5° zu 5° eintheilen, und die graden Linien Q10, Q20, Q30, u. ſ. f. ziehen, welche GT in B, 20, 30, 40, u. ſ. f. ſchneiden. Durch dieſe Puncte gehen die Projectionen nach der Ordnung durch, und man muß zu den Kreiſen PBQ, P20Q, u. ſ. f. die Mittelpuncte ſuchen. Es iſt nämlich $TB = r\,\mathrm{tang}\,\frac{90^\circ - 10^\circ}{2}$, $T20 = r\,\mathrm{tang}\,\frac{90^\circ - 20^\circ}{2}$ u. ſ. f. Die Alten ſind auf dieſe Verzeichnung durch den ſynthetiſchen Vortrag gekommen. Sie erwieſen, daß die Projection ein Kreis ſeyn müſſe, und daß die drey Puncte P, B, Q; P, 20, Q, u. ſ. f. in dieſen Kreiſen liegen. Alſo durften ſie nur zu dieſen Kreiſen durch die bekannte Verzeichnung die Halbmeſſer ſuchen. Aber die vorige Verzeichnung iſt ohne Zweifel kürzer und bequemer, indem ſich die Mittelpuncte auf einmal unmittelbar ergeben.

Für die Projectionen der Meridiane, deren Länge nicht viel von 90° unterſchieden iſt, fallen die Mittelpuncte ſehr weit hinaus, und die Linien durch P ſchneiden TH unter ſehr ſpitzigen Winkeln, daß alſo der eigentliche Durchſchnittspunct etwas unbequem, und dabey zugleich etwas unſicher beſtimmt wird, obgleich noch allemal ſicherer, als bey der letztgedachten Verzeichnung. Will man dieſe Unbequemlichkeit ganz vermeiden, ſo darf man nur den Halbmeſſer $r\sec\gamma$ berechnen, welches durch Hülfe der Logarithmen ſehr leicht iſt. Auf ſolche Art bleibt keine andre Unbequemlichkeit übrig, als diejenige, welche in der Ausübung bey Verzeichnung ſehr großer Kreiſe unvermeidlich iſt, und welche die Theorie eigentlich nicht weiter heben kann, weil ſie die Verzeichnung eines Kreiſes als eine Forderung annimmt, wenn der Mittelpunct und Halbmeſſer gegeben ſind.

Man bedient ſich bey den übrigen krummen Linien, zu deren Verzeichnung man keine ſo bequeme Inſtrumente hat, wie beym Kreiſe, dieſes Vortheils. Man ſucht für jede Abſciſſe die zugehörige Ordinate entweder durch Verzeichnung, oder durch Rechnung, und beſtimmt auf ſolche Art mehrere Puncte, die in der krummen Linie einander ſo nahe liegen, daß man durch ſie die krumme Linie aus freyer Hand ziehen kann. Eben dieſes Hülfsmittels kann man ſich hier bedienen, wenn die Halbmeſſer der Kreiſe ſo groß ausfallen, daß die Verzeichnung des Kreiſes deswegen beſchwerlich wird. Bey einerley Mittagskreis ändert ſich γ nicht, alſo iſt es leicht $\tang PZL = \cot KTW = \frac{\cos\psi \cos\gamma}{\sin\gamma}$, oder $\tang KTW = \frac{\tang\psi}{\sin\psi}$ und $\cos ZL = \cos\psi \cdot \sin\gamma$ vermittelſt der Logarithmen zu finden, indem man für ψ nach und nach 10°, 20°, oder auch 5°, 10°, u. ſ. f. nimmt, weil nun $WK = TW \tang KTW$, $= \frac{TW}{\tang PZL}$, ſo kann man leicht WK berechnen, wenn man TW ſo annimmt, wie es die jedesmalige Vorausſetzung von $\psi = 10°$, $\psi = 20°$, u. ſ. f. erfordert. Es iſt aber $TW = \frac{r \cos\psi \cos\gamma}{1 + \cos\psi \sin\gamma}$, und

$WK = \frac{r\sin\psi}{1+\cos\psi\sin\gamma}$, und $\cos\psi\sin\gamma = \cos ZL$, $1+\cos\psi\sin\gamma = 1+\cos ZL = \frac{\sin ZL}{\tang\frac{1}{2}ZL}$, alſo $TW = \frac{r\cos\psi\cos\gamma\tang\frac{1}{2}ZL}{\sin ZL}$, und $WK = \frac{r\sin\psi\tang\frac{1}{2}ZL}{\sin ZL}$. Durch Hülfe dieſer beyden letzten Ausdrücke kann man für jede Vorausſetzung von $\psi = 10°$, $\psi = 20°$, u. ſ. f. ſowohl TW, als auch WK ſehr leicht berechnen. Es ſey z. E. $\gamma = 85°$, und $\psi = 54°$, $r = 10000$, ſo giebt die Rechnung

$l\cos\psi = 9,7692187$
$l\sin\gamma = \underline{9,9983442}$
$l\cos ZL = 19.7675629 - 10$
alſo $ZL = 54°9'$, $\frac{1}{2}ZL = 27°4\frac{1}{2}'$.
$lr = 4.0000000$
$l\cos\psi = 9.7692187$
$l\cos\gamma = \underline{8.9402960}$
22.7095147
$\frac{l\sin ZL}{\tang\frac{1}{2}ZL} = \underline{0.2002115}$
$lt = 22.5093032 - 20$
alſo $TW = 323$.

$l\sin ZL = 9.9087814$
$l\tang\frac{1}{2}ZL = \underline{9.7085699}$
$l\frac{\sin ZL}{\tang\frac{1}{2}ZL} = 0,2002115$
$lr = 4.0000000$
$l\sin\psi = \underline{9.9079576}$
13.9079576
$l\frac{\sin ZL}{\tang\frac{1}{2}ZL} = \underline{0,2002115}$
$lu = 13.7077461 - 10$
folglich $WK = 5102$.

Demnach nehme man $TY = 5102$ und $YK = 323$, ſo iſt K in der Projection des Mittagskreiſes von 85° Länge, und K iſt die Projection eines Puncts L von 54° Breite in dieſem Mittagskreiſe.

Wenn L die Projection eines gegebenen Puncts in einem Meridian, z. E. von 40° Länge iſt; ſo läßt ſich die orthographiſche Projection eben dieſes Puncts leicht auf folgende Art finden. Man ziehe TL, ſo iſt $TL = r\tang\frac{1}{2}ZL$, (15 §.) man nehme ferner

$TM = r\sin ZL$, ſo iſt M die orthographiſche Projection eben des Puncts, wovon L die ſtereographiſche iſt. Man darf demnach nur auf TH ein Stück $TE = TL$ nehmen, ſodann PE ziehen, welche den Halbkreis PBQ in V ſchneidet, hierauf VX auf PQ ſenkrecht ziehen, und $TM = VX$ nehmen.

19 §.

Es bleibe alles wie im 16 §. (9 Fig.) in Anſehung der Lage der Tafel und des Auges: aber ſtatt des Meridians ſey ein Parallelkreis *DLd* des Aequators gegeben, deſſen geographiſche Breite, oder Abſtand vom Aequator $DG = \psi$ iſt: man ſoll ſeine Projection auf der Tafel ſuchen.

Aufl. Es iſt dieß der Fall des 12 §. da die Ebene von Lm mit der Fundamentalebene parallel iſt. Alſo hat man $Te = e$, und überdem $a = o$, $\delta = r$. Folglich wird $x = \frac{et}{u}$, und $z = \frac{r(e-u)}{u} = \frac{re}{u} - r$. Da nun hier $ef = x$, $fL = z$, $eL = eD = ed = r\cos\psi$ iſt, ſo hat man zwiſchen x und z die Gleichung $xx + zz = rr\cos\psi^2$. Ueberdem wird $Te = e = r\sin$, alſo $x = \frac{rt\sin\psi}{u}$, $z = \frac{rr\sin\psi}{u} - r$, und man erhält zwiſchen t und u die Gleichung $\frac{rr\,tt\sin\psi^2}{uu} + (\frac{rr\sin\psi}{u} - r)^2 = rr\cos\psi^2$, oder $\frac{tt\sin\psi^2}{uu} + \frac{r\sin\psi}{u} - 1)^2 = \cos\psi^2$, oder auch $tt\sin\psi^2 + (r\sin\psi - u)^2 = uu\cos\psi^2$. Dieß giebt $tt\sin\psi^2 + rr\sin\psi^2 - 2ru\sin\psi + uu\sin\psi^2 = o$, oder $tt + uu - \frac{2r}{\sin\psi}u + rr = o$. Als iſt die Projection wiederum eine Linie der zweyten Ordnung, die in die Claſſe der Ellipſen gehört, dahin man auch den Kreis rechnen muß.

Man kann die Gleichung auch ſo ausdrücken $tt + uu - 2r \operatorname{coſec}\psi\, u + rr = o$, und für $t = o$ wird $u = r\operatorname{coſec}\psi \pm r\sqrt{}(\operatorname{coſec}\psi^2 - 1)$, oder $u = r(\operatorname{coſec}\psi \pm \cot\psi)$. Es ſey demnach auf der Ebene der Tafel die Projection D K d (10 Fig.) gezeichnet, und $\mathrm{TW} = t$, $\mathrm{WK} = u$; man nehme $\mathrm{TC} = r\operatorname{coſec}\psi$, $\mathrm{C}a = -r\cot\psi$, $\mathrm{C}b = +r\cot\psi$, ſo ſind a und b in der Projection. Wenn man Kw mit Tw parallel ziehet, und in der gefundenen Gleichung $\mathrm{TW} = \mathrm{WK} = u$, $w\mathrm{K} = \mathrm{TW} = t$ ſetzet, ſo erhält man $\mathrm{WK} + \mathrm{TW}^2 - 2r\operatorname{coſec}\psi\,\mathrm{TW} + rr = o$. Da nun $\mathrm{TC} = r\operatorname{coſec}\psi$, ſo erhält man $\mathrm{TW} + \mathrm{CW} = r\operatorname{coſec}\psi$, und $\mathrm{TW} = r\operatorname{coſec}\psi - \mathrm{CW}$. Dieß ſetze man ſtatt TW in der letzten Gleichung, ſo erhält man zwiſchen CW und WK folgende Gleichung $\mathrm{WK}^2 + \mathrm{CW}^2 = rr(\operatorname{coſec}\psi^2 - 1)$ oder $\mathrm{WK}^2 + \mathrm{CW}^2 = rr\cot\psi^2$, und dieſe ergiebt, daß die Projection ein Kreis ſey, deſſen Mittelpunct in C fällt, und deſſen Halbmeſſer $= r\cot\psi$ iſt. Der Mittelpunct C liegt in der graden Linie PQ, die durch den Augenpunct T auf der Fundamentallinie ſenkrecht ſteht; er iſt vom Augenpunct um den Abſtand $\mathrm{TC} = r\operatorname{coſec}\psi$ entfernt, und die Projection ſchneidet die Linie PQ in a ſo, daß $\mathrm{T}a = r(\operatorname{coſec}\psi - \cot\psi) = r\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi$. Wenn man mit dem Halbmeſſer $\mathrm{TP} = r$ einen Kreis aus dem Mittelpunct T beſchreibt, und auf demſelben die Bogen $\mathrm{PD} = \mathrm{P}d = 90° - \psi$ nimmt, ſo ſind die Puncte D und d in der Projection. Dieß ergiebt die Zeichnung unmittelbar, weil die Puncte D und d der Parallelkreiſe mit ihren Projectionen zuſammen fallen. Eben dieß ergiebt auch die Gleichung $tt + uu - 2ru\operatorname{coſec}\psi + rr = o$. Man ziehe nämlich DE auf TW ſenkrecht, und ſetze $t = \mathrm{TE} = r\operatorname{coſ}\psi$, ſo wird $uu - 2ru\operatorname{coſec}\psi = -rr - rr\operatorname{coſ}\psi^2$, oder $uu - 2ru\operatorname{coſec}\psi + rr\operatorname{coſec}\psi^2 = rr(\operatorname{coſec}\psi^2 - 1 - \operatorname{coſ}\psi^2)$. Hieraus folgt $u = r\operatorname{coſec}\psi \pm r\sqrt{}(\cot\psi^2 - \operatorname{coſ}\psi^2)$, und es wird $\mathrm{ED} = r\operatorname{coſec}\psi - r\sqrt{}(\cot\psi^2 - \operatorname{coſ}\psi^2)$. Es iſt aber $\operatorname{coſec}\psi - \sqrt{}(\cot\psi^2 - \operatorname{coſ}\psi^2) = \frac{1}{\sin\psi} - \operatorname{coſ}\psi\sqrt{}\frac{1}{\sin\psi^2} - 1) = \frac{1}{\sin\psi} - \operatorname{coſ}\psi\cot\psi$

=

$=\frac{1}{\sin\psi}-\frac{\cos\psi^2}{\sin\psi}=\frac{\sin\psi^2}{\sin\psi}=\sin\psi$; alſo ED $= r\sin\psi$. Demnach iſt der Punct D des Kreiſes DPd zugleich in der Projection DKd.

Die Projection des Aequators wird eine grade Linie, die mit der Fundamentallinie einerley iſt: denn das Auge ſteht in der Ebene des Aequators. Es wird auch T$a = r\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\psi = 0$, wenn $\psi = 0$ iſt, und der Halbmeſſer $r\cot\psi = \infty$.

Es entferne ſich nun das Auge O in der Axe der Tafel unendlich von T, ſo wird die Projection orthographiſch. Des Puncts L orthographiſche Projection K fällt mit eben dieſes Puncts ſtereographiſcher Projection und dem Augenpunct T in grader Linie; wie dann auch leicht erhellet, daß die ganze orthographiſche Projection des Parallelkreiſes DLd eine grade Linie ſey, die mit der Fundamentallinie in der Entfernung Te $= r\sin\psi$ parallel iſt. So hat man auch nach dem 12 §. $e-u=0$, oder $u=e$ für die Gleichung der Projection.

Die Lage des Puncts L hängt von ſeiner geographiſchen Länge mit ab. Es ſey PLA ein Mittagskreis durch L, und GPA $=\gamma$, ſo iſt $ef = x = r\cos\psi\cos\gamma$, und $z = fL = r\cos\psi\sin\gamma$. In dieſer Vorausſetzung wird $r\cos\psi\cos\gamma = \frac{rt\sin\psi}{u}$ und $r\cos\psi\sin\gamma = \frac{rr\sin\psi}{u} - r$, alſo $u = \frac{r\sin\psi}{1+\cos\psi\sin\gamma}$ und $t = \frac{r\cos\psi\cos\gamma}{1+\cos\psi\sin\gamma}$. Dieß ſind eben die Ausdrücke, welche im 16 §. gefunden worden, wie es denn auch eben dieſelben Data ſind. Es liegt nämlich L zugleich in einem Meridian, deſſen Länge $=\gamma$, und in einem Parallelkreis, deſſen Breite $=\psi$ iſt, eben ſo, wie im 16 §. vorausgeſetzt worden. Es bleibt auch ZL der Abſtand vom Zenith, und

PZL das Azimuth, alſo iſt $\cos ZL = \sin\gamma \cos\psi$, $u = \frac{r \sin\psi \operatorname{tang} \frac{1}{2} ZL}{\sin ZL}$, und $t = \frac{r \cos\psi \cos\gamma \operatorname{tang} \frac{1}{2} ZL}{\sin ZL}$.

20 §.

Unter den Bedingungen des vorigen §. die Projectionen ſo vieler Parallelkreiſe, als verlangt wird, die um gleiche Bogen, z. Ex. von 10 zu 10, oder 5 zu 5 Graden, von einander abſtehen, auf der Tafel durch Zeichnung zu finden.

Aufl. Es ſey (7 Fig.) GH die Fundamentallinie, T der Augenpunct, ſo iſt GH zugleich die Projection des Aequators. Man theile den Quadranten HP von 10 zu 10 oder 5 zu 5 Graden ein, und ziehe die graden Linien G80, G70, G60, u. ſ. f. welche PT in a, b, u. ſ. f. ſchneiden. Durch dieſe Puncte nach der Ordnung gehen die Projectionen der Parallelkreiſe von 80°, 70°, 60° Breite, u. ſ. f. denn es iſt $Ta = r \operatorname{tang} \frac{1}{2} 80°$, $Tb = r \operatorname{tang} \frac{1}{2} 70°$, u. ſ. f. Weil nun die Bogen P80, P70, u. ſ. f. auf beyden Seiten von P gleich groß genommen werden; ſo hat man für die Parallelkreiſe von 80°, von 70°, und eben ſo für alle folgende drey Puncte, durch welche ihre Projectionen durchgehen, daß man alſo die zugehörigen Mittelpuncte durch Zeichnung ſuchen kann. Allein man kann auch dieſer Mühe überhoben ſeyn, wenn man, wie im 18 §. den Halbkreis PHQ gehörig eingetheilt, und die Linien P20, P40, u. ſ. f. gezogen hat. Denn es iſt $TC = r \cot 80°$, $TD = r \cot 70°$, u. ſ. f. Alſo ſind TC, TD, u. ſ. f. nach der Ordnung die Halbmeſſer der Projectionen der Parallelkreiſe von 80°, 70°, 60° Breite u. ſ. f. Deswegen nehme man nach der Ordnung $ac = TC$, $bd = TD$ u. ſ. f. ſo ſind c, d, u. ſ. f. die Mittelpuncte der Kreiſe, welche die Projectionen der Parallelkreiſe von 80°, 70° Breite, u. ſ. f. abgeben.

Die Halbmeſſer fallen deſto größer aus, je kleiner die Breite des Parallelkreiſes iſt, und man kann die Unbequemlichkeit, worinn man hiedurch bey der Verzeichnung geräth, leicht vermeiden, wenn man dieſe Halbmeſſer durch Hülfe des Ausdrucks $r\cot\psi$ vermittelſt der Logarithmen berechnet: da dann wiederum die Schwierigkeit nur bleibt, ſo große Kreiſe zu zeichnen. Allein auch dieſe läßt ſich ziemlich heben, wenn man, wie im 18 §. t und u aus γ und ψ berechnet, und auf ſolche Art mehrere Puncte nach einander ſucht, durch welche der geſuchte Kreisbogen durchgehen muß, da ſich hier für einerley Parallelkreis nur γ ändert. Man hat auch hier $\cos ZL = \sin\gamma \cos\psi$, $u = \frac{r\sin\psi \, \mathrm{tang}\,\frac{1}{2}ZL}{\sin ZL}$, $t = \frac{r\cos\psi \cos\gamma \, \mathrm{tang}\,\frac{1}{2}ZL}{\sin ZL}$. Es ſey z. Ex. $r = 10000$, $\psi = 5°$ und $\gamma = 54°$, ſo giebt die Rechnung

$l\sin\gamma = 9,\ 9079576$
$l\cos\psi = \underline{9.\ 9983442}$
$l\cos ZL = 19.\ 9063018 - 10$
$ZL = 36°\ 18'$
$\frac{1}{2}ZL = 18°\ 9'$

$l\sin ZL = 9.\ 7723314$
$l\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}ZL = \underline{9.\ 5156309}$
$l\frac{\sin ZL}{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}ZL} = 0,\ 2567005$

$lr = 4.\ 0000000$
$l\sin\psi = \underline{8.\ 9402960}$
$lr\sin\psi = 12.\ 9402960$
$l\frac{\sin ZL}{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}ZL} = \underline{0.\ 2567005}$
$lu = 12.\ 6835955 - 10$
$u = 482,\ 6.$

$lr = 4,\ 0000000$
$l\cos\psi = 9.\ 9983442$
$l\cos\gamma = \underline{9.\ 7692187}$
$23.\ 7675629$
$l\frac{\sin ZL}{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}ZL} = \underline{0,\ 2567005}$
$lt = 23.\ 5108624 - 20$
$t = 3242,\ 4$

Man nehme alſo TW = 3242, 4, und WK = 482, 6, ſo iſt K in der Projection des Parallelkreiſes von 5° Breite und zugleich in der Projection eines Meridians von 54° Länge.

21 §.

Es ſey GB*Hb* (11 Fig.) ein größter Kreis der Erdkugel, deſſen Pole Z und O ſind, ſo wird er der wahre Horizont des Orts Z ſeyn, deſſen Scheitellinie OZ iſt. Es ſey ferner *pq* die Axe des Aequators, ſo wird der größte Kreis Z*p*OQ der Meridian des Orts Z, und B*b* die Mittagslinie ſeyn. Wenn nun der Aequator EGQH den Horizont in GH ſchneidet, ſo iſt GH auf der Ebene des Meridians ſenkrecht, und GZHO der erſte Verticalkreis. **Nun ſey *GBHb* die Tafel, das Auge ſtehe in *O* im Nadir des Orts *Z*, und durch die Axe *pq* des Aequators ſey ein Stundenkreis *pLA* gelegt, der mit dem Meridian einen gegebenen Winkel $ZpV = \phi$ einſchließt: man ſoll ſeine Projection auf der Tafel ſuchen, wenn auch des Orts *Z* geographiſche Breite $QZ = \lambda$ gegeben iſt.**

Aufl. Der Stundenkreis *p*LV ſchneide die Fundamentalebene in TV, ſo iſt $GTV = \eta$, und der ſphäriſche Winkel $pVG = d$. Ueberdem iſt $a = o$, $b = c = o$, und $\delta = r$. Alſo geben die Formuln des 9 §. folgende Ausdrücke

$$x = \frac{ru\sin\eta\cot d - rt}{t\sin\eta - u\cot d - r\cos\eta}, \text{ oder auch}$$

$$x = \frac{ru\sin\eta\cos d - rt\sin d}{t\sin\eta\sin d - u\cos d - r\cos\eta\sin d}, \text{ und}$$

$$y = \frac{ru\cos\eta}{u\cos d - t\sin\eta\sin d + r\cos\eta\sin d}.$$

Im ſphäriſchen Dreyeck V*p*Z ſey der Winkel $pVZ = \xi$, die Seite $VZ = \varepsilon$, ſo iſt $\eta + \varepsilon = 90°$, $d + \xi = 180°$, alſo $\sin\eta = \cos\varepsilon$, $\cos\eta = \sin\varepsilon$, $\sin d = \sin\xi$ $\cos d = -\cos\xi$, und es wird

$$x = \frac{rt\sin\xi + ru\cos\varepsilon\cos\xi}{r\sin\varepsilon\sin\xi - t\cos\varepsilon\sin\xi - u\cos\xi} = \frac{rt + ru\cos\varepsilon\cot\xi}{r\sin\varepsilon - t\cos\varepsilon - u\cot\xi},$$

$$y = \frac{ru\sin\varepsilon}{r\sin\varepsilon\sin\xi - t\cos\varepsilon\sin\xi - u\cos\xi} = \frac{ru\frac{\sin\varepsilon}{\sin\xi}}{r\sin\varepsilon - t\cos\varepsilon - u\cot\xi}.$$

Wenn nun LF auf TV ſenkrecht iſt, ſo hat man $TF = x$, $FL = y$, und $xx + yy = rr$, da dann die gefundenen Werthe ſtatt x und y geſetzt folgende Gleichung zwiſchen t und u geben.

$$\frac{(rt + ru\cos\varepsilon\cot\xi)^2 + rruu\frac{\sin\varepsilon^2}{\sin\xi^2}}{(r\sin\varepsilon - t\cos\varepsilon - u\cot\xi)^2} = rr$$

Hieraus folgt

$$tt + 2tu\cos\varepsilon\cot\xi + uu\cos\varepsilon^2\cot\xi^2 + uu\frac{\sin\varepsilon^2}{\sin\xi^2} = rr\sin\varepsilon^2 - 2tr\sin\varepsilon\cos\varepsilon$$
$$- 2ru\sin\varepsilon\cot\xi - tt\cos\varepsilon^2 - 2tu\cos\varepsilon\cot\xi - uu\cot\xi^2$$

oder auch

$$tt\sin\varepsilon^2 - uu\sin\varepsilon^2\cot\xi^2 + uu\frac{\sin\varepsilon^2}{\sin\xi^2} = rr\sin\varepsilon^2 - 2tr\sin\varepsilon\cos\varepsilon - 2ru\sin\varepsilon\cot\xi$$

Man multiplicire alles mit $\sin\xi^2$ und ſetze $\cot\xi\sin\xi = \cos\xi$, ſo wird $tt\sin\varepsilon^2\sin\xi^2 + uu\sin\varepsilon^2\sin\xi^2 = rr\sin\varepsilon^2\sin\xi^2 - 2tr\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin\xi^2 - 2ru\sin\varepsilon\cos\xi\sin\xi$.

Nun kann man alles mit $\sin\varepsilon\sin\xi$ dividiren, und es wird $tt\sin\varepsilon\sin\xi + uu\sin\varepsilon\sin\xi = rr\sin\varepsilon\sin\xi - 2tr\cos\varepsilon\sin\xi - 2ru\cos\xi$.

Aber im ſphäriſchen Dreyeck ZpV, das bey Z rechtwinklicht iſt, hat man $\frac{\sin VZ}{\sin VpZ} = \frac{\sin pZ}{\sin pVZ}$, $\sin VpZ = \frac{\cos pVZ}{\cos pZ}$, $\cos VpZ = \cos VZ \sin pVZ$. Weil nun $VZ = \varepsilon$, $pZ = 90° - \lambda$, $VpZ = \phi$, $pVZ = \xi$, ſo wird $\frac{\sin\varepsilon}{\sin\phi} = \frac{\cos\lambda}{\sin\xi}$, $\sin\phi = \frac{\cos\xi}{\sin\lambda}$, $\cos\phi = \cos\varepsilon\sin\xi$. Folglich auch $\sin\varepsilon\sin\xi = \sin\phi\cos\lambda$ und $\cos\xi = \sin\phi\sin\lambda$. Man ſubſtituire die drey letzten Werthe in der gefundenen Gleichung, ſo erhält man

$(tt+uu)\,\mathrm{ſin}\,\phi\,\mathrm{coſ}\,\lambda = rr\,\mathrm{ſin}\,\phi\,\mathrm{coſ}\,\lambda - 2tr\,\mathrm{coſ}\,\phi - 2ru\,\mathrm{ſin}\,\phi\,\mathrm{ſin}\,\lambda$,

oder $tt+uu = rr - 2tr\frac{\cot\phi}{\mathrm{coſ}\,\lambda} - 2ru\,\mathrm{tang}\,\lambda$

oder auch $tt+uu = rr - 2tr\frac{\mathrm{ſec}\,\lambda}{\mathrm{tang}\,\phi} - 2ru\,\mathrm{tang}\,\lambda$,

und dieſe Gleichung ergiebt, daß die Projection wiederum in die Claſſe der Ellipſen gehöre, die auch hier ein Kreis wird.

Man ordne nämlich die Gleichung nach den Potenzen von u, ſo hat man $uu + 2ru\,\mathrm{tang}\,\lambda + tt + \frac{2r\,\mathrm{ſec}\,\lambda}{\mathrm{tang}\,\phi}t - rr = 0$.

Auf der Ebene der Tafel ſey die Projection PK (13 Fig.) gezeichnet, und GH die Fundamentallinie, T der Augenpunct, $\mathrm{TW} = t$, $\mathrm{WK} = u$. Man ſetze $t = 0$, ſo wird $uu + 2ru\,\mathrm{tang}\,\lambda - rr = 0$, alſo $u = -r\,\mathrm{tang}\,\lambda \pm r\,\mathrm{ſec}\,\lambda$. Man nehme demnach $\mathrm{TD} = -r\,\mathrm{tang}\,\lambda$, $\mathrm{DP} = +r\,\mathrm{ſec}\,\lambda$, $\mathrm{DQ} = -r\,\mathrm{ſec}\,\lambda$, ſo liegen die Puncte P und Q in der Projection. Man ziehe EF mit GH parallel, und nachdem WK bis W verlängert worden, ſey $\mathrm{WK} = x$, ſo wird $x = r\,\mathrm{tang}\,\lambda + u$, alſo $u = x - r\,\mathrm{tang}\,\lambda$. Dieß in die vorige Gleichung zwiſchen t und u geſetzt, giebt zwiſchen $\mathrm{D}w = t$, und $w\mathrm{K} = x$ dieſe Gleichung

$$xx - 2rx\,\mathrm{tang}\,\lambda + rr\,\mathrm{tang}\,\lambda^2 + tt + \frac{2r\,\mathrm{ſec}\,\lambda}{\mathrm{tang}\,\phi}t - rr = 0, \quad + 2rx\,\mathrm{tang}\,\lambda - 2rr\,\mathrm{tang}\,\lambda^2$$

oder $xx - rr(\mathrm{tang}\,\lambda^2 + 1) + tt + \frac{2r\,\mathrm{ſec}\,\lambda}{\mathrm{tang}\,\phi}t = 0$.

Man ſetze $x = 0$, ſo hat man $tt + \frac{2r\,\mathrm{ſec}\,\lambda}{\mathrm{tang}\,\phi}t = rr\,\mathrm{ſec}\,\lambda^2$, und dieß giebt $t = -\frac{r\,\mathrm{ſec}\,\lambda}{\mathrm{tang}\,\phi} + r\,\mathrm{ſec}\,\lambda\,\mathrm{coſec}\,\phi$. Nimmt man demnach $\mathrm{DC} = -\frac{r\,\mathrm{ſec}\,\lambda}{\mathrm{tang}\,\phi}$, $\mathrm{CE} = +r\,\mathrm{ſec}\,\lambda\,\mathrm{coſec}\,\phi$, $\mathrm{CF} = -r\,\mathrm{ſec}\,\lambda\,\mathrm{coſec}\,\phi$, ſo ſind die Puncte E und F in der Projection. Es ſey nun $Cw = s$, ſo iſt $t + \frac{r\,\mathrm{sec}\lambda}{\mathrm{tang}\phi} = s$, und $t = s - \frac{r\,\mathrm{sec}\lambda}{\mathrm{tang}\phi}$. Setzt man dieß in der letzten Gleichung ſtatt t, ſo wird $zz + ss - \frac{rr\,\mathrm{sec}\lambda^2}{\mathrm{tang}\phi^2} - rr\,\mathrm{sec}\lambda^2 = 0$, oder $zz + ss = rr\,\mathrm{sec}\lambda^2\,\mathrm{cosec}\phi^2$. Demnach iſt die Projection ein Kreis, deſſen Halbmeſſer $= r\,\mathrm{sec}\lambda\,\mathrm{cosec}\phi$. Der Mittelpunct dieſes Kreiſes liegt in der Tafel unter der Fundamentallinie, und wird ſo gefunden. Durch den Augenpunct ſetze man TD auf der Fundamentallinie ſenkrecht, und nehme $TD = r\,\mathrm{tang}\lambda$. Durch D ziehe man mit der Fundamentallinie eine Parallele, und nehme $DC = \frac{r\,\mathrm{sec}\lambda}{\mathrm{tang}\phi}$ auf der Seite die TW entgegen geſetzt iſt, ſo iſt C der Mittelpunct. Wäre ϕ negativ, oder fiele pV auf der andern Seite des Meridians pZ, ſo müßte DC auf der entgegengeſetzten Seite von D genommen werden, weil nun $\mathrm{tang}\gamma$ negativ iſt. Für $\phi = 90°$ fällt C in D, weil $\mathrm{tang}\phi = \infty$, und alſo $DC = \frac{r\,\mathrm{sec}\lambda}{\mathrm{tang}\phi} = 0$ wird. Der Halbmeſſer iſt nun $= r\,\mathrm{sec}\lambda = DP$.

22 §.

Bey dieſer Auflöſung ſind folgende Umſtände merkwürdig. Die Linie TD wird allein durch den Winkel λ und nicht durch ϕ beſtimmt. Demnach werden die Mittelpuncte der Projectionen aller Stundenkreiſe in der Linie EF liegen, wenn λ einerley bleibt. Ziehet man in der 11 Fig. die grade Linie Op, welche die Tafel in P durchbohret, ſo iſt P die Projection des Pols p und dieſer liegt in Bb, dem Durchſchnitt des Meridians und der Tafel, oder der Mittagslinie, worinn ſich der Meridian des Orts Z projicirt, wie auch die Gleichung ergiebt, weil für $\phi = 0$, $\mathrm{cosec}\phi = \infty$ alſo der Kreis eine grade Linie wird. Man hat alſo TP, wenn man in der Gleichung zwiſchen t und u die Abſciſſe $t=o$ ſetzt. Dieß gab $u = -r\text{tang}\lambda \pm r\text{sec}\lambda$, alſo iſt $TP = r(\text{sec}\lambda - \text{tang}\lambda) = r\text{tang}\,\frac{90^\circ-\lambda}{2} = r\text{tang}\,\frac{1}{2}pZ$, wie auch unmittelbar aus der Zeichnung erhellet. Wenn man die Linie Oq zöge, und bis ſie mit der Tafel zuſammen ſtieße verlängerte, ſo würde der Durchſchnittspunct π unterwärts in der verlängerten TD fallen, und dieſer wäre dann die Projection des entgegengeſetzten Pols q. Dieſen giebt die andre Applicate für $u=o$. Es wird nämlich $T\pi = -r(\text{sec}\lambda + \text{tang}\lambda) = -r\text{tang}\,\frac{90^\circ+\lambda}{2} = r\text{tang}\,\frac{qZ}{2}$, wie ebenfalls auch aus der Zeichnung erhellet. Da nun dieſe beyden Ordinaten ebenfalls nicht von Φ abhängen, ſo ſind die Puncte P und Q für alle Stundenkreiſe einerley, und die Projectionen aller Stundenkreiſe ſchneiden einander in dieſen Puncten. Wenn nun in der Tafel die Linie PC gezogen iſt, ſo wird $PD : DC = 1 : \text{tang}\,CPD = r\text{sec}\lambda : \frac{r\text{sec}\lambda}{\text{tang}\Phi} = 1 : \text{cot}\Phi$. Alſo iſt $\text{tang}\,CPD = \text{cot}\Phi$, folglich $CPD = 90^\circ - \Phi$. Hat man demnach $TD = r\text{tang}\lambda$ genommen, und durch D eine Parallele EF mit der Fundamentallinie gezogen, ſo ſetze man an P den Winkel $DPC = 90^\circ - \Phi$, und es wird PC die Linie EF im Mittelpunct des Kreiſes ſchneiden, der der Projection des Stundenkreiſes zugehört, welcher mit dem Mittagskreiſe einen Winkel $= \Phi$ einſchließt.

23 §.

Es rücke nun das Auge in der Axe der Tafel (11 Fig.) von der Tafel weg, bis LO mit OZ parallel und die Projection orthographiſch wird; ſo fällt die orthographiſche Projection K des Puncts L mit T und K in grader Linie. Es iſt nämlich TK die Projection des Verticalkreiſes ZL, und es wird pZL das Azimuth

des Puncts L, ſo wie ZL ſein Abſtand vom Zenith iſt. Dafern nun noch $AL = \psi$ des Puncts L geographiſche Breite gegeben iſt, ſo hat man die Lage des Puncts L völlig beſtimmt. Im ſphäriſchen Dreyeck pZL iſt nun $LpZ = \phi$, $pZ = 90° - \lambda$, $pL = 90° - \psi$, und $\cos ZL = \cos pL \cos pZ + \cos ZpL \sin pL \sin pZ$, $\tang pZL =$
$$\frac{\sin pL \sin ZpL}{\cos pL \sin pZ - \cos ZpL \cos pZ \sin pL},$$
alſo wird $\cos ZL = \sin\psi \sin\lambda + \cos\phi \cos\psi \cos\lambda$, und $\tang pZL = \frac{\cos\psi \sin\phi}{\sin\psi \cos\lambda - \cos\phi \sin\lambda \cos\psi}.$ Ferner hat man im ſphäriſchen Dreyeck VLZ auch $\cos ZL = \cos VZ \cos VL + \cos ZVL \sin VZ \sin VL$ und
$$\tang VZL = \frac{\sin VL \sin ZVL}{\cos VL \sin VZ - \cos ZVL \cos VZ \sin VL}.$$
Es war aber
$$x = \frac{rt \sin\xi + ru \cos\varepsilon \cos\xi}{r \sin\varepsilon \sin\xi - t \cos\varepsilon \sin\xi - u \cos\xi},\ y = \frac{ru \sin\varepsilon}{r \sin\varepsilon \sin\xi - t \cos\varepsilon \sin\xi - u \cos\xi},$$
und $\varepsilon = VZ$, $\xi = LVZ$. Ferner iſt $x = r \cos VL$
$$= \frac{rt \sin\xi + ru \cos VZ \cos\xi}{r \sin VZ \sin\xi - t \cos VZ \sin\xi - u \cos\xi},$$
und $y = r \sin VL$
$$= \frac{ru \sin VZ}{r \sin VZ \sin\xi - t \cos VZ \sin\xi - u \cos\xi}.$$
Aus den beyden letzten Gleichungen folgt dieſe $\frac{\cos VL}{t \sin\xi + u \cos VZ \cos\xi} = \frac{\sin VL}{u \sin VZ}$, oder $u \sin VZ \cos VL - t \sin\xi \sin VL - u \cos\xi \cos VZ \sin VL = o$. Wenn man ferner die erſte mit $\cos VL$, die letzte mit $\sin VL$ multiplicirt, und beyde addirt, ſo wird $u \sin VZ \sin VL + t \sin\xi \cos VL + u \cos VZ \cos\xi \cos VL = r \sin VZ \sin\xi - t \cos VZ \sin\xi - u \cos\xi$. Man multiplicire dieſe wiederum mit $\sin VL$ und die nächſt vorhergehende mit $\cos VL$, addire ſodann beyde zuſammen, ſo erhält man
$$u \sin VZ = r \sin\xi \sin VZ \sin VL - t \sin\xi \cos VZ \sin VL - u \cos\xi \sin VL$$
oder
$$u(\sin VZ + \cos\xi \sin VL) = t \sin\xi \sin VZ \sin VL - t \sin\xi \cos VZ \sin VL$$
und

und $u = \dfrac{r\sin\xi \sin VZ \sin VL - t\sin\xi \cos VZ \sin VL.}{\sin VZ + \cos\xi \sin VL}$

Aber aus der Gleichung $u\sin VZ \cos VL - t\sin\xi \sin VL - u\cos\xi \cos VZ \sin VL = 0$ folgt $u = \dfrac{t\sin\xi \sin VL}{\sin VZ \cos VL - \cos\xi \cos VZ \sin VL.}$ Beyde Werthe gleich geſetzt geben

$$\frac{t}{\sin VZ \cos VL - \cos\xi \cos VZ \sin VL} = \frac{r\sin VZ - t\cos VZ}{\sin VZ + \cos\xi \sin VL},$$

und daraus folgt

$(\sin VZ + \cos\xi \sin VL + \sin VZ \cos VZ \cos VL - \cos\xi \sin VL \cos VZ^2)t =$ $= r(\sin VZ^2 \cos VL - \cos\xi \sin VZ \cos VZ \sin VL)$. Setzt man nun $1 - \cos VZ^2 = \sin VZ^2$, ſo kann man alles mit $\sin VZ$ dividiren, und es wird $t = \dfrac{r(\sin VZ \cos VL - \cos\xi \cos VZ \sin VL)}{1 + \cos VZ \cos VL + \cos\xi \sin VZ \sin VL}$.

Dieß in den letzten Ausdruck für u ſtatt t geſetzt giebt

$$u = \frac{r\sin\xi \sin VL}{1 + \cos VZ \cos VL + \cos\xi \sin VZ \sin VL}.$$

Nun war $\sin VZ \cos VL - \cos\xi \cos VZ \sin VL = \dfrac{\sin VL \sin\xi}{\tan VZL}$ und $\cos VZ \cos VL + \cos\xi \sin VZ \sin VL = \cos ZL$, alſo wird $t = \dfrac{r\sin VL \sin\xi}{\tan VZL\,(1 + \cos ZL)}$, $u = \dfrac{r\sin VL \sin\xi}{1 + \cos ZL}$. Weil nun überdem $\dfrac{\sin VL}{\sin VZL} = \dfrac{\sin ZL}{\sin\xi}$, alſo $\sin VL \sin\xi = \sin ZL \sin VZL$, ſo erhält man $t = \dfrac{r\sin ZL \sin VZL}{\tan VZL\,(1 + \cos ZL)}$, $u = \dfrac{r\sin ZL \sin VZL}{1 + \cos ZL}$: oder $t = \mathrm{rang}\,\tfrac{1}{2}ZL \cos VZL$, $u = r\tan\tfrac{1}{2}ZL \sin VZL$. Aber im ſphäriſchen Dreyeck pZL hat man $pZL = 90° - VZL$, und $\dfrac{\sin ZL}{\sin\phi} = \dfrac{\sin pL}{\sin pZL} = \dfrac{\cos\psi}{\cos VZL}$, alſo $\cos VZL = \dfrac{\cos\psi \sin\phi}{\sin ZL}$. Dieß giebt $t = \dfrac{r\cos\psi \sin\phi \tan\frac{1}{2}ZL.}{\sin ZL}$

Endlich hat man im ſphäriſchen Dreyeck pZL auch $\cos pZL = \frac{\cos pL - \cos ZL \cos pZ}{\sin ZL \sin pZ} = \sin VZL$, alſo $\sin VZL = \frac{\sin\psi - \cos ZL \sin\lambda}{\sin ZL \cos\lambda}$, und $u = \frac{r\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}ZL\,(\sin\psi - \cos ZL \sin\lambda)}{\sin ZL \cos\lambda}$.

24 §.

Wenn man die Formuln des 21 §. und die daraus im vorigen 23 §. hergeleiteten mit dem 16 §. vergleicht, ſo findet man allenthalben eine völlige Uebereinſtimmung, und es hätte die Auflöſung des 16 §. aus dieſer hergeleitet werden können, weil jene von dieſer nur ein beſondrer Fall iſt. Im 16 §. ward angenommen, daß Z im Aequator ſelbſt ſtehe. Wenn man demnach $\lambda = ZF = o$ ſetzt, ſo müſſen die jetzigen Formuln insgeſammt mit denjenigen übereinkommen, die im 16 §. erwieſen ſind. Es war hier der Halbmeſſer der Projection $= r\sin\lambda\,\mathrm{cosec}\,\phi$, und dieſer wird $= r\,\mathrm{cosec}\,\phi$ wenn $\lambda = o$ iſt. Es fällt nun F in Z und p in B, und ϕ wird das Complement des Winkels, den der Meridian pL mit der Tafel macht. Dieſer war im 16 §. $= \gamma$, alſo iſt $\mathrm{cosec}\,\phi = \sec\gamma$, und der Halbmeſſer der Projection wird $= r\sec\gamma$, wie im 16 §. Ferner wird $TD = r\,\mathrm{tang}\lambda = o$, und $DC = -\frac{r\sec\lambda}{\mathrm{tang}\phi} = -\frac{r}{\cot\gamma} = -r\,\mathrm{tang}\gamma = TC$ im 16 §. Aus $t = \frac{r\cos\psi \sin\phi\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}ZL}{\sin ZL}$, und $u = \frac{r\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}ZL\,(\sin\psi - \cos ZL \sin\lambda)}{\sin ZL \cos\lambda}$ wird $t = \frac{r\cos\psi \cos\gamma\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}ZL}{\sin ZL}$ und $u = \frac{r\sin\psi\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}ZL}{\sin ZL}$, wenn $\lambda = o$ und $\phi = 90° - \gamma$ geſetzt wird, ſo wie man auch $\cos ZL = \cos\phi \cos\psi = \sin\gamma \cos\psi$ erhält, wie dem 16 §. gemäß iſt.

25 §.

Bey eben der Lage des Meridians oder Stundenkreiſes *pLA* gegen die Tafel, wie im 21 §. die orthographiſche Projection deſſelben zu finden.

Aufl. Wenn man in den Formuln des 10 §. für die orthographiſche Projection, wo $a=0$ iſt, auch $b=c=0$, ſetzt, wie es den Vorausſetzungen des 20 §. gemäß iſt, ſo wird $x = t\sec\eta - u\tan\eta\cot d$, und $y=\frac{u}{\sin d}$. Man ſetze wie im 20 §. $\eta = 90° - \varepsilon$ und $d = 180° - \xi$ ſo erhält man $x = t\operatorname{cosec}\varepsilon + u\cot\varepsilon\cot\xi$ und $y = \frac{u}{\sin\xi}$. Dieß in die Gleichung $xx + yy = rr$ geſetzt giebt für die orthographiſche Projection $\frac{t}{\sin\varepsilon} + \frac{u\cos\varepsilon\cos\xi}{\sin\varepsilon\sin\xi})^2 + \frac{uu}{\sin\xi^2} = rr$, oder $(t\sin\xi + u\cos\varepsilon\cos\xi)^2 + uu\sin\varepsilon^2 = rr\sin\varepsilon^2\sin\xi^2$.
Hieraus folgt
$uu\cos\varepsilon^2\cos\xi^2 + 2tu\sin\xi\cos\xi\cos\varepsilon + tt\sin\xi^2 = rr\sin\varepsilon\sin\xi^2 + uu\sin\varepsilon^2$
oder auch $uu(1 - \cos\varepsilon^2\sin\xi^2) + 2tu\sin\xi\cos\xi\cos\varepsilon + tt\sin\xi^2 = rr\sin\varepsilon\sin\xi^2$.

Man ſubſtituire aus dem 20 §. die Werthe $\cos\varepsilon\sin\xi = \cos\phi$, $\sin\varepsilon\sin\xi = \sin\phi\cos\lambda$, $\cos\xi = \sin\phi\sin\lambda$, ſo wird
$uu(\sin\phi^2 + 2tu\sin\phi\cos\phi\sin\lambda + tt(1 - \sin\phi^2\sin\lambda^2) = rr\sin\phi^2\cos\lambda^2$
oder $uu + 2tu\cot\phi\sin\lambda + (\operatorname{cosec}\phi^2 - \sin\lambda^2)\,tt = rr\cos\lambda^2$.
Die Gleichung drückt eine Ellipſe aus, dafern $\cot\phi^2\sin\lambda^2 < \operatorname{cosec}\phi^2 - \sin\lambda^2$. Es iſt aber dieſe Vorausſetzung wirklich richtig, denn es iſt allemal $\operatorname{cosec}\phi^2\sin\lambda^2 < \operatorname{cosec}\phi^2$, alſo $\cot\phi^2\sin\lambda^2 + \sin\lambda^2 < \operatorname{cosec}\phi^2$, und $\cot\phi^2\sin\lambda^2 < \operatorname{cosec}\phi^2 - \sin\lambda^2$.

Die Ebene des Meridians *p*LA (11 Fig.) ſchneide die Tafel in der graden Linie TN, ſo hat man im ſphäriſchen Dreyeck

BpN *tang* $BN = \sin Bp$ *tang* $BpN = \sin\lambda\ \mathrm{tang}\phi$, alſo $\sin BN = \frac{\sin\lambda \sin\phi}{\surd(1 - \cos\lambda^2 \sin\phi^2)}$, $\cos BN = \frac{\cos\phi}{\surd(1 - \cos\lambda^2 \sin\phi^2)}$. Es ſey die Projection auf der Ebene der Tafel gezeichnet, GH ſey die Fundamentallinie, T der Augenpunct, PQ die Projection des Meridians $TW = t$, $WK = u$. Wenn $u = o$, ſo wird $t = \pm \frac{r\sin\phi \cos\lambda}{\surd(1 - \sin\phi^2 \sin\lambda^2)}$, und wenn $t = o$, ſo iſt $u = \pm r\cos\lambda$. Alſo ſchneidet die Projection die Fundamentallinie in E und F, (15 Fig.) ſo daß $TE = TF = \frac{r\cos\phi \cos\lambda}{\surd(1 - \sin\phi^2 \sin\lambda^2)}$, die Projection des Meridians aber in Π und π, ſo daß $T\Pi = T\pi = r\cos\lambda$. Demnach iſt T der Ellipſe Mittelpunct, und EF, $\Pi\pi$ ſind ein paar Durchmeſſer, aber keine zuſammen gehörige. Man ziehe nun TN unter dem Winkel PTN, ſo daß $\sin PTN = \frac{\sin\lambda \sin\phi}{\surd(1 - \cos\lambda^2 \sin\phi^2)}$ und $\cos PTN = \frac{\cos\phi}{\surd(1 - \cos\lambda^2 \sin\phi^2)}$. Auf TN ſey TR ſenkrecht, und KR mit TN parallel. Setzt man nun $TR = s$, und $RK = Z$, ſo ergiebt ſich auf folgende Art eine Gleichung zwiſchen s und Z. Aus Vergleichung der ähnlichen Dreyecke TWV, TRS, SKW, VKR findet man $t = s\cos PTN - z\sin PTN$ $u = z\cos PTN + s\sin PTN$, alſo wird $t = \frac{s\cos\phi - z\sin\lambda \sin\phi}{\surd(1 - \cos\lambda^2 \sin\phi^2)}$; $u = \frac{z\cos\phi + s\sin\lambda \sin\phi}{\surd(1 - \cos\lambda^2 \sin\phi^2)}$. Die gefundene Gleichung für die Projection läßt ſich ſo ausdrücken $uu\sin\phi^2 + 2tu\sin\phi \cos\phi \sin\lambda + tt(\cos\lambda^2 + \cos\phi^2 \sin\lambda^2) = rr\sin\phi^2 \cos\lambda^2$ oder $(u\sin\phi = t\cos\phi \sin\lambda)^2 + tt\cos\lambda^2 = rr\sin\phi^2 \cos\lambda^2$; und man findet, wenn man der Kürze wegen $\surd(1 - \cos\lambda^2 \sin\phi)^2 = R$ ſetzet.

$$u\sin\phi = (z\sin\phi \cos\phi + s\sin\lambda \sin\phi^2) : R$$

$$+ t\cos\phi \sin\lambda = (-z\sin\phi \cos\phi \sin\lambda^2 + s\sin\lambda \cos\phi^2) : R$$

alſo $u\sin\phi + t\cos\phi \sin\lambda = z\sin\phi \cos\phi \cos\lambda^2 + s\sin\lambda$,

ferner erhält man
$(u\sin\phi + t\cos\phi\sin\lambda)^2 = (ss\sin\lambda^2 + 2sz\sin\phi\cos\phi\sin\lambda\cos\lambda^2 + zz\sin\phi^2 \cos\phi^2 \cos\lambda^4) : R^2$
$tt\cos\lambda^2 = (ss\cos\phi^2 \cos\lambda^2 - 2sz\sin\phi\cos\phi\sin\lambda\cos\lambda^2 + zz\sin\phi^2 \sin\lambda^2 \cos\lambda^2) : R^2$
alſo $(u\sin\phi + t\cos\phi\sin\lambda)^2 + tt\cos\lambda^2$
$= ss(1 - \sin\phi^2 \cos\lambda^2) : R^2 + zz\sin\phi^2 \cos\lambda^2 (1 - \sin\phi^2 \cos\lambda^2) : R^2$
und weil $R^2 = 1 - \sin\phi^2 \cos\lambda^2$, ſo ergiebt ſich folgende Gleichung $ss + zz\sin\phi^2 \cos\lambda^2 = rr\sin\phi^2 \cos\lambda^2$ oder auch $zz = rr - \frac{ss}{\sin\phi^2 \cos\lambda^2}$. Wenn $s = o$, ſo wird $z = \pm r$, alſo $TC = TD = r$: wenn aber $z = o$, ſo wird $s = \pm r\sin\phi\cos\lambda$, alſo iſt $TA = TB\ r\sin\phi\cos\lambda$, und wenn man $\sin\phi\cos\lambda = \frac{TA}{r}$ in die Gleichung ſetzt, ſo wird $zz = rr - \frac{rr}{TA^2} ss$. Demnach iſt $CD = 2r$ die Zwergaxe und AB $= 2r\sin\phi\cos\lambda$ die conjugirte Axe der Ellipſe, und dieſe letztere ſchneidet die Fundamentallinie unter einem Winkel ATE deſſen Tangente $= \sin\lambda\tan\phi$. Es ſey der Winkel $= N$, unter welchem der Meridian pLA die Tafel bey N ſchneidet, ſo iſt $\cos N = \sin\phi\cos\lambda$, alſo $TA = TB = r\cos N$, wie dem 17 §. gemäß iſt. Wenn man $\lambda = o$ ſetzt, ſo fallen Tp und TN in TB zuſammen, und man erhält die Gleichung ſowohl als die übrigen im 17 §. hergeleiteten Formuln, wenn man auch $\phi = 90° - \gamma$ ſetzt.

26 §.

Man kann auch hier für die orthographiſche Projection t und u auf eine ähnliche Art, wie im 17 §. ausdrücken. Es war nämlich $x = \frac{t\sin\xi + u\cos VZ\cos\xi}{\sin VZ\sin\xi}$ und $y = \frac{u}{\sin\xi}$, wo $VZ = \varepsilon$ iſt.

Man nehme nun $x = TF = r\cos VL$ und $y = FL = r\sin VL$, ſo erhält man

$$r\cos VL = \frac{t\sin\xi + u\cos VZ\cos\xi}{\sin VZ\sin\xi}$$

$$r\sin VL = \frac{u\sin VZ}{\sin VZ\sin\xi}.$$

Hieraus folgt $\frac{\cos VL}{t\sin\xi + u\cos VZ\cos\xi} = \frac{\sin VL}{u\sin VZ}$ oder $u\sin VZ\cos VL - t\sin\xi\sin VL - u\cos\xi\cos VZ\sin VL = 0$.

Wenn ferner die erſte mit $\cos VL$. die letzte mit $\sin VL$ multiplicirt wird, und man addirt beyde, ſo wird

$u\sin VZ\sin VL + t\sin\xi\cos VL + u\cos\xi\cos VZ\cos VL = r\sin\xi\sin VZ$

Die letzte mit $\sin VZ$ und die nächſtvorhergehende mit $\cos VL$ multiplicirt und beyde zuſammen addirt geben $u\sin VZ = r\sin\xi\sin VZ\sin VL$, alſo wird $u = r\sin\xi\sin VL$. Aber die Gleichung $u\sin VZ\cos VL - t\sin\xi\sin VL - u\cos\xi\cos VZ\sin VL = 0$ giebt $u = \frac{t\sin\xi\sin VL}{\sin VZ\cos VL - \cos\xi\cos VZ\sin VL}$. Beyde Werthe von u gleich geſetzt geben $t = r(\sin VZ\cos VL - \cos\xi\cos VZ\sin VL)$. Nun war $\mathrm{tang}\,VZL = \frac{\sin\xi\sin VL}{\sin VZ\cos VL - \cos\xi\cos VZ\sin VL}$, alſo iſt $t = \frac{r\sin\xi\sin VL}{\mathrm{tang}\,VZL}$. Wenn alſo $Tw = \frac{r\sin\xi\sin VL}{\mathrm{tang}\,VZL}$, $wk = r\sin\xi\sin VL$, ſo iſt $\frac{wk}{Tw} = \mathrm{tang}\,VZL = \frac{WK}{TW}$ (23 §.) wie erfordert wird, weil T, K, k, in grader Linie liegen. Weil auch $\sin\xi\sin VL = \sin ZL\sin VZL$, ſo wird $t = \frac{r\sin ZL\sin VZL}{\mathrm{tang}\,VZL} = r\sin ZL\cos VZL$; und da ferner $\cos VZL = \frac{\cos\psi\sin\phi}{\sin ZL}$, ſo wird $t = r\cos\psi\sin\phi$ und $u = r\sin ZL\sin VZL = \frac{r(\sin\psi - \cos ZL\sin\lambda)}{\cos\lambda}$.

27 §.

Bey den Vorausſetzungen des 21 §. in Anſehung der Lage des Auges gegen die Tafel, und der Lage des Orts *Z* gegen den Aequator, die Projectionen ſo vieler Stundenkreiſe als verlangt wird, z. Ex. von 15 zu 15 Graden durch Zeichnung zu finden.

Aufl. Um den Mittelpunct T (14 Fig.) ſey ein Kreis beſchrieben mit dem Halbmeſſer $= r$, welcher den Horizont, als die Tafel vorſtellet, und in demſelben ein paar ſenkrechte Durchmeſſer GH, BQ, ſo iſt T der Augenpunct, GH die Fundamentallinie BQ die Projection des Meridians des Orts Z. Nun ſey z. Ex. $\lambda = 22\frac{1}{2}°$, ſo nehme man den Bogen $HE = 2 \times 22\frac{1}{2}°$ und ziehe GE, welche BQ in D ſchneidet, ſo iſt $TD = r\tang 22\frac{1}{2}°$, und wenn durch D eine grade Linie CD mit der Fundamentallinie parallel gezogen wird, ſo liegen die Mittelpuncte aller geſuchten Projectionen in dieſer Linie. Man nehme ferner $HF = 90° - 22\frac{1}{2}°$ und ziehe GF, welche BT in P ſchneidet, ſo iſt P die Projection des Pols, der über dem Horizont liegt, weil $TP = r\tang \frac{90° - 22\frac{1}{2}°}{2}$. An PD lege man die Winkel $DPC = 15°$, $DPI = 30°$, $DPK = 45°$, $DPR = 60°$, $DPr = 75°$, und bemerke die Durchſchnittspuncte C, I, K, in der Linie DC, ſo geben dieſe die Mittelpuncte der Projectionen derjenigen Stundenkreiſe ab, die den Meridian unter Winkeln ſchneiden, welche die Winkel an P zu 90° ergänzen. Alſo beſchreibe man nach der Ordnung mit den Halbmeſſern CP, IP, KP, u. ſ. f. Kreiſe, ſo hat man die Projectionen der Stundenkreiſe, die den Meridian unter Winkeln von 75°, 60°, u. ſ. f. bis 15° ſchneiden.

Bey Stundenkreiſen, die gegen dem Mittagskreis unter ſehr kleinen Winkeln geneigt ſind, iſt man einer ähnlichen Unbequemlichkeit, wie bey den vorigen §§. unterworfen, weil die Halbmeſſer der Kreiſe ſehr groß ausfallen. Man kann aber in ſolchen Fällen entweder die Halbmeſſer ſelbſt aus der Formul $r\sec\lambda \times \operatorname{cosec}\phi$ leicht berechnen: oder wenn auch die Verzeichnung der Kreiſe mit ſo großen Halbmeſſern ihre Schwierigkeit hat; ſo dienen die Formuln des 23 §. für t und u, die Coordinaten ſelbſt zu berechnen, und ſo viele Puncte in der Projection zu ſuchen als nöthig iſt, um die Projection aus freyer Hand durch dieſe Puncte zu zeichnen. Dieß letztere hat vornehmlich ſeinen Nutzen bey Verzeichnung geographiſcher Charten nach der vom Herrn Haſe angerühmten ſtereographiſchen Horizontalprojection. Es war aber $t = \frac{r\cos\psi\,\sin\phi\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}ZL}{\sin ZL} = r\cos VZL\;\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}ZL$, weil $\cos VZL = \frac{\cos\psi\,\sin\phi}{\sin ZL}$, und $u = r\sin VZL\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}ZL$. Weil ſich nun ϕ für einerley Mittagskreis nicht ändert, ſo darf man nur ZL, und hierauf VZL berechnen, indem man nach und nach andre Werthe für ψ annimmt, da dann die übrige Rechnung vermittelſt der Logarithmen ſehr leicht iſt. Die Formul $\cos ZL = \sin\psi\,\sin\lambda + \cos\phi\,\cos\psi\,\cos\lambda$ iſt hier faſt eben ſo bequem, ZL zu finden, als wenn man auf die ſonſt gewöhnliche Art das Dreyeck ZpL in zwey rechtwinklichte zerfallet.

Es ſey $r = 10000$, $\phi = 1°$, $\psi = 40°$, $\lambda = 22\frac{1}{2}°$, ſo giebt die Rechnung

$l\sin\psi = 9.8080675$
$l\sin\lambda = 9,\ 5828397$
$19.3909072 - 10$

$l\cos\psi = 9.8842540$
$l\cos\lambda = 9.9656153$
$l\cos\phi = 9.9999338$
$29.8498031 - 20$

$\sin\psi\,\sin\lambda = 2459842$
$\cos\phi\,\cos\psi\,\cos\lambda = 7076250$
$\cos ZL = 9536092$ alſo $ZL = 17°\ 32'$
und $\frac{1}{2}ZL = 9°\ 46'$.

$l\cos\psi$

$$\begin{aligned}
l\cos\psi &= 9.\ 8842540 \\
l\sin\phi &= 8.\ 2418553 \\
\hline
&\ 18.\ 1261093 \\
l\sin ZL &= 9.\ 4789423. \\
\hline
l\cos VZL &= 8.\ 6471670 \\
lr\tan g\tfrac{1}{2}ZL &= 13.\ 2358589. \\
\hline
lt &= 21.\ 8830259-20. \\
t &= 76.\ 425,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
VZL &= 87^\circ\ 27'\tfrac{2}{5}. \\
l\sin VZL &= 9.\ 9995719 \\
lr\tan g\tfrac{1}{2}ZL &= 13.\ 2358589. \\
\hline
lu &= 23.2354308-20. \\
u &= 1719.\ 613,
\end{aligned}$$

Man nehme alſo TY = 1719, 613; und YZ = 76, 425, ſo iſt Z ein Punct in der Projection.

Wenn V ein gegebener Punct in der Projection eines Stundenkreiſes iſt, der z. E. um 30° vom erſten abſtehet, ſo findet man die zugehörige orthographiſche Projection S eben dieſes Puncts auf eben die Art, wie im 18 §. Man ziehet TV, faſſet TD = TV, und ziehet DG, welche den Kreis GBHQ in E ſchneidet. Aus E ſetzet man EX auf GH ſenkrecht, und nimmt ſodann TS = EX, ſo iſt S die orthographiſche Projection deſſelben Puncts, wovon V die ſtereographiſche iſt.

28 §.

Es bleibe noch alles wie im 21 §. (12 Fig.) in Anſehung der Lage des Auges, der Tafel, und des Orts *Z* gegen den Aequator *ÆQ*; nur ſey ſtatt des Stundenkreiſes ein Parallelkreis *BLD* des Aequators gegeben, deſſen Abſtand vom Aequator *MD* = ψ bekannt iſt: man ſoll ſeine Projection auf der Tafel ſuchen.

Aufl. Der Parallelkreis ſchneide den Meridian des Orts Z in der graden Linie NM, und C ſey ſein Mittelpunct, BD ſey ein Durchmeſſer deſſelben auf MN ſenkrecht, ſo iſt BD auf der Ebene des Meridians ſenkrecht und mit TW parallel. Ferner iſt

CV mit ÆQ, des Aequators und Meridians Durchſchnitt, parallel, und CM ſchneidet TZ in E. Aber die erweiterte Ebene des Parallelkreiſes ſchneidet die Fundamentalebene in der Linie EF, ſo daß EF mit TW parallel iſt und TEF = 90°, weil beyde Ebenen, alſo auch EF auf dem Meridian ſenkrecht ſind. Es ſey LF auf EF ſenkrecht, und ſchneide BD in f. Da nun der Winkel ETQ = λ, weil der Bogen QZ ſein Maas iſt, ſo iſt auch CET = λ. Dieſer Winkel aber iſt der Neigungswinkel der Ebene des Parallelkreiſes gegen die Fundamentalebene. Alſo wird in den allgemeinen Formuln des 9 §. $d = \lambda$. Ueberdem iſt $\eta = o$, $a = o$, $\delta = r$, alſo $\sin\eta = o$, $\cos\eta = 1$. Dieß in den allgemeinen Formuln des 9 §. geſetzt giebt

$$x = \frac{(c+r)t}{u\cot\lambda + r} = \frac{(c+r)\,t\sin\lambda}{u\cos\lambda + r\sin\lambda},$$ und

$$y = \frac{(c+r)u}{u\cos\lambda + r\sin\lambda}.$$ Weil nun TE = c iſt, ſo wird CE = $c.\cos\lambda$ = Ff. Ueberdem iſt EF = Cf = x, FL = y; aber FL = Ff — fL, alſo $y = c.\cos\lambda - f\mathrm{L}$, und $f\mathrm{L} = c.\cos\lambda - y$. Weil ferner MQ = ψ, ſo iſt CT = $r\sin\psi$, CM = CB = CL = $r\cos\psi$. Nun hat man für den Parallelkreis die Gleichung $\mathrm{C}f^2 + f\mathrm{L}^2 = \mathrm{CL}^2$. Setzt man hier die gefundenen Werthe ſtatt Cf, fL und CL, ſo erhält man zwiſchen x und y die Gleichung $xx + (y - c.\cos\lambda)^2 - rr.\cos\psi^2 = o$.

Nun iſt $$y - c.\cos\lambda = \frac{(c+r)u}{u\cos\lambda + r\sin\lambda} - c.\cos\lambda$$

$$= \frac{(c\sin\lambda^2 + r)u - cr\sin\lambda\cos\lambda}{u\cos\lambda + r\sin\lambda}.$$ Dieß nebſt dem Werth

$$x = \frac{(c+r)\,t\sin\lambda}{u\cos\lambda + r\sin\lambda}$$ in die Gleichung geſetzt giebt

$$\begin{array}{llll}(c+r)^2\sin\lambda^2.\,tt + & cc\sin\lambda^4.\,uu - & 2ccr\sin\lambda^3\cos\lambda.\,u + & ccrr\sin\lambda^2\cos\lambda^2 = 0\\ & +2cr\sin\lambda^2 & -2crr\sin\lambda\cos\lambda & -r^4\cos\psi^2\sin\lambda^2\\ & & & \qquad\qquad +rr\end{array}$$

$$\begin{array}{ll} + rr & - 2r^3\cos\psi^2 \cos\lambda \sin\lambda \\ - rr \cos\lambda^2 \cos\psi^2 & \end{array}$$

Es iſt aber $rr(1-\cos\lambda^2 \cos\psi^2) = rr(\sin\lambda^2 + \cos\lambda^2 \sin\psi^2)$, und wenn man dieß ſubſtituirt, ſodann aber alles mit $\sin\lambda^2$ dividirt, ſo wird

$$\begin{array}{lll} (c+r)^2\, tt + cc\sin\lambda^2. & uu - 2ccr\sin\lambda \cos\lambda. & u + crr\cos\lambda^2 = 0, \\ \quad + 2cr & \quad - \dfrac{2crr\cos\lambda}{\sin\lambda} & \quad - r^4\cos\psi^2 \\ \quad + rr & & \\ \quad + \dfrac{rr\cos\lambda^2 \sin\psi^2}{\sin\lambda^2} & \quad - \dfrac{2r^3\cos\psi^2 \cos\lambda}{\sin\lambda} & \end{array}$$

Nun iſt $CE = CT \cot\lambda$ und $CT = r\sin\psi$, alſo $CE = r\sin\psi \cot\lambda$, und $TE = \surd(CT^2 + CE^2) = c = r\sin\psi \surd(1+\cot\lambda^2) = r\sin\psi \operatorname{cosec}\lambda$, oder $c = \dfrac{r\sin\psi}{\sin\lambda}$. Daraus folgt ferner $2rcc\sin\lambda \cos\lambda = \dfrac{2r^3\sin\psi^2 \cos\lambda}{\sin\lambda}$. Aber es iſt $\dfrac{2r^3\cos\psi^2 \cos\lambda}{\sin\lambda} = \dfrac{2r^3\cos\lambda}{\sin\lambda} - \dfrac{2r^3\sin\psi^2 \cos\lambda}{\sin\lambda}$, folglich $2rcc\sin\lambda \cos\lambda + \dfrac{2r^3\cos\psi^2 \cos\lambda}{\sin\lambda} = \dfrac{2r^2\cos\lambda}{\sin\lambda}$. Dieß in die gefundene Gleichung zwiſchen t und u geſetzt giebt

$$\begin{array}{lll} (c+r)^2\, tt + cc\sin\lambda^2. & uu - \dfrac{2r^3\cos\lambda.}{\sin\lambda} & u + ccrr\cos\lambda^2 = 0. \\ \quad + cc.\cos\lambda^2 & \quad - r^4\cos\psi^2 & \\ \quad + 2cr & \quad - \dfrac{2crr\cos\lambda}{\sin\lambda} & \\ \quad + rr & & \end{array}$$

oder $(c+r)^2\,(tt+uu) - 2rr\,(c+r)\cot\lambda.\, u + ccrr\cos\lambda^2 - r^4\cos\psi^2 = 0$. Nun kann man ferner $c = \dfrac{r\sin\psi}{\sin\lambda}$ ſubſtituiren, und man erhält die Gleichung

$$\left(\frac{\sin\psi}{\sin\lambda}+1\right)^2(tt+uu)-2rr\left(\frac{\sin\psi}{\sin\lambda}+1\right)u\cot\lambda+\frac{rr\sin\psi^2\cos\lambda^2}{\sin\lambda^2}-r^2$$
$$\cos\psi^2=0,$$

und dieſe gehörig geordnet giebt

$$tt+uu-\frac{2r\cos\lambda}{\sin\psi+\sin\lambda}u+\frac{rr(\sin\psi^2\cos\lambda^2-\cos\psi^2\sin\lambda^2)}{(\sin\psi+\sin\lambda)^2}=0.$$

Wenn man nun $t=0$ ſetzt, ſo ergiebt ſich $u=\frac{r\cos\lambda}{\sin\psi+\sin\lambda}$ $\pm\frac{r\cos\psi}{-\sin\psi+\sin\lambda}$, welches ſich auch ſo ausdrücken läßt $u=\frac{r(\cos\lambda+\cos\psi)}{\sin\psi+\sin\lambda}$. Es iſt aber $\frac{\cos\lambda+\cos\psi}{\sin\lambda+\sin\psi}=\cot\tfrac{1}{2}(\psi+\lambda)$ $=\text{tang}\tfrac{1}{2}\,180^\circ-(\psi+\lambda)$, und $\frac{\cos\lambda-\cos\psi}{\sin\lambda+\sin\psi}=\text{tang}\tfrac{1}{2}(\psi-\lambda)$. Alſo iſt der eine Werth $u=r\cot\tfrac{1}{2}(\psi+\lambda)$, der andre $u=r\,\text{tang}\tfrac{1}{2}(\psi-\lambda)$, wie auch aus Betrachtung der Figur leicht erhellet. Iſt nun die Projection *ak* (10 Fig.) auf der Ebene der Tafel gezeichnet, ſo daß T der Augenpunct und GH die Fundamentallinie iſt, und man nimmt $TC=\frac{r\cos\lambda}{\sin\psi+\sin\lambda}$, $Ca=-\frac{r\cos\psi}{\sin\psi+\sin\lambda}$, $Cb=$ $+\frac{r\cos\psi}{\sin\psi+\sin\lambda}$, ſo ſind die Puncte *a* und *b* in der Projection. Es ſey *ef* mit GH parallel, und ſchneide WK in *w*, ſo iſt $Cw=TW=t$. Man ſetze $wk=z$, ſo wird $\frac{r\cos\lambda}{\sin\psi+\sin\lambda}-z=u$, und dieß ſtatt u geſetzt giebt zwiſchen $Cw=t$, und $WK=Z$ die Gleichung

$$tt+\left(-z+\frac{r\cos\lambda}{\sin\psi+\sin\lambda}\right)^2-\frac{2r\cos\lambda}{\sin\psi+\sin\lambda}\left(-z+\frac{r\cos\lambda}{\sin\psi+\sin\lambda}\right)$$
$$+\frac{rr(\sin\psi^2\cos\lambda^2-\cos\psi^2\sin\lambda^2)}{(\sin\psi+\sin\lambda)^2}=0$$

oder $tt+zz+\frac{rr(\sin\psi^2\cos\lambda^2-\cos\psi^2\sin\lambda^2-\cos\lambda^2)}{(\sin\psi+\sin\lambda)^2}=0.$

Es iſt aber $(\sin\psi^2 - 1)\cos\lambda^2 - \cos\psi^2 \sin\lambda^2 = - \cos\psi^2 \cos\lambda^2 - \cos\psi^2 \sin\lambda^2 = - \cos\psi^2$. Alſo erhält man $tt + zz = \frac{\cos\psi^2}{(\sin\psi + \sin\lambda)^2}$, und die Projection iſt ein Kreis, deſſen Halbmeſſer $= \frac{r\cos\psi}{\sin\psi + \sin\lambda}$, und deſſen Mittelpunct C iſt. Die Mittelpuncte der Projectionen aller Parallelkreiſe liegen alſo in der graden Linie TC, welche die Projection des Meridians iſt. Nimmt man auf dieſer Linie $Ta = r\text{tang}\frac{1}{2}(\psi - \lambda)$ $Tb = r\text{tang}(90^\circ - \frac{1}{2}(\psi + \lambda))$, und halbirt *ab* bey C, ſo iſt C der Mittelpunct und $Ca = Cb$ der Halbmeſſer.

Wenn $\psi = 0$ iſt, oder der Parallelkreis der Aequator ſelbſt wird, ſo hat man $Ta = - r\text{tang}\frac{1}{2}\lambda$ und $Tb = \text{tang}(90 - \frac{1}{2}\lambda) = \cot\frac{1}{2}\lambda$.

29 §.

Wenn der Abſtand des Puncts L vom Meridian, oder ſein Stundenwinkel $ZpL = \phi$ gegeben iſt, ſo iſt die Lage dieſes Puncts und alſo x und y beſtimmt. Es wird nämlich $x = EF = Cf = r\cos\psi \sin\phi$, und $fL = r\cos\psi \cos\phi$, alſo $y = FL = Ff - fL = c.\cos\lambda - r\cos\psi\cos\phi = \frac{r\sin\psi \cos\lambda}{\sin\lambda} - r\cos\psi\cos\phi$, weil $c = \frac{r\sin\psi}{\sin\lambda}$.

Nun waren die allgemeinen Werthe dieſe

$$x = \frac{(\frac{r\sin\psi}{\sin\lambda} + r)\, t\sin\lambda}{u\cos\lambda + r\sin\lambda} = \frac{r(\sin\psi + \sin\lambda)t}{u\cos\lambda + r\sin\lambda}$$

$$y = \frac{(\frac{r\sin\psi}{\sin\lambda} + r)u}{u\cos\lambda + r\sin\lambda} = \frac{r(\sin\psi + \sin\lambda)u}{u\cos\lambda \sin\lambda + r\sin\lambda^2}$$

Dieſe Werthe ſetze man den vorigen gleich, ſo wird

$$\cos\psi \sin\phi = \frac{(\sin\psi + \sin\lambda)t}{u\cos\lambda + r\sin\lambda}$$

$$\frac{\sin\psi\cos\lambda}{\sin\lambda} - \cos\psi\cos\phi = \frac{(\sin\psi + \sin\lambda)u}{u\cos\lambda\sin\lambda + r\sin\lambda^2}$$

oder $\sin\psi\cos\lambda - \cos\psi\cos\phi\sin\lambda = \frac{(\sin\psi + \sin\lambda)u}{u\cos\lambda + r\sin\lambda}$

Aus beyden folgt

$$\frac{\cos\psi\sin\phi}{t} = \frac{\sin\psi\cos\lambda - \cos\psi\cos\phi\sin\lambda}{u}$$

oder $u = \frac{\sin\psi\cos\lambda - \cos\psi\cos\phi\sin\lambda}{\cos\psi\sin\phi}t.$

Aus der erſten, welche ebenfalls t und u enthält, erhält man

$$u\cos\lambda + r\sin\lambda = \frac{(\sin\psi + \sin\lambda)t}{\cos\psi\sin\phi}$$

alſo $u = \frac{(\sin\psi + \sin\lambda)t - r\sin\lambda\cos\psi\sin\phi}{\cos\lambda\cos\psi\sin\phi}.$

Beyde Werthe von u gleich geſetzt geben

$(\sin\psi + \sin\lambda - \sin\psi\cos\lambda^2 + \cos\psi\cos\phi\sin\lambda\cos\lambda)t = r\sin\lambda\sin\phi\cos\psi$

oder $(1 + \sin\psi\sin\lambda + \cos\psi\cos\phi\cos\lambda)t = r\sin\phi\cos\psi.$

Alſo wird $t = \frac{r\sin\phi\cos\psi}{1 + \sin\psi\sin\lambda + \cos\psi\cos\phi\cos\lambda}$

und $u = \frac{(\sin\psi\cos\lambda - \cos\psi\cos\phi\sin\lambda)r}{1 + \sin\psi\sin\lambda + \cos\psi\cos\phi\cos\lambda}.$

Nun war im 23 §. $\sin\psi\sin\lambda + \cos\psi\cos\phi\cos\lambda = \cos ZL$, und $\sin\psi\cos\lambda - \cos\psi\cos\phi\sin\lambda = \frac{\cos\psi\sin\phi}{\operatorname{tang} pZL}$, alſo wird $t = \frac{r\sin\phi\cos\psi}{1 + \cos ZL}$ und $u = \frac{\cos\psi\sin\phi}{\operatorname{tang} pZL\,(1 + \cos ZL)}$. Weil überdem $1 + \cos ZL = \frac{\sin ZL}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}ZL}$, und $\cos\psi\sin\phi = \sin ZL\cos VZL = \sin ZL\sin pZL$, ſo wird $t = r\operatorname{tang}\frac{1}{2}ZL\sin pZL = r\operatorname{tang}\frac{1}{2}ZL\cos VZL$, und

$u = \frac{r\operatorname{tang}\frac{1}{2}ZL\sin pZL}{\operatorname{tang} pZL} = r\operatorname{tang}\frac{1}{2}ZL\cos pZL = r\operatorname{tang}\frac{1}{2}ZL\sin VZL.$

Eben dieſe Ausdrücke ſind im 23 §. gefunden worden, wo auch t und u aus eben denſelben Datis geſucht wurde. Uebrigens iſt die Auflöſung der Aufgabe des 19 §. ein beſondrer Fall von der gegenwärtigen, und wenn man in den Formuln, die hier erwieſen ſind, $\lambda = o$, $\phi = 90^\circ - \gamma$ ſetzt, ſo ergeben ſich alle die Formuln des 19 §.

30 §.

Bey eben der Lage des Parallelkreiſes BLD gegen die Tafel und das Auge, wie im 28 §. die orthographiſche Projection deſſelben zu finden.

Aufl. Wenn man in den Formuln des 10 §. für die orthographiſche Projection, nämlich $x = t\sec\eta + b\sin\eta\cos\eta - u\,\mathrm{tang}\,\eta\cot d$, und $y = \frac{u}{\sin d}$, wie hier erfordert wird, $\eta = o$ und $d = \lambda$ ſetzt, ſo wird $x = t$, und $y = \frac{u}{\sin\lambda}$. Nun war die Gleichung des Parallelkreiſes zwiſchen x und y dieſe $xx + yy - 2cy\cos\lambda + cc.\cos\lambda^2 = rr\cos\psi^2$, alſo erhält man zwiſchen t und u dieſe Gleichung

$$tt + \frac{uu}{\sin\lambda^2} - \frac{2cu\cos\lambda}{\sin\lambda} + cc.\cos\lambda^2 = rr\cos\psi^2.$$

Da nun überdem $c = \frac{r\sin\psi}{\sin\lambda}$, ſo wird

$$tt + \frac{uu}{\sin\lambda^2} - \frac{2r\sin\psi\cos\lambda}{\sin\lambda^2}u + \frac{rr\sin\psi^2\cos\lambda^2}{\sin\lambda^2} = rr\cos\psi^2.$$

Wenn man $t = o$ ſetzt, ſo wird

$uu - 2r\sin\psi\cos\lambda.\ u + rr\sin\psi^2\cdot\cos\lambda^2 = rr\cos\psi^2$ und dieß giebt $u = r\,(\sin\psi\cos\lambda \pm \cos\psi\sin\lambda)$. Alſo iſt einmal $u = r\sin(\psi + \lambda)$, und zweytens auch $u = r\sin(\psi - \lambda)$. Es ſey nun $TC = r\sin\psi\cos\lambda$, (10 Fig.) und überdem $Ca = -r\cos\psi\sin\lambda$, $Cb = +r\cos\psi\sin\lambda$, ſo ſind a und b in der Projection. Ferner ſey durch C mit der Fundamentallinie GH die Parallele ef gezogen, welche WK in w ſchneidet, und man ſetze WK $= Z$, ſo wird $WK = Ww - wK$ oder $u = r\sin\psi\cos\lambda - z$. Dieß in die Gleichung zwiſchen t und u geſetzt, giebt zwiſchen $Cw = t$, und $WK = z$, Dieſe Gleichung

$$tt\sin\lambda^2 + zz - 2rz\sin\psi\cos\lambda + 2rr\sin\psi^2\cos\lambda^2 = rr\cos\psi^2\sin\lambda^2 + 2rz\sin\psi\cos\lambda - 2rr\sin\psi^2\cos\lambda^2$$

oder $zz = rr\cos\psi^2\sin\lambda^2 - tt\sin\lambda^2$. Demnach iſt die Projection eine Ellipſe, C ihr Mittelpunct, $Ca = Cb = r\cos\psi\sin\lambda$ ihre conjugirte Axe, und $Ce = Cf = r\cos\psi$ ihre Zwergaxe.

Wenn des Puncts L Stundenwinkel $ZpL = \phi$, und alſo $EF = r\cos\psi\sin\phi$, $FL = \frac{r\sin\psi\cos\lambda}{\sin\lambda} - r\cos\psi\cos\phi$ iſt, ſo erhält man $t = r\cos\psi\sin\phi$, und $u = r\sin\psi\cos\lambda - r\cos\psi\cos\phi\sin\lambda$. Iſt nun für die orthographiſche Projection $Tw = t$, $wk = u$, ſo hat man $\frac{wk}{Tw} = \frac{(\sin\psi\cos\lambda - \cos\psi\cos\phi\sin\lambda)}{\cos\psi\sin\phi} = \frac{WK}{TW}$ (29 §.) wie erfordert wird. Ueberdem iſt $\cos\psi\sin\phi = \sin ZL\cos VZL$, und $\sin\psi\cos\lambda - \cos\psi\cos\phi\sin\lambda = \frac{\cos\psi\sin\phi}{\cot VZL}$, alſo $Tw = r\sin ZL\cos VZL$, $wk = \frac{r\cos\psi\sin\phi}{\cot VZL} = \frac{r\sin ZL\cos VZL}{\cot VZL} = r\sin ZL\sin VZL$, folglich $Tk = \surd(Tw^2 + wK^2) = r\sin ZL$. Aber $TK = \surd(TW^2 + TK^2) = r\tang\frac{1}{2}ZL$ alſo $TK : Tk = \tang\frac{1}{2}ZL : \sin ZL$, wie nach dem 15 §. erfordert wird.

31 §.

Unter den Bedingungen des 28 §. (14 Fig.) die Projectionen ſo vieler Parallelkreiſe als verlangt wird, z. Ex. von 10 zu 10 Graden, auf der Tafel durch Zeichnung zu finden,

finden, wenn die geographiſche Breite λ des Orts Z gegeben iſt.

Aufl. Es ſey z. E. $\lambda = 22\frac{1}{2}°$, wie im 27 §. Man mache den Bogen $HA = 22\frac{1}{2}°$ und ziehe AG, welche PQ in N ſchneidet, ſo gehet die Projection des Aequators durch N. Man nehme auch den Bogen $BL = 22\frac{1}{2}°$, und ziehe GL, welche TP verlängert in M ſchneidet, halbire MN in c, ſo iſt c der Mittelpunct der Projection des Aequators. Denn es iſt $TN = -\mathrm{tang}\frac{1}{2}\lambda$ und $TM = \mathrm{tang}\,\frac{180° - \lambda}{2} = \mathrm{tang}\,(90° - \frac{1}{2}\lambda) = \mathrm{eot}\frac{1}{2}\lambda$. Nun iſt der Bogen LBA ein Halbkreis. Dieſen theile man von 10° zu 10° ein, und zehle die Grade ſowohl von L als auch von A aufwärts bis 90°. Hierauf ziehe man die graden Linien $G10$ und $G10$ auf beyden Seiten, dieſe werden PQ in a und b ſchneiden: da dann ab in e halbirt den Mittelpunct der Projection des Parallelkreiſes von 10° Breite giebt. Es iſt nämlich $Ta = r\mathrm{tang}\frac{1}{2}\,(-22\frac{1}{2}° + 10°)$ und $Tb = r\mathrm{tang}\frac{1}{2}\,(180° -)\,(22\frac{1}{2}° + 10°) = \mathrm{tang}\,(90° - \frac{22\frac{1}{2}° + 10°}{2}$. Wenn man ferner die Linien $G20$ und $G20$, $G30$, und $G30$, u. ſ. f. ziehet, ſo ergeben ſich auf eben die Art die Mittelpuncte der Projectionen aller übrigen Parallelkreiſe auf dieſer Seite des Aequators.

Für diejenigen Parallelkreiſe, die auf der andern Seite des Aequators liegen, wird ψ negativ, und man darf nur den andern Halbkreis AGL auf eben die Art eintheilen, auch mit der übrigen Verzeichnung völlig, wie vorhin verfahren. Wenn $\psi = -\lambda$ iſt; ſo geht die Projection durch D, wenn $TD = -r\mathrm{tang}\frac{1}{2}\,2\lambda = -r\mathrm{tang}\lambda$ genommen wird, und die Projection ſelbſt iſt eine grade Linie mit GH parallel, weil $r\mathrm{tang}\,(90° - \frac{-\psi + \lambda}{2} = r\mathrm{tang}\,90°$ unendlich groß wird.

Die Halbmeſſer derjenigen Parallelkreiſe werden hier wiederum ſehr groß, die mit dem Ort Z eine entgegengeſetzte, ſonſt aber beynahe gleiche Breite haben. Man findet durch die gelehrte Verzeichnung eigentlich die beyden äußerſten Puncte des Durchmeſſers der geſuchten Kreiſe, daher iſt der eigentlich geſuchte Mittelpunct allemal nur ungefähr halb ſo weit von T entfernt, als die höchſte Spitze des Durchmeſſers, den die Verzeichnung giebt. Statt dieſer bey etwas großen Kreiſen ziemlich unbequemen Verzeichnung kann man mit mehr Vortheil den geſuchten Halbmeſſer, nebſt der Puncte *a* Entfernungen, von T berechnen. Da der Halbmeſſer $= \frac{r\cos\psi}{\sin\psi + \sin\lambda} = \frac{r\cos\psi}{2\sin\frac{1}{2}(\psi+\lambda)\cos\frac{1}{2}(-\lambda)}$, und $Ta = r\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(\psi-\lambda)$ iſt, ſo läßt ſich die Berechnung vermittelſt der Logarithmen leicht bewerkſtelligen. Diejenigen Parallelkreiſe, welche dem Parallelkreis des Auges ſehr nahe liegen, laſſen ſich auch durch Puncte verzeichnen, die man aus den Formuln für *t* und *u* durch Rechnung findet, dafern der Halbmeſſer ſo groß ſeyn ſollte, daß die ſonſt gewöhnliche Verzeichnung des Kreiſes zu viel Schwierigkeit hätte.

Es ſey $r = 10000$, $\lambda = 50°$, $\psi = -20°$, $\lambda = 22\frac{1}{2}°$, ſo wird $\cos ZL = \cos\psi \cos\lambda \cos\lambda - \sin\psi \sin\lambda$

$l\cos\psi = 9.9729858$ $\qquad l\sin\psi = 9.5340517$

$l\cos\phi = 9.8080675$ $\qquad l\sin\lambda = \underline{9,5828397}$

$l\cos\lambda = \underline{9.9656153}$ $\qquad 19.1168914-10$

$29.7466686-20$

$\cos\psi \cos\phi \cos\lambda = 5580443$

$\sin\psi \sin\lambda = \underline{1308854}$

$\cos ZL = 4271589$

Alſo $ZL = 64°\ 42\frac{3}{4}'$, $\frac{1}{2} ZL = 32°\ 21\frac{3}{8}'$.

$$\begin{aligned} l\cos\psi &= 9.9729858\\ l\sin\phi &= \underline{9.8842540}\\ & \ 19.8572398\\ l\sin ZL &= \underline{9.9562529}\\ l\cos VZL &= 9.9009869\\ lr\tan\tfrac{1}{2} ZL &= \underline{13.8017800}\\ & \ 23.7027669-20. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VZL &= 37^\circ\ 14\tfrac{1}{4}'\\ \sin VZL &= 9.7818417\\ lr\tan\tfrac{1}{2} ZL &= \underline{13.8017800}\\ & \ 23.5836217-20 \end{aligned}$$

Alſo $t = 5043,9$

$u = 3833,7$

Nimmt man demnach $t = TW = 5043,9$, und unter der Fundamentallinie $WK = 3833,7$, ſo iſt K in der Projection. Es wird nämlich u negativ, weil $\sin\psi$ alſo auch $\sin VZL$ $= \frac{\sin\psi - \cos ZL \sin\lambda}{\sin ZL \cos\lambda}$ negativ iſt.

32 §.

Es ſey der größte Kreis ♈♋♎♑ die Ecliptik, ihre Pole Π und π, der Colur der Nachtgleichen Π♈♎, der Colur der Sonnenſtände Π♋π♑, ſo liegt die Axe des Aequators pq im Colur der Sonnenſtände. Nun iſt ein Punct Z in der Ecliptik gegeben, und das Auge ſtehet im Nadir deſſelben, die Tafel iſt ein Breitenkreis $\Pi G \pi H$. Man ſucht die Projection der Axe des Aequators Tp.

Aufl. Da hier wiederum $a = o$, und $\delta = r$ iſt, ſo gelten die obigen Formuln nämlich

$$x = \frac{ru\sin\eta \cot d - (b\sin\eta \cos\eta + r)t - rb\sin\eta^2.}{t\sin\eta - u\cot d - r\cos\eta}$$

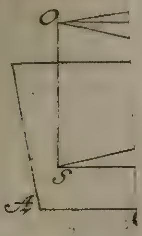
$$y = \frac{(b\sin\eta + r\cos\eta)u}{u\cos d - t\sin\eta \sin d + r\cos\eta \sin d}.$$

Ueberdem iſt $b = o$, $d = 90$, alſo wird $x = \frac{rt}{r\cos\eta - t\sin\eta}$, $y = \frac{ru\cos\eta}{r\cos\eta - t\sin\eta}$. Hier iſt nun der Winkel $GTF = \eta$, wovon der Bogen G♋ das Maas iſt. Weil nun der Bogen ♈♋ $= 90 = GZ$, ſo iſt der Bogen G♋ $= VZ =$ dem Abſtand des Puncts Z in der Ecliptik vom Anfangspunct des Widders, und η das, was in der Aſtronomie die Länge des Puncts Z heißen würde. Nun ſey die Schiefe der Ecliptik $p\Pi = \varepsilon$, ſo iſt $TF : Fp = 1 : \cot\varepsilon = x : y$, daher hat man zwiſchen x und y die Gleichung $\frac{y}{x} = \cot\varepsilon$. Dieß giebt $\frac{u \cos\eta}{t} = \cot\varepsilon$, oder $u = \frac{\cot\varepsilon}{\cos\eta} t$ für die Gleichung der Projection, welches, wie man auch aus andern Gründen weis, eine grade Linie ſeyn muß. Es wird alſo $\tang PTW = \frac{u}{t} = \frac{\cot\varepsilon}{\cos\eta}$, oder $\tang \Pi TP = \frac{\cos\eta}{\cot\varepsilon}$.

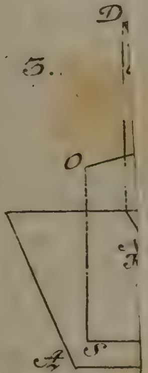
Eben dieß folgt auch aus den Gründen der ſphäriſchen Trigonometrie ſehr leicht. Es iſt nämlich $\eta =$ dem ſphäriſchen Winkel $p\Pi E$, der Bogen $\Pi p = \varepsilon$, und $ZpCO$ ein größter Kreis, der auf der Tafel ſenkrecht ſteht, ſo daß der Winkel bey $C = 90°$ iſt. Alſo hat man im ſphäriſchen Dreyeck $p\Pi C$ $\tang \Pi C = \cos\eta . \tang\varepsilon = \frac{\cos\eta}{\cot\varepsilon} = \tang PT\Pi$, wie vorhin. Eben der Bogen ΠC iſt das Maas des ſphäriſchen Winkels $pZ\Pi$, und CG das Maas des ſphäriſchen Winkels pZG, d. i. dem Winkel der Ecliptik mit dem Meridian des Orts Z. Alſo iſt $PT\Pi$ ſo groß, als der Winkel der Ecliptik mit dem Parallelkreis des Aequators. Den Ausdruck $\tang PZG = \tang PTW = \frac{\cot\varepsilon}{\cos\eta}$ giebt auch die Auflöſung des ſphäriſchen Dreyecks pZ♋, worinn p♋ $= 90° - \varepsilon$, und ♋$Z = 90° - \eta$ iſt.

Ich habe dieſe Aufgabe deswegen beygefügt, um zu zeigen, wie die ganze Verzeichnung von der Projection der Erdkugel, der man ſich bey den Sonnenfinſterniſſen, nach der vom Herrn **Lambert** beſchriebenen, und oben angeführten Methode, mit Vortheil bedienen kann, aus den allgemeinen Formuln fließt.

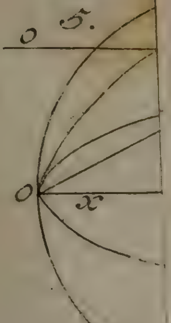
1.



3.

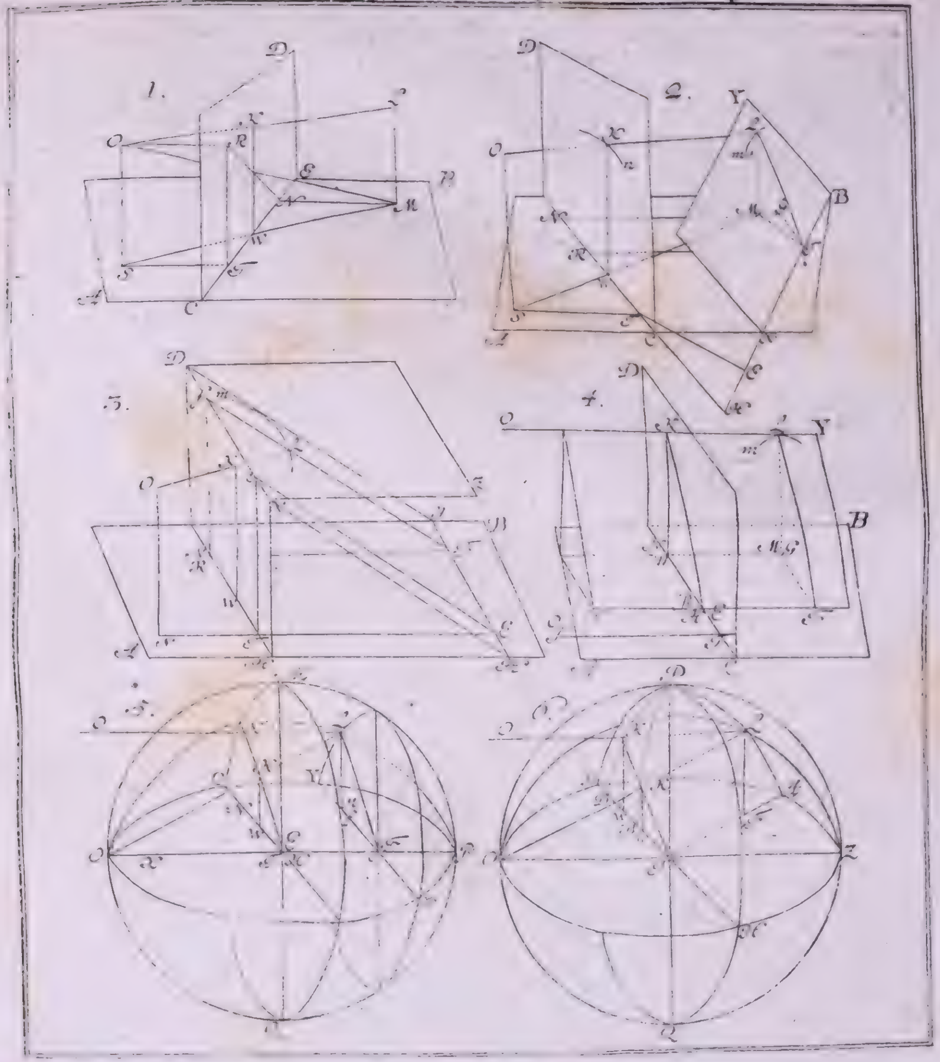


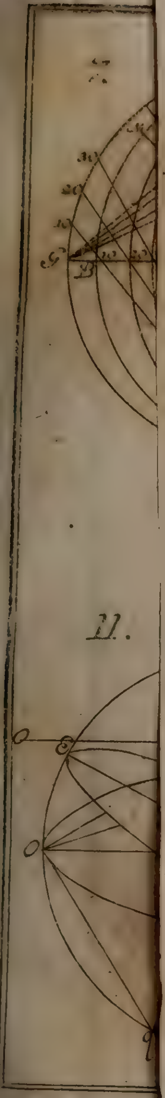
5.



BRITISH MUSEUM

5. ter B. Philosoph. Abhandlung. pag. 164. Tab. I.

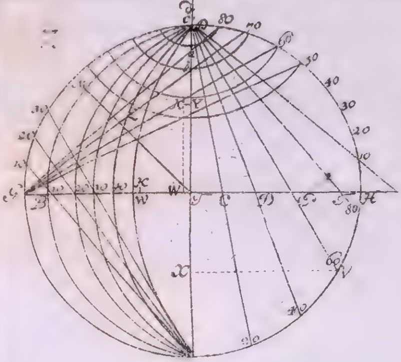

1.
2.
3.
4.
5.
6.
D
O
K
R
E
P
N
M
W
T
S
A
C
Y
B
Q
Z


30
20
10
S
B
10
20
II.
O
S
O
q

BRITISH MUSEUM

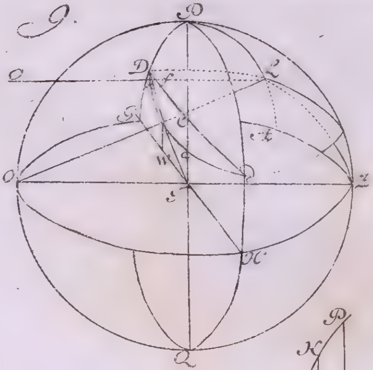
5ter B Philoſoph. Abhandlung. pag. 164. Tab. II

7.



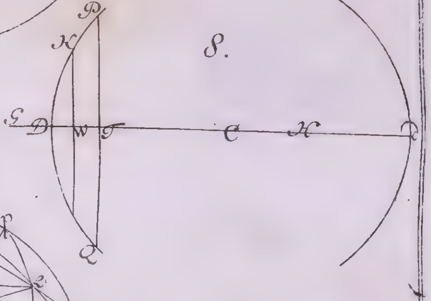
P
80
70
60
50
40
30
20
10
30
20
10
G
B
w
K
W
X
Y
T
C
D
E
F
H
80
X
60
V
40
30

9.



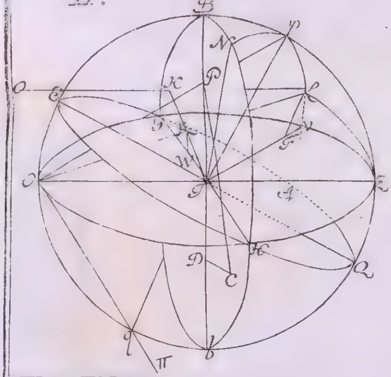
P
O
D
f
L
G
C
A
w
Q
O
Z
T
H
Q

8.



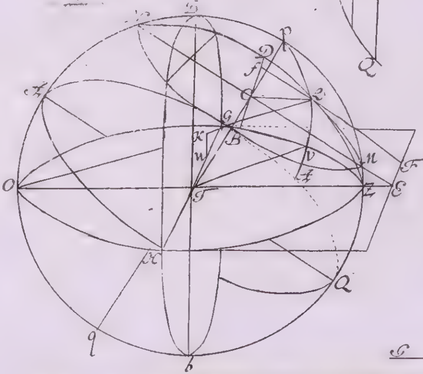
P
K
G
D
W
T
C
H
Q
Q

11.



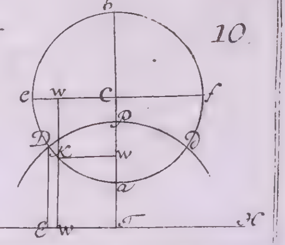
B
N
p
O
E
K
P
L
G
V
F
W
O
T
A
Z
H
D
C
Q
q
l
π
b

12.

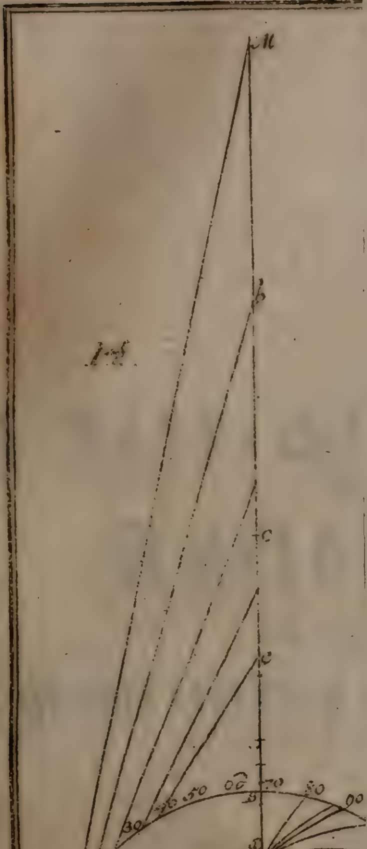


B
p
D
f
A
C
L
G
K
B
W
V
n
A
F
O
T
Z
E
H
Q
q
b

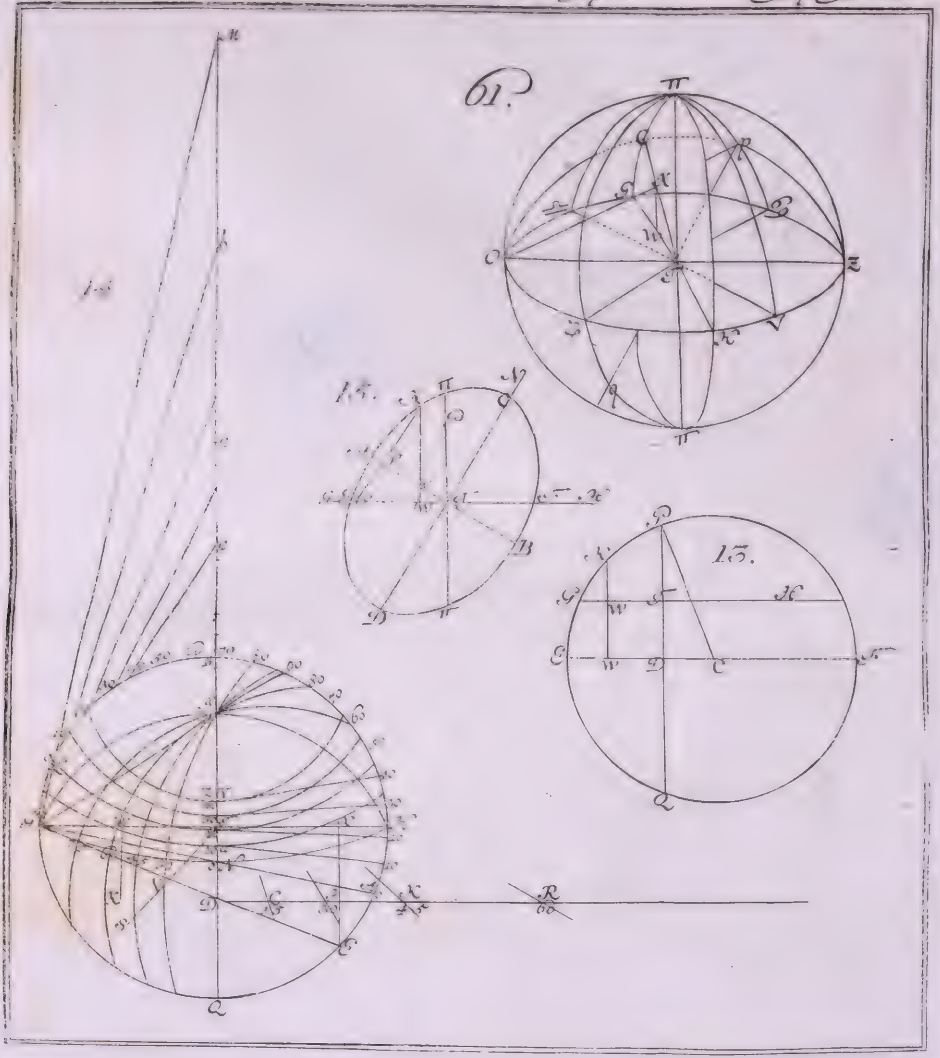
10.



b
e
w
C
f
P
D
K
w
D
a
G
E
w
T
H


M
b
c
e
30
50
60
70
80
90
D
Z Y
30
g
a
N
D
C
K
V
S
Q

TISH MUSEUM
NATURAL HISTORY


61.
Π
P
X
G
W
O
Z
V
K
q
Π
14.
N
O
B
D
Π
13.
P
K
G
W
H
E
W
D
C
Q
n
D
R
60
C
K
Q

J. Albrecht Eulers
Auflöſung
einiger
geometriſchen Aufgaben.

Erſte Aufgabe.

Man ſoll zeigen, wie eine jede geradlinichte Figur durch Parallellinien in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zerſchnitten werden kann?

1. Es ſey ABCDEFG (1 Fig.) die vorgelegte Figur und MN diejenige Richtung, nach welcher dieſelbe in n gleiche Theile zerſchnitten werden ſoll. Man ziehe durch alle Ecken der Figur die graden Linien Bb; Gg; Cc; Dd; u. ſ. w. der gegebenen Richtung MN parallel, ſo wird hierdurch die ganze Figur theils in Dreyecke, theils in Vierecke zerſchnitten werden: die Vierecke aber werden jederzeit zwey ſich gleichlaufende Seiten haben.

2. Man berechne die Flächeninnhalte aller dieſer Theilen, und ſetze den Innhalt des erſten Theils ABb, welcher allezeit ſo wie auch der letzte EFf ein Dreyeck iſt, wenn die vorgelegte Richtung MN keiner Seiten der Figur parallel lauft — man ſetze

den Innhalt dieſes erſten Theils $ABb = \mathfrak{A}$
den Innhalt des zweyten Theils $BbGg = \mathfrak{B}$
den Innhalt des dritten Theils $CcFf = \mathfrak{C}$, u. ſ. w.

Endlich den Innhalt der ganzen Figur $ABCDEFG = A$
alſo daß $A = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \&c.$ ſey.

3. Man merke ſich folgende Hülfsſätze —

I **Lehrſatz.** Es ſey ABCD (2 Fig.) ein Viereck, deſſen beyde Seiten AB und CP einander parallel laufen: BE ſey ſeine Höhe oder eigentlicher die Entfernung der beyden Parallelſeiten von einander; ſo wird der Flächeninnhalt des Vierecks

$$ABCD = \tfrac{1}{2} \times (AB + CD) \times BE \text{ ſeyn.}$$

Der Beweis dieſes Satzes iſt viel zu bekannt, als daß ich denſelben hier beyzufügen nöthig hätte.

II **Aufgabe.** Es werden in dem ebengemeldten Viereck ABCD die beyden Parallelſeiten AB, CD mit der Höhe BE gegeben, man ſoll durch daſſelbe Viereck eine grade Linie XY der Seite AB oder CD parallel ziehen, alſo daß der von dem ganzen Viereck abgeſchnittene Theil ABYX einer gegebenen Fläche gleich ſey.

Die Auflöſung dieſer Aufgabe iſt keiner Schwierigkeit unterworfen. Es ſey $AB = b$; $DC = c$; $BE = a$

ferner $BP = x$: $XY = y$;

Man ziehe BQF der Seite AD parallel

ſo wird $QY = y - b$; $FC = c - b$

Und weil die beyden Dreyecke BQY und BFC einander ähnlich ſind

$$BE : FC = BP : QY$$

das iſt $a : c - b = x : y - b$

folglich $y - b = \frac{c-b}{a} x$ und $y = b + \frac{c-b}{a} x$

Nun ſetze man den Innhalt der gegebenen Fläche = B, und weil der Innhalt des abgeſchnittenen Vierecks

$$ABYX = \frac{AB + XY}{2} x BP \text{ iſt,}$$

$$\text{ſo muß } \frac{AB + XY}{2} XBP = B \text{ ſeyn.}$$

Folglich $B = \frac{b+y}{2}x = \frac{b+b+\frac{c-b}{a}}{2}x$ und

$$2B = 2bx + \frac{c-b}{a}xx$$

Alſo $x = \frac{-ab + \sqrt{(aabb + 2aB(c-b))}}{c-b}$

und $y = b + \frac{c-b}{a} = \frac{\sqrt{(aabb + 2aB(c-b))}}{a}$

Es deutet aber der Buchſtaben x die Perpendiculärlinie BP das iſt die Entfernung der geſuchten Linie $XY = y$ von der einen Parallelſeite $AB = b$ an.

III. **Erſter Folgeſatz.** Wenn die obere Parallelſeite AB (3 Fig.) verſchwindet, alſo daß das vorgelegte Viereck zum Dreyeck wird, davon das kleinere Dreyeck $ABYX = B$ abgeſchnitten werden ſoll, ſo erhält man durch die eben gefundene Formuln, weil hier $b = 0$ wird

die Höhe des verlangten Dreyecks $x = \frac{\sqrt{2acB}}{c}$ das iſt $BP = \frac{\sqrt{2B\times BE}}{DC}$

und die Grundlinie deſſelben $y = \frac{\sqrt{2acB}}{a}$ das iſt $YX = \sqrt{\frac{2B\times DC}{BE}}$.

IV. **Zweyter Folgeſatz.** Verſchwindet aber die untere Parallelſeite DC (4 Fig.) ſo verwendet ſich das vorgelegte Viereck in ein umgekehrtes Dreyeck. In dieſem Fall muß $c = 0$ geſetzt werden, und der abgeſchnittene Theil ABPX wird der gegebenen Fläche B gleich ſeyn, wenn $x = \frac{+ab\sqrt{(aabb-2abB)}}{b}$

und $y = \frac{\sqrt{(aabb-2abB)}}{a}$ iſt; das iſt wenn die Höhe $BP = + BE \sqrt{(BE^2 - \frac{2B \times BE}{AB})}$ und

$$XY = \sqrt{(AB^2 - \frac{2B \times AB}{BE})}$$ gemacht wird.

V. Dritter Folgeſatz. Wann endlich die beyden Parallelſeiten AB und CD (5 Fig.) einander gleich ſind, und folglich das vorgelegte Viereck zum Parallelegrammum wird, ſo laſſen ſich hier, weil $b = c$ iſt, die gefundenen Formuln nicht anwenden. Die vorhergehende Gleichung $2B = 2bx + \frac{c-b}{a}xx$ aber giebt uns ſogleich zu erkennen, daß in dieſem Fall $x = \frac{B}{b}$ und $y = b$; das iſt, daß $BP = \frac{AB}{B}$ und $XV = AB$ ſeyn muß; welches ohnedem ſchon aus den erſten Anfangsgründen der Geometrie bekannt iſt.

4. Durch Hülfe dieſer Sätze läßt ſich nunmehro gegenwärtige Aufgabe ſogleich auflöſen. Man darf nur alle in dem 1 §. erwehnte Theile 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, u. ſ. w. der vorgelegten Figur ABCDEFG (1 Fig.) mit dem 12 Theil des ganzen Innhalts derſelben A vergleichen, und falls ein oder mehrere zuſammen genommen kleiner als $\frac{A}{n}$ befunden werden, das noch fehlende von dem nächſtfolgenden Theil abnehmen.

5. Einige Exempel ſollen dieſe angezeigte Art die geradlinichten Figuren durch Parallellinien in eine verlangte Anzahl gleicher Theile zu zerſchneiden noch näher erläutern.

Erſtes Exempel.

Es wird ein reguläres Achteck gegeben, deſſen Seite wir = 1 (7 Fig.) ſetzen wollen; man ſoll daſſelbe durch gra-

de Linien in fünf gleiche Theile zerſchneiden, und dieſe Linien ſollen alle einer Seite des Achtecks, der *AH* z. Ex. parallel laufen.

Man ziehe durch alle Ecken des Achtecks B, C die graden Linien BG, CF der gegebenen Richtung AH parallel. Es wird aber in dieſem Fall eine jede derſelben zugleich durch zwey Ecken der Figur gehen, und das ganze Achteck wird dadurch nur in drey Vierecke zerſchnitten werden, davon das mittelſte ein rechtwinklichtes Parallelogrammum iſt, die beyden äußern aber einander vollkommen gleich und ähnlich ſind.

Man berechne darauf die Flächeninnhalte dieſer Vierecke, und da

$AB = 1 : ABI = 45° : AI = BI = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707106 : BG = AH + 2BG = 1 + \frac{2}{\sqrt{2}}$

oder $BG = 1 + \sqrt{2} = 2{,}414212$ ſo wird der Flächeninnhalt

des Vierecks $AHBG = \mathfrak{A} = \frac{1}{2}(AH + BG) \times AI = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = 1{,}207106$

des Vierecks $BGFC = \mathfrak{B} = BG \times BC = (1 + \sqrt{2}).1 = 1 + \sqrt{2} = 2{,}414212$

des Vierecks $CFED = \mathfrak{L} = AHBG = \text{- - - - -} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}} = \underline{1{,}207106}$

Und der Innhalt des ganzen Achtecks

$ABCDEFGH = A = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = \text{- - - - - - -}\ 2 + 2\sqrt{2} = 4{,}828425.$

Nun ſoll dieſes Achteck in 5 gleiche Theile zerſchnitten werden, folglich muß der Innhalt eines jeden Theils $\frac{A}{5} = \frac{2+2\sqrt{2}}{5} = 0{,}965685$ ſeyn: da aber der Innhalt des erſten Vierecks $AHBG = 1{,}207106$ ſchon größer iſt als der fünfte Theil, ſo laſſet uns nach der in dem 11 Satze gegebenen Formul einen Theil AHYX der dieſem 0,965685 gleich iſt, abſchneiden, und weil hier $b = AH = 1$; $c = BG = 1 + \sqrt{2}$; $a = AI = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $c - b = \sqrt{2}$ und $B = AHYX \frac{2+2\sqrt{2}}{5}$ iſt, ſo wird

$$x = AP = \frac{-1.\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\left(1.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{2+2\sqrt{2}}{5}.\sqrt{2}\right)}}{\sqrt{2}}$$ oder

$$AP = -\tfrac{1}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{13}{20} + \tfrac{2}{5}\sqrt{2}\right)} = 0,602582$$

das iſt ungefähr $AP = \frac{3}{5}$ ſeyn.

Da nun die Höhe des erſten Fünftels AHYX gefunden, $= \frac{2+2\sqrt{2}}{5} = 0,965685$ iſt, ſo wird $XYGB = \mathfrak{A} - AHYX = \frac{1+\sqrt{2}}{10} = 0,241421$ ſeyn, und weil dieſes übrig-gebliebene Viereck XYGB kleiner iſt als der fünfte Theil des ganzen Achtecks, ſo muß von dem folgenden Viereck $BGFC = \mathfrak{B} = 1+\sqrt{2} = 2,414212$ noch ein Stück BGVZ, das $= \frac{A}{5} - XYGB = \frac{3+3\sqrt{2}}{10} = 0,724264$ iſt, abgeſchnitten werden, damit nämlich XYGVZB das verlangte zweyte Fünftel ausmache.

Es iſt aber BGFC ein rechtwinklichtes Parallelogrammum, folglich werden wir hier nach dem V Satz erhalten

$b = BG = CF = 1+\sqrt{2}$: $B = BGVZ = \frac{3+3\sqrt{2}}{10}$, und

$$x = BZ = \frac{3+3\sqrt{2}}{10(1+\sqrt{2})} = \frac{3}{10} \times \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{3}{10}.$$

Jetzt ſollte man auf eine ähnliche Weiſe zu der Abſchneidung des dritten Fünftels fortſchreiten, da die vorgelegte Figur aber ein reguläres Achteck iſt, ſo iſt man dieſer Mühe überhoben: man darf nur die zwey eben abgeſchnittenen erſte Fünftel auch grade gegenüber abſchneiden, indem man von dem dritten Theil $DEFC = \mathfrak{C}$ anfängt, ſo wird man das letzte und das vierte Fünftel erhalten: das dritte Fünftel aber wird ſich als das mittelſte von ſelbſten geben.

Wann man demnach in einem jeglichen regulären Achteck ABCDEFGH (7 Fig.) die grade Linie AD ziehet und auf derſelben $AP = \frac{3}{5}$ AH und $DQ = \frac{3}{5}$ AH, oder genauer
AP = 0,602582 AH und DQ = 0,602582 AH, ferner
auf der Seite BC; $BZ = \frac{3}{10}$ AH und $CW = \frac{3}{10}$ AH; abſticht.

Wann

Wenn man endlich durch dieſe Puncte P, Z, W, Q die graden Linien XY, ZV, WT, RS der Seite AH parallel ziehet, ſo werden dieſelben das reguläre Achteck ABCDEFGH in fünf gleiche Theile zerſchneiden. Es wird nämlich
AHYZ = YXBZVG = ZVTW = TWCRSF = RSED = $\frac{1}{5}$ ABCDEFGH ſeyn.

Zweytes Exempel.

Es wird wiederum ein reguläres Achteck gegeben deſſen Seite = 1 iſt, man ſoll daſſelbe gleichfalls durch Parallellinien in fünf gleiche Theile zerſchneiden; (8 Fig.) die Richtung aber, nach welcher dieſe Linien ſtreichen ſollen, ſey MN und der Winkel, den MN mit der Seite *AB* des Achtecks macht, ſey MN*AB* = 12° 30'.

Man ziehe durch alle Ecken der Figur die graden Linien B*b*, H*h*, Cc, Gg, D*d*, F*f* der vorgelegten Richtung MN parallel, und auf dieſen hinwiederum die Perpendiculärlinien AP, A*p*, *bq*, BQ, BR, *h*R, H*r*, Hr, gS, ſo bekömmt man, weil AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HA = 1. und
BAH = CBA = DCB = EDC = FED = GFE = HGF = AHG = 135°

$AP = \sin 12^\circ\ 30'$ - - - 0, 2164399; lAP - - - 9, 3353368.

$Bb = \frac{\sin 135^\circ}{\sin 32^\circ\ 30'}$ - - - 1, 3160380; lBb - - - 0, 1192685.

$Ap = \sin 32^\circ\ 30'$ - - - 0, 5372996;

$bq = Ap - AP$ - - - - - - 0, 3208600; lbq - - - 9, 5063156.

$qH = \frac{bq}{\tan 32^\circ\ 30'}$ - - - 0, 5036491; lqH - - - 9, 7021283.

$Qh = \frac{bq}{\tan 57^\circ\ 30'}$ - - - 0, 2044104; lQh - - - 9, 3105029.

$Hh = Bb + qH + Qh$ - - - 2, 0240975; lHh - - - 0, 3062313.

$BR = \sin 57^\circ\ 30'$ - - - - 0, 8433914;

$hR = B\mathfrak{R} - bq$ - - - - 0, 5225314; lhR - - - 9, 7181123.

$CR = \dfrac{hR}{\text{tang}\ 57^\circ\ 30'}$ - - - 0, 3328892; lCR - - - 9, 5222996.

$cr = \dfrac{hR}{\text{tang}\ 77^\circ\ 30'}$ - - - 0, 1158424; lcr - - - 9, 0638675.

$Cc = Hh + CR + cr$ - - 2, 4728291; lCc - - - 0, 3931941.

$Hr = \sin 77^\circ\ 30'$ - - - 0, 9762960; lHr - - - 9, 9895815.

$gS = Hr - hR$ - - - - 0, 4537646; lgS - - - 9, 6568306.

$Gg = Cc$ - - - - - - - - - 2, 4728291; lGg - - - 0, 3931941.

Ferner der Flächeninnhalt des

$$\left.\begin{array}{l}
\triangle\ ABb = \mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}.\ AP \times Bb \text{ - - - - - - } 0,\ 1424214.\\
\text{Trap. } BbHh = \mathfrak{B} = \tfrac{1}{2}.\ bq \times (BbHh) \text{ - - - } 0,\ 5358590.\\
\text{Trap. } HhCc = \mathfrak{C} = \tfrac{1}{2}.\ hR \times (HhCc) \text{ - - - } 1,\ 1748925.\\
\text{Trap. } CcGg = \mathfrak{D} = gS \times Cc \text{ - - - - - - } 1,\ 1220820.\\
\text{Trap. } GgDd = \mathfrak{E} = \text{Trap. } HhCc \text{ - - - - - - } 1,\ 1748925.\\
\text{Trap. } DdFf = \mathfrak{F} = \text{Trap. } BbHh \text{ - - - - - - } 0,\ 5358580.\\
\triangle\ FfE = \mathfrak{G} = \triangle\ ABb \text{ - - - - - - - - } 0,\ 1424214.
\end{array}\right\}\text{addirt}$$

Folglich des ganzen Achtecks

$$ABCDEFGH = A = \mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D}+\mathfrak{E}+\mathfrak{F}+\mathfrak{G} \ldots \overline{4,\ 8284258}$$

ſo wie derſelbe ſchon in dem vorhergehenden Exempel gefunden worden iſt.

Der Flächeninnhalt eines jeden Fünftels muß demnach $\frac{1}{5}A = 0,\ 965685$ ſeyn. Da nun $\mathfrak{A} = 0,\ 142421$ kleiner als $\frac{1}{5}A$, und auch noch $\mathfrak{A}+\mathfrak{B} = 0,\ 678279$ kleiner iſt als $\frac{1}{5}A$, ſo muß von dem folgenden dritten Stück $\mathfrak{C}$ ein Theil $HhXY$ hinzugethan werden, damit $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + HhXY = 0,\ 965685$ werde:

Das abzuſchneidende Stück $HhXY$ ſoll alſo hier $= 0,\ 287406$ ſeyn, und man wird für die in dem 11 Satze gegebene Formul erhalten.

$b = Hh$

$b = Hh = 2,024097$; $c = Cc = 2,472829$;
$a = hR = 0,522537$; $c - b = 0,348732$;
$B = HhXY = 0,287406$; Folglich
$x = hx = Hy = \frac{-1,0576 + \sqrt{1,2233}}{0,3487}$ das iſt
$hx = Hy\ 0,1388$.

Man ziehe alſo durch die Puncte x und y die grade Linie XY, ſo wird XYHAB das erſte Fünftel des Achtecks ſeyn.

Richtet man aber gegenüber aus den Puncten D und d die Perpendiculärlinien $D\mathfrak{D}$ und $d\mathfrak{d}$ auf und ſticht auf denſelben die gleiche Entfernungen $D\mathfrak{x} = d\mathfrak{y} = 0,1388$ ab, ſo wird die durch dieſe Puncte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gezogene grade Linie $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ das letzte Fünftel $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}FED$ abſchneiden; beyde Linien XY und $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ aber werden der gegebenen Richtung $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ parallel laufen.

Um nun auch das zweyte Fünftel zu bekommen, ſo ziehe man das Viereck $hHXY$ von dem ganzen Viereck $HhCc = \mathfrak{C}$ ab, und weil der Reſt $YXCc = 0,887486$ kleiner iſt als ein Fünftel des ganzen Achtecks, nämlich kleiner als $\frac{1}{5}A = 0,965685$ ſo muß das noch fehlende $0,078199$ von dem folgenden Viereck $CcGg = \mathfrak{D} = 1,122082$, welches ein Parallelogrammum iſt, abgeſchnitten werden.

Es ſey $CcWV$ dieſes noch fehlende Stück oder $CcWV = 0,078199$: und wir werden in dem gegenwärtigen Fall durch Hülfe des V Satzes folgende Beſtimmungen erhalten
$B = CcWV = 0,078199$: $b = c = Ce = Gg = 2,472829$
$x = cw = \frac{B}{b} = \frac{78199}{2472829}$ das iſt $cw = 0,031623$.

Wenn man demnach durch dieſen Punct w die Linie VW der gegebenen Richtung $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ parallel ziehet, ſo wird XYWVC das zweyte verlangte Fünftel ſeyn.

Und wann man auf eine ähnliche Art in dem gegenüberſtehenden Puncte g eine Perpendiculärlinie gS aufrichtet, und auf derſelben die Höhe $gw = cw = 0{,}\ 031623$ abſticht, ſo wird die durch dieſen Punct w gezogene Parallellinie $\mathfrak{WV}$ das vierte geſuchte Fünftel $\mathfrak{XYSVW}$ abſchneiden.

Hat man aber das I, II, IV und V Fünfthel ſchon abgeſchnitten, ſo bleibt in der Mitte nothwendig das III Fünftel übrig: dieſes Fünftel wird alſo in der Figur das Parallelogrammum $VW\mathfrak{VW}$ ſeyn.

Drittes Exempel.

Man ſoll ein irreguläres Viereck $ABCD$ (10 Fig.) durch Parallellinien in vier gleiche Theile zerſchneiden, und die Richtung MN, nach welcher dieſe Parallellinien ſtreichen ſollen, mache mit der Seite AB einen Winkel von 30 Graden. Es iſt aber $AB=100$; $AD=200$; $BC=400$; der Winkel $DAB=150°$ und $ABC=70°$.

Man ziehe Aa: Dd der gegebenen Richtung MN und $A\mathfrak{d}$ der Seiten BC parallel; ferner Bm, An, und Cp auf Aa und Dd perpendiculär; ſo werden die Winkel $BAa=30°$; $aAD=120°$; $DA\mathfrak{d}=40°$; $ADd=60^{6}$; $BaA=80°$; $Aad=100°$; $adD=80°$ und $DdC=100°$ ſeyn; folglich

$$Bm = AB.\ \sin BAa = 50; \qquad l\,Bm = 1{,}\ 6989700$$

$$Aa = \frac{AB.\ \sin ABa}{\sin BaA} = 95{,}\ 419; \qquad l\,Aa = 1{,}\ 9796343$$

$$Ba = \frac{AB.\ \sin BAa}{\sin BaA} = 50{,}\ 771;$$

$$An = AD.\ \sin ADd = 173{,}\ 21; \qquad l\,An = 2{,}\ 2385606$$

$$D\mathfrak{d} = \frac{AD.\ \sin DA\mathfrak{d}}{\sin A\mathfrak{d}D} = 130{,}\ 54; \qquad l\,D\mathfrak{d} = 2{,}\ 1157460$$

$A\mathfrak{d} = \frac{AD.\ \sin AD\mathfrak{d}}{\sin A\mathfrak{d}D} = 175,\ 88;$

$Dd = Aa + D\mathfrak{d} = 225,\ 96;$ $\qquad lDd = 2,\ 3540316$

$dC = BC - Ba - A\mathfrak{d} = 173,\ 35;$ $\qquad ldC = 2,\ 2389238$

$Cp = dC \sin pdC = 170,\ 72;$ $\qquad lCp = 2,\ 2322753$

Der Flächeninnhalt des

$\triangle\ ABa = \mathfrak{A} = \frac{1}{2}Aa \times Bm$ — — — — $2385,\ 4$

$\text{Trap.}\,AaDd = \mathfrak{B} = \frac{1}{2}(Aa + Dd) \times AN$ — — $27832,\ 2$

$\triangle\ DdC = \mathfrak{C} = \frac{1}{2}Dd \times Cp$ — — — — $19287,\ 5$

$ABCD = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = A$ — — — — $49505,\ 1$

der vierte Theil hiervon iſt $\frac{A}{4}$ — — — — $12376,\ 3.$

Nun iſt $ABa = \mathfrak{A}$ kleiner als $\frac{A}{4}$ folglich muß das noch fehlende $\frac{A}{4} - \mathfrak{A} = 9990,\ 9$ von dem folgenden Theil $\mathfrak{B}$ abgeſchnitten werden: man wird alſo nach dem 11 Satze bekommen

$B = Aa\mathfrak{X}x = 9990,\ 9;\ b = Aa = 95,\ 419;\ c = Dd = 225,96$

$a = An = 173,\ 21;\quad c - b = D\mathfrak{d} = 130,\ 54$

$$x = Ax = \frac{-16527 + \sqrt{(724936529)}}{130,\ 54} = 79,\ 64.$$

Wann man demnach auf der Perpendiculärlinie An, eine Entfernung $Ax = 79,\ 64$ abſticht und durch x eine grade Linie $X\mathfrak{X}$ der gegebenen Richtung $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ parallel ziehet, ſo wird $AB\mathfrak{X}X$ das erſte verlangte Viertel ſeyn.

Da ferner der Reſt $X\mathfrak{X}dD = \mathfrak{B} - Aa\mathfrak{X}X = 17841,\ 3$ annoch größer iſt, als es einem Viertel des ganzen Vierecks zukömmt, ſo muß man das zweyte Viertel $X\mathfrak{X}\mathfrak{Y}Y$ von dieſem Reſte abſchneiden; oder welches auf eins hinaus läuft, man muß von dem ganzen Theil $AadD = \mathfrak{B}$ das Viereck $Aa\mathfrak{Y}Y = Aa\mathfrak{X}x$

$+\frac{A}{4} = 22367,2$ abſchneiden; folglich wird hier wiederum nach dem 2 Satze $b = Aa = 95,419$; $c = D\mathfrak{d} = 225,96$; $c - b = D\mathfrak{d} = 130,54$; $a = An = 173,21$; B aber $= Aa\mathfrak{Y}Y = 22367,2$ ſeyn, und alſo

$$x = Ay = \frac{-16527 + \sqrt{1284598429}}{130,54} = 147,95$$

Man mache derowegen $Ay = 147,95$ und ziehe durch dieſes Punct y die grade Linie $Y\mathfrak{Y}$ der gegebenen Richtung $\mathfrak{MN}$ parallel, ſo wird $X\mathfrak{X}\mathfrak{Y}Y$ das zweyte verlangte Viertel ſeyn.

Da nun $Y\mathfrak{Y}dD = AadD - Aa\mathfrak{Y}X = 5465$ kleiner als $\frac{A}{4} = 12376,3$ iſt, ſo muß noch von dem folgenden Stück $DdC = \mathfrak{C}$, ein gewiſſer Theil $Dd\mathfrak{Z}Z = 6911,3$ hinzugethan werden, damit nämlich $Y\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}ZD$ das dritte Viertel gebe.

Hier werden wir, weil $DdC = \mathfrak{C}$ ein umgekehrtes Dreyeck iſt, nach dem IV Satze erhalten
$a = Cp = 170,72$; $b = Dd = 225,96$; $B = Dd\mathfrak{Z}Z = 6911,3$;

$$x = px = \frac{38575 - \sqrt{954822625}}{225,96} = 33,96$$

Wenn man demnach $px = 33,96$ oder $Cx = 136,76$ nimm und durch das Punct x, die Linie $Z\mathfrak{Z}$ der gegebenen Richtung $\mathfrak{MN}$ parallel ziehet, ſo wird $Y\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}ZD$ das dritte verlangte Viertel, und folglich das Dreyeck $Z\mathfrak{Z}C$ das letzte Viertel ſeyn. E wird nämlich
$AB\mathfrak{X}X = X\mathfrak{X}\mathfrak{Y}Y = Y\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}ZD = Z\mathfrak{Z}C = \frac{1}{4}ABCD$ ſeyn.

Anhang.

6. Wollte man ſich eines Proportionalzirkels bedienen und eine vorgelegte gradlinichte Figur durch eine Verzeichniß i

eine gegebene Anzahl gleicher Theile zerſchneiden, ſo will ich noch kürzlich folgender Art erwähnen, welche zu der gegenwärtigen Abſicht weit bequemer ſeyn wird.

7. Die Hauptſache, wie ich ſchon angemerket habe, kömmt auf die Auflöſung des zweyten Satzes an, und dieſen werde ich anjetzo durch eine geometriſche Verzeichniß beſonders aufzulöſen mich bemühen.

8. Es ſey ABCD (9 Fig.) ein Viereck, deſſen zwey Seiten AB und DC einander parallel laufen. Man verlängere die beyden anderen Seiten AD und BC bis dieſelben in O zuſammen ſtoſſen, und von dieſem Punct O laſſe man eine Perpendiculärlinie OE auf AB herunter. Nun ſey ABXY der geſuchte abgeſchnittene Theil, deſſen Flächeninnhalt von einer vorgeſchriebenen Größe ſeyn ſoll; die grade Linie XY muß alſo der Seite AB parallel laufen, und da die vorgeſchriebene Größe allemal in ein Quadrat verwandelt werden kann, die Geſtalt derſelben mag beſchaffen ſeyn wie man auch immer will, ſo laſſet uns ſetzen, die grade Linie MN wäre die Seite dieſes Quadrats.

9. Weil die Dreyecke AOB und XOY einander ähnlich ſind, ſo verhalten ſie ſich wie die Quadrate ihrer ähnlichen Seiten oder Linien; das iſt $\triangle AOB : \triangle XOY = AO^2 : XO^2$

oder $\triangle AOB : ABYX + \triangle AOB = AO^2 : XO^2$

Es ſey o die Mitte der Höhe OE oder $Eo = \frac{1}{2}EO$, ſo wird der Innhalt des Dreyecks $AOB = AB \times Eo$ ſeyn, und weil der Innhalt von $ABYX = MN \times MN$ ſeyn ſoll, ſo erhält man

$$AB \times Eo : MN \times MN + AB \times Eo = AO^2 : XO^2$$

folglich $\sqrt{AB \times Eo} : \sqrt{(MN \times MN + AB \times Eo)} = AO : XO$.

10. Nun deutet $\sqrt{AB \times Eo}$ die mittlere Proportionallinie zwiſchen AB und Eo, das iſt, zwiſchen der Grundlinie und der

halben Höhe des Dreyecks AOB an, und man kann dieſelbe leicht vermittelſt des Proportionalzirkels finden: Es ſey alſo $ab = \sqrt{AB \times Eo}$, ſo wird

$$ab : \sqrt{(MN \times MN + ab \times ab)} = AO : OX.$$

Ferner da $\sqrt{(MN \times MN + ab \times ab)}$ die Hypothenuſe eines rechtwinklichten Dreyecks andeutet, deſſen beyde Catheti MN und ab ſind, und dieſe Hypothenuſe bc durch die wirkliche Verzeichniß des rechtwinklichten Dreyecks abN leicht gefunden wird, ſo werden wir erhalten

$$ab : bc = AO : OX.$$

Das iſt die Linie OX wird die vierte Proportionallinie zwiſchen den beyden gefundenen Linien ab, bc und der Seite AO des Dreyecks AOB andeuten; da nun dieſe OX vermittelſt eines Proportionalzirkels gefunden wird, ſo wird, wenn wir dieſelbe wirklich auf der Seite OD von O nach D auftragen, und durch das Punct X die Linie XY der Seite AB oder DC parallel ziehen, dieſe Linie den verlangten Theil $ABYX = MN \times MN$ abſchneiden.

Anmerkung.

11. Wollte man auf die eben angezeigte Art die Weite XO durch die Rechnung beſtimmen, ſo würde man auf eine ähnliche Wurzelformul gerathen, wie wir durch die vorige Auflöſung erhalten haben.

Erſter Zuſatz.

12. Wann von einem Dreyeck ADC (3 Fig.) ein Stück AXY von einer gegebenen Größe MN × MN abgeſchnitten werden ſoll, alſo daß die abſchneidende Linie XY der Grundlinie DC parallel laufe, ſo kann man es am leichteſten auf folgende Art angreifen.

I. Man laſſe aus der Spitze A auf der Grundlinie DC die Perpendicularlinie AE herunter

II. Man ſuche die mittlere Proportionallinie *ab* zwiſchen dieſer halben Höhe $\frac{1}{2}$AE und der Grundlinie DC.

III. Nehme man die vierte Proportionallinie *cd* zwiſchen der eben gefundenen *ab*, der Seite MN des gegebenen Quadrats, und der einen Seiten AD des vorgelegten Dreyecks ADC.

IV. Trage man dieſe Linie AX = *cd* auf der Seite AD von A nach D hin: endlich

V. Ziehe man durch X die Linie XY der Grundlinie DC parallel; ſo wird AXY der verlangte Theil nämlich AXY = MN × MN ſeyn.

Zweyter Zuſatz.

13. Wann von einem umgekehrten Dreyeck ACB (4 Fig.) ein Stück AXYB von einer gegebenen Größe MN × MN abgeſchnitten werden ſoll, ſo darf man nur auf der im vorigen Zuſatze erwehnten Art den Ueberſchuß des Innhalts des ganzen Dreyecks über das gegebene Quadrat MN × MN, nämlich CXY = ABC — MN × MN, von der Spitze C an abſchneiden.

Dritter Zuſatz.

14. Wann von einem Parallelogrammum ABCD (5 Fig.) ein Stück ABXY von einer gegebenen Größe MN × MN abgeſchnitten werden ſoll, ſo ziehe man die Perpendiculärlinie BE und ſteche auf derſelben die dritte Proportionallinie BP zu der Seite AB und der Seite MN des gegebenen Quadrats MN × MN ab

$$AB : MN = MN : BP$$

und die durch dieſen Punct P gezogene Parallellinie XY wird das verlangte Stück ABYX abſchneiden.

Anmerkung.

15. Wenn die obere Seite AB (9 Fig.) des Vierecks ABCD größer iſt, als die untere Parallelſeite DC, ſo wird das Punct O unter der Seite DC fallen. Um aber in dieſem Fall von dem Viereck ABCD ein Stück ABYX von einer gegebenen Größe MN × MN abzuſchneiden, ſo richte man

1. Aus dem Puncte O auf der obern Parallelſeite AB die Perpendicularlinie OE auf, und theile dieſelbe in *o* in zwey gleiche Theile.
2. Suche man die mittlere Proportionallinie *ab* zwiſchen AB und Oo oder $Eo = \frac{1}{2}EO$; $AB : ab = ab : Oo$.
3. Suche man den andern Cathetum *bc* eines rechtwinklichten Dreyecks Mbc, davon der eine Cathetus $Mb = MN$ die Hypothenuſe Mb aber $= ab$ iſt:
   $$bc = \sqrt{(AB \times Oo - MN \times MN)}.$$
4. Suche man die vierte Proportionallinie *cd* zu *ab*, *bc* und OA
   $$ab : bc = OA : cd.$$
5. Nehme man auf der Seite OA, $OX = cd$: Endlich
6. Ziehe man durch dieſes Punct X die Linie XY der Seite AB parallel; ſo wird
7. Das Stück ABYX der verlangte Theil des ganzen Vierecks ABCD ſeyn: $ABYX = MN \times MN$.

Zweyte Aufgabe.

Eine Zirkelfläche durch Parallellinien in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu zerſchneiden.

1. Es ſey AMM^1BN^1NA eine Zirkelfläche, welche durch Parallellinien MN, *mn*, (1 Fig.) u. ſ. w. in *n* gleiche Theile zerſchnit-

ſchnitten werden ſoll; die Richtung dieſer Parallellinien MN aber mag beſchaffen ſeyn wie man auch nur immer will, ſo wird die Auflöſung gegenwärtiger Aufgabe keiner Abänderung unterworfen ſeyn; aus einer ähnlichen Urſache wird es uns auch erlaubt ſeyn den halben Durchmeſſer der vorgelegten Zirkelfläche = 1 anzunehmen; weil nämlich alle Zirkel einander vollkommen ähnlich und die Krümmung eines jeden Zirkels an allen Orten gleich groß iſt.

2. Es ſtelle MANM den erſten Theil der Zirkelfläche vor, oder MANM ſey $= \frac{1}{n}$ AMBNA; der Bogen MAN aber, oder der Winkel MCN der dieſen erſten Theil einfaßt begreife m Grade: MCN $= m$. Da nun der halbe Durchmeſſer unſers Zirkels = 1 iſt, ſo wird der halbe Umkreis deſſelben ſeyn = 3, 1415926, folglich der Innhalt der ganzen Zirkelfläche = 3, 1415926 Flächenmaas und der n Theil derſelben MANM $= \frac{3,1415926}{n}$.

3. Nun iſt der Innhalt des Ausſchnitts AMCNA $= \frac{m}{360} \times 3,1415926$. Und, wenn aus dem Puncte M auf dem halben Durchmeſſer NC die Perpendiculärlinie MP $= \sin m$ gezogen wird. Der Innhalt des Dreyecks NMC $= \frac{1}{2}$ MP. NC $= \frac{1}{2} \sin m$ folglich wird der Innhalt des Abſchnitts MANM ſeyn

$$\text{AMCNA} - \triangle\text{NMC} = \frac{m}{360} \times 3,1415926 - \frac{1}{2} \sin m.$$

Da nun dieſer Innhalt gleich dem 12 Theil der ganzen Zirkelfläche 3, 1415926 ſeyn ſoll, ſo erhält man dieſe Gleichung

$$\frac{3,1415\ \&c.}{360} m - \frac{1}{2} \sin m = \frac{3,1415\ \&c.}{n}$$

welche durch $\frac{3,1415\ \&c.}{360}$ getheilt giebt

m —

$$m - \frac{180}{3,1415 \text{ \&c.}} \sin m = \frac{360}{n} \text{ oder}$$

$$m - 57,295 \text{ \&c.} \times \sin m = \frac{360}{n}.$$

Es iſt aber der Logarithme von 57, 295 &c. = 1, 7581226.

4. Dieſe gefundene Gleichung läßt ſich durch keinen andern Weg, als durch die Annäherung auflöſen: hat man aber den Werth von *m* daraus berechnet, ſo iſt der dieſem Winkel oder Bogen *m* zukommender Abſchnitt MANM der erſte verlangte 12 Theil der ganzen Zirkelfläche.

5. Um aber den zweyten, dritten, vierten, u. ſ. w. 12 Theil der ganzen Zirkelfläche zu beſtimmen, ſo ſetze man in der eben herausgebrachten Gleichung $\frac{1}{2}n$, $\frac{1}{3}n$, $\frac{1}{4}n$, u. ſ. w. für *n*; und die correſpondirende Werthe von *m* werden diejenige Bogen ſeyn, deren Sehnen die ganze Zirkelfläche in 12 gleiche Theile zerſchneiden.

Dann wenn das Stück M*ma*N der zweyte 12 Theil der Zirkelfläche iſt, ſo muß der ganze Abſchnitt *mn*A*m* zweyen 12 Theilen gleich ſeyn: folglich wenn in der gefundenen Gleichung $\frac{1}{2}$ 12 für *n* geſchrieben wird, ſo wird *m* den Bogen *m*A*n* andeuten.

6. Hiernächſt muß ich bemerken, daß man bey der Theilung der Zirkelflächen nur bis auf die Hälfte zu gehen nöthig hat; weil die ſchon gefundenen erſteren Theile auch zugleich die letzteren Theile geben, wenn man dieſelben grade gegenüber auf der Seite B des Zirkels abſticht; ſo wird, wenn $M^1BN^1 = MAN$, $mBn^1 = mAn$, und ſ. w. gemacht wird, der Abſchnitt $M^1N^1BM^1$ der letzte 12 Theil, $m^1M^1N^1n^1$ der letzt ohneine 12 Theil, u. ſ. w. der ganzen Zirkelfläche ſeyn.

Exempel.

7. **Man ſoll eine Zirkelfläche durch Parallellinien in ſechs gleiche Theile zerſchneiden.**

Da hier $n = 6$ iſt, ſo erhält man folgende Gleichung

$$m - 57{,}295 \text{ \&c. } \sin m = 60$$

und die ganze Sache läuft da hinaus, daß wir aus dieſer Gleichung den Werth des Bogens m durch die Annäherung berechnen. Ich merke aber ſogleich an, daß dieſer Werth von m größer ſey als 90 Grade, weil ſonſten $m - 57{,}295$ &c. $\sin m$ allemal kleiner wäre als 60.

Laſſet uns alſo folgende Sätze annehmen und berechnen

	I.	II.	III.	IV.
m - - - - - - - - - -	100	110	112	113
$l\,57{,}295$ &c. - - - -	1,7581226	1,7581226	1,7581226	1,7581226
$l \sin m$ - - - - - - - -	9,9933515	9,9729858	9,9671659	9,9640261
$l\,57{,}295$ &c. $\sin m$ -	1,7514741	1,7311084	1,7252885	1,7221487
$57{,}295$ &c. $\sin m$ -	56,425	53,840	53,123	52,741
$m - 57{,}295$ &c. $\sin m$.	43,575	56,160	58,877	60,259
	fehlt noch	fehlt noch	fehlt noch	iſt zu groß
	16,425	3,840	1,123	um 0,259

Hieraus folgt, daß der Winkel m zwiſchen den 112 und 113 Grad enthalten ſey, und da wir hier nur von einem Grad zu dem folgenden gegangen, ſo läßt ſich der wahre Werth von m ganz leicht und ziemlich genau vermöge einer gemeinen Regeldetrie beſtimmen, dann man darf nur ſprechen $1{,}123 + 0{,}259$ das iſt $1{,}482$ Unterſchied in der Formul $m - 57{,}295$ &c. $\sin m$ geben 1° oder $60'$ Zuwachs in dem Winkel m, um wie viele Minuten muß man dieſen Winkel m über 112° vermehren, damit der Unterſchied in der Formul genau 1,123 werde: das iſt

1,480 geben $60'$ was geben 1,123? Antwort. $46'$

Es iſt alſo ziemlich genau $m = 112° \; 46'$.

Wollte man aber dieſen Winkel noch genauer beſtimmen, ſo berechne man zwey neue Satzungen auf die eben erwähnte Art, welche aber nur um etliche Minuten von einander unterſchieden

den ſind, und berechne aus den Fehlern, welche daraus in der Formul $m - 57,295$ &c. ſin m entſpringen, den Unterſchied zwiſchen dem wahren Winkel m und dem vorausgeſetzten

Satzungen - - - - - - - - m - - - - - - - - - - -	V. 112° 45′	VI. 112° 50′
l 57, 295 &c. - - - - - - - -	1,7581226	1,7581226
l ſin m - - - - - - - - - -	9,9648256	9,9645692
l 57, 295 &c. ſin m - - - - -	1,7229482	1,7226828
57, 295 &c. ſin m - - - - -	52, 838	52, 806
m — 57, 295 &c. ſin m - - - -	59, 912	60, 060
	fehlt noch 0, 088	iſt zu groß um 0, 060

Folglich da 0, 088 + 0, 060 oder 0, 148 geben 5′ oder 300″, ſo werden 0, 088 geben $\frac{300 \times 0,088}{0,148}$ das iſt 178″; alſo iſt $m = 112°$ 45′ + 178″ oder $m = 112°\ 47'\ 58''$ ſehr genau.

Um anjetzo den zweyten ſechsten Theil zu berechnen, ſo ſetze man in der gefundenen allgemeinen Gleichung $\frac{1}{n} = \frac{2}{6}$ oder $n = 3$, und die daraus erſtandene Gleichung

$$m - 57,295 \text{ \&c. sin } m = 120$$

wird uns denjenigen Winkel m geben, welcher die beyden erſten ſechsten Theile zuſammen einfaßt.

Man ſetze m - - - - - - - - -	I. 150°	II. 149°	III. 149° 15′	IV. 149° 20′.
l 57, 295 &c. - - -	1,7581226	1,7581226	1,7581226	1,7581226
l ſin m - - - - - - - -	9,6989700	9,7118393	9,7086699	9,7076064
l 57, 295 &c. ſin m	1,4570926	1,4699619	1,4667925	1,4657290
57, 295 &c. ſin m -	28, 648	29, 510	29, 295	29, 223
m — 57, 295 &c. ſin m	121, 352	119, 490	119, 955	120, 110
	iſt zu groß um 1, 352	iſt zu klein um 0, 510	iſt zu klein um 0, 045	iſt zu groß um 0, 110

Folglich
$1,352 + 0,510 : 1° = 0,510 :$*
$1,862 : 60' = 0,510 : 16'$
alſo
$m = 149° \; 16'$
ziemlich genau

Alſo
$0,045 + 0,110 : 5' = 0,045 :$*
$0,155 : 300'' = 0,045 : 87''$
folglich
$m = 149° \; 16' \; 27''$
ſehr genau

Setzen wir nun um den dritten Theil zu finden $\frac{1}{n} = \frac{3}{6}$ oder $n = 2$, alſo daß $m - 57,295$ &c. ſin $m = 180$ werde, ſo erhellet ſogleich, daß hier $m = 180°$ ſeyn müſſe, weil alsdann ſin $m = 0$ und der ganzen Gleichung ein völliges Genügen geleiſtet wird.

Der erſte zweyte und dritte ſechste Theil aber geben auch zugleich den letzten, fünften und vierten Theil.

Um alſo die Zirkelfläche ABA′D (2 Fig.) durch Parallellinien nach der Richtung MN in ſechs gleiche Theile zu zerſchneiden, ſo ziehe man den Durchmeſſer AA′ auf der gegebenen Richtung MN perpendiculár. Man nehme alsdann $AM = AN = \frac{112° \; 47' \; 58''}{2} = 56° \; 23' \; 59''$ ingleichen $A'M' = A'N' = 56° \; 23' \; 59''$ und ziehe die Sehnen MN und M′N′, ſo wird MANM der erſte Theil, und M′A′N′M′ der letzte Theil ſeyn. Ferner mache man $Am = An = \frac{149° \; 16' \; 27''}{2} = 74° \; 38' \; 13\frac{1}{2}''$ ingleichen $A'm' = A'n' = 74° \; 38' \; 13\frac{1}{2}''$ und ziehe die Sehnen mn, $m'n'$, ſo wird MNnm der zweyte Theil, und M′N′$n'm'$ der fünfte Theil ſeyn. Endlich ziehe man den Durchmeſſer DB auf AA perpendiculár, ſo wird mnBD der dritte Theil, $m'n'$BD der vierte Theil der nunmehro in ſechs gleiche Theile zerſchnittenen Zirkelfläche ſeyn.

Dritte Aufgabe.

Die Höhe und Grundlinie einer aufrechtſtehenden geſchloſſenen Parabelfläche iſt gegeben, man ſoll dieſelbe durch Parallellinien in n gleiche Theile zerſchneiden.

1. Es ſey CADC (1, 2, 3, 4 und 5 Fig.) die vorgelegte Parabel, $AB = a$ die Höhe und $CB = BD = b$ die halbe Grundlinie, ſo wird $\frac{4ab}{3}$ der Flächeninnhalt der ganzen Parabel CADC und $\frac{4ab}{3n}$ der Flächeninnhalt eines jeden verlangten Theils ſeyn.

2. Da die Auflöſung gegenwärtiger Aufgabe von der Lage der vorgelegten Richtung in Anſehung der Axe der Parabel weſentlich abhängt, ſo muß auch dieſelbe für eine jede Lage beſonders eingerichtet werden. Ich werde hier nur drey Fälle entwickeln, welche aber dennoch ſo beſchaffen ſind, daß ſie auch zugleich alle übrige in ſich begreifen.

Erſter Fall.

Wenn die Richtung MN (1 Fig.) nach welcher die Parabel durch Parallellinien in *n* gleiche Theile zerſchnitten werden ſoll, auf der Axe *AB* der Parabel perpendiculär iſt, und folglich der Grundlinie *CD* parallel läuft.

3. Es ſey $AMMA = \frac{4ab}{3n}$ der erſte geſuchte n Theil der ganzen Parabel und $AP = x$ die derſelben zugehörige Abſciſſe, ſo wird $PM = \sqrt{\frac{bbx}{a}}$; $MM = 2\sqrt{\frac{bbx}{a}}$ und der Flächeninnhalt des Stücks $AMMA = \frac{4}{3}x\sqrt{\frac{bbx}{a}}$. Folglich $\frac{4}{3}x\sqrt{\frac{bbx}{a}} = \frac{4ab}{3n}$, und alſo x, das iſt $AP = \frac{a}{\sqrt[3]{nn}}$ oder $AP = \frac{AB}{\sqrt[3]{nn}} = AB\sqrt[3]{(\frac{1}{n})^2}$. Es ſey ferner $MM^1M^1M = \frac{4ab}{3n}$ der zweyte geſuchte n Theil der ganzen Parabelfläche, und weil dann $AM^1M^1A = \frac{8ab}{3n} = \frac{4ab}{3 \times \frac{1}{2}n}$ ſeyn muß, ſo werden wir auf

eine ähnliche Art für dieſen 2 Theil $MM'M'M$ erhalten die Abſciſſe $AP' = AB\sqrt[3]{\left(\frac{2}{n}\right)^2}$ folglich die Höhe dieſes Theils $PP' = AB\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n}\right)^2} \times (\sqrt[3]{2^2}-1)$. Eben ſo werden wir auch für den dritten Theil $M'M''\ M''M'$ die Abſciſſe AP'' finden, wenn wir in dem für AP gefundenen Werth $\frac{1}{3}n$ anſtatt n ſchreiben: es wird nämlich für dieſen dritten Theil ſeyn die Abſciſſe $AP'' = AB\sqrt[3]{\left(\frac{3}{n}\right)^2}$ und folglich die Höhe deſſelben $P'P'' = AB\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n}\right)^2} \times (\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{2^2})$.

Wenn man demnach von der Spitze A an auf der Axe der Parabel die Entfernungen $AP = AB\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n}\right)^2}$

$PP' = (\sqrt[3]{2^2}-1)\ AB\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n}\right)^2}$

$P'P'' = (\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{2^2})\ AB\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n}\right)^2}$

$P''P''' = (\sqrt[3]{4^2}-\sqrt[3]{3^2})AB\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n}\right)^2}$ und ſo weiter abſticht, und durch dieſe Puncte P, P', P'', P''', u. ſ. w. die graden Linien MM, $M'M'$, $M''M''$, $M'''M'''$, und ſ. w. der Richtung $\mathfrak{MN}$, das iſt in dem gegenwärtigen Fall, der Grundlinie CD parallel ziehet, ſo werden dieſelben die ganze Parabelfläche in n gleiche Theile zerſchneiden.

Anmerkung. Da hier der Buchſtabe b, ſo die halbe Grundlinie andeutet, gänzlich aus der Rechnung gegangen, ſo folgt hieraus, daß die Linien MM, $M'M'$, $M''M''$, $M'''M'''$, u. ſ. w. nicht nur die vorgelegte Parabel $ACDA$, ſondern überhaupt alle Parabeln von der gleichen Höhe AB in n gleiche Theile zerſchneiden, die Grundlinien derſelben mögen groß oder klein ſeyn.

Zweyter Fall.

Wenn die Richtung MN, nach welcher die Parabel in n gleiche Theile zerſchnitten werden ſoll, der Axe AB der Parabel parallel läuft.

4. Es ſey MND (2 Fig.) der erſte Theil, und alſo MND $= \frac{4}{3} \cdot \frac{ab}{n}$; Man ſetze für denſelben die Entfernung von der Axe BN $= y$, ſo wird auch PM $= y$ und die Abſciſſe AP $= \frac{ayy}{bb}$ ſeyn; folglich

der Innhalt APMA $= \frac{2ay^3}{3bb}$; ABDA $= \frac{2}{3}ab$

der Innhalt PMDB = ABDA — APMA $= \frac{2}{3}ab - \frac{2}{3}\frac{ay^3}{bb} = \frac{2a}{3bb}(b^3 - y^3)$

der Innhalt PMNB $= (a - \frac{ayy}{bb})\, y = ay \cdot \frac{bb - yy}{bb}$

der Innhalt MND = PMDB — PMNB $= \frac{2}{3}a \cdot \frac{b^3 - y^3}{bb} - ay \cdot \frac{bb - yy}{bb}$

oder

der Innhalt MND $= \frac{a}{bb}(\frac{1}{3}y^3 - bby + \frac{2}{3}b^3)$

Da nun der Innhalt von MND $= \frac{4}{3} \cdot \frac{ab}{n}$ ſeyn muß, ſo erhalten wir dieſe Gleichheit $\frac{a}{bb}(\frac{1}{3}y^3 - bby + \frac{2}{3}b^3) = \frac{4}{3} \cdot \frac{ab}{n}$ oder

dieſe — $y^3 - 3bby = \frac{-2b^3(n-2)}{n}$

welche allemal drey mögliche Wurzeln hat, und nach des Cardani Regel aufgelößt folgenden Werth für y = BN giebet

$$y = \sqrt[3]{(-b^3(-1\frac{2}{n}) + \sqrt{(b^6(-1\frac{2}{n})^2 - b^6)})} + \sqrt[3]{(-b^3(1-\frac{2}{n}) - \sqrt{(b^6(1-\frac{2}{n})^2 - b^6)})}$$

oder $y = b \times (\sqrt[3]{(-1+\frac{2}{n} + 2\sqrt{\frac{1}{n}}(\frac{1}{n}-1))} + \sqrt[3]{(-1+\frac{2}{n} - 2\sqrt{\frac{1}{n}}(\frac{1}{n}-1))})$

das iſt BN $=$ BD $\times (\sqrt[3]{-1+\frac{2}{n} + 2\sqrt{\frac{1}{n}}(\frac{1}{n}-1)}) + \sqrt[3]{(-1+\frac{2}{n} - 2\sqrt{\frac{1}{n}}(\frac{1}{n}-1))})$.

Erſte Anmerkung. Dieſer gefundene Werth von BN erhält allemal die Geſtalt einer unmöglichen Größe, weil nämlich $\frac{1}{n}<1$ und folglich $\sqrt{\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-1)}=\sqrt{\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})}\times\sqrt{-1}$; wenn man aber die beyden cubiſchen Wurzel-Formeln in unendliche Reyhen entwickelt, ſo heben ſich die imaginären Glieder gegen einander auf, und der Werth von BN wird möglich.

Zweyte Anmerkung. Will man aber, um alle Weitläufigkeit zu vermeiden, die Gleichung $y^3-3bby=-2b^3(1-\frac{2}{n})$ durch die Triſectionem anguli auflöſen; ſo ſuche man erſtlich einen Winkel Z deſſen Coſinus $=-1+\frac{2}{n}$ iſt, und die drey Wurzeln der vorgefundenen Gleichung werden alsdann alle unter dieſer Formul begriffen ſeyn

$$y = 2b\cos(m\times 120+\tfrac{1}{3}Z)$$

Wo für m eine ganze Zahl nach Belieben angenommen werden kann. Alſo daß auch $m=0$ eine Wurzel der Gleichung, nämlich

$$y = 2b\cos\tfrac{1}{3}Z;\ \text{weil}\ \cos-\tfrac{1}{3}Z = \cos+\tfrac{1}{3}Z)$$

giebt.

Von den drey gefundenen Werthen für y aber muß nur derjenige erwählet werden, welcher kleiner als $\frac{1}{2}$CD iſt. Es werden aber allemal zwey Werthe größer als $\frac{1}{2}$CD ſeyn, und zu den beyden niederſteigenden Aeſten der Parabel unter der Grundlinie gehören.

Dritte Anmerkung. Hätte man anſtatt der Entfernung BN die Abſciſſe AP geſucht, ſo würde man auf folgende cubiſche Gleichung gerathen ſeyn

$$AP^3-6.AB.AP^2+9.AB^2.AP=4AB^3(1-\tfrac{2}{n})^2$$

welche ebenfalls drey mögliche Wurzeln hat, und welche folglich auch am bequemſten durch die Triſectionem angulorum aufgelößt werden kann.

Vierte Anmerkung. Da wir die Entfernung BN geſucht haben, ſo fiel die Höhe der Parabel AB aus der Rechnung, und als die Abſciſſe AP geſucht worden, ſo fiel die Grundlinie CD weg. Folglich werden einerley Parallellinien MN in dem erſten Fall alle Parabeln, die verſchiedene Höhen aber eine und eben dieſelbe Grundlinie CD haben, und in dem andern Fall alle Parabeln, die verſchiedene Grundlinien aber eine und eben dieſelbe Höhe AB haben, in n gleiche Theile zerſchneiden.

Fünfte Anmerkung. Ich habe zwar hier nur gezeiget, wie der Ort N der erſten Parallellinie MN, welche nämlich den erſten n Theil MND abſchneidet, beſtimmt werden ſoll. Die Oerter N', N'', N''', und ſ. w. der übrigen Parallellinien $M'N'$, $M''N''$, $M'''N'''$, und ſ. w. aber werden aus eben derſelben Gleichung

$$BN^3 - 3\,BD^2 \times BN = 2BD^3 \times (1 - \tfrac{2}{n})$$

oder $AP^3 - 6\,AB \times AP^2 + 9\,AB^2 \times AP = 4AB^3\,(1 - \tfrac{2}{n})^2$

berechnet, wenn man für n nacheinander $\frac{1}{2}n$, $\frac{1}{3}n$, $\frac{1}{4}n$, und ſ. w. oder für $\frac{1}{n}$ nacheinander $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$, $\frac{4}{n}$, u. ſ. w. ſchreibt.

Dritter und letzter Fall.

Wenn die Richtung $\mathfrak{MN}$, (3 Fig.) nach welcher die Parabel in n gleiche Theile zerſchnitten werden ſoll, mit der Grundlinie CD einen gegebenen Winkel $\mathfrak{MN}C = a$ macht.

5. Es ſey MENM der erſte geſuchte Theil, alſo daß MN der gegebenen Richtung $\mathfrak{MN}$ parallel laufe und $MENM = \frac{4ab}{3n}$ ſey. Man ſetze den Tangenten des Winkels $\mathfrak{MN}C = m$ oder $\text{tang}\ a = m$, ſo wird auch $\text{tang}\ QNM = m$ ſeyn. Es ſey ferner $PM = x$, und $QN = y$, ſo wird $AP = \frac{axx}{bb}$ und $AQ = \frac{ayy}{bb}$ ſeyn;

folglich $PQ = \frac{a}{bb}(yy-xx) = \frac{a}{bb}(y+x)(y-x)$. Nun aber iſt $PQ = MO = ON$ tang. $MNO = (QN - PM)$ tang. MNO das iſt $PQ = (y-x)m$; folglich muß $\frac{a}{bb}(y+x)(y-x) = (y-x)m$ das iſt $\frac{a}{bb}(y+x) = m$ ſeyn, durch welche Gleichung ſogleich y durch x beſtimmt wird; es iſt nämlich $y = \frac{mbb}{a} - x$, folglich $AQ = \frac{a}{bb}(\frac{mbb}{a} - x)^2$; $PQ = \frac{a}{bb}(\frac{mbb}{a} - x)^2 - \frac{a}{bb}x^2 = \frac{mmbb}{a} - 2mx$ $QN = y = \frac{mbb}{a} - x$ und der Flächeninnhalt von

$$AQNA = \tfrac{2}{3} AQ.\, QN = \tfrac{2}{3} \times \frac{a}{bb}(\frac{mbb}{a} - x)^3$$

$$APMA = \tfrac{2}{3} AP.\, PM = \tfrac{2}{3} \times \frac{a}{bb} x^3$$

$$PMNQ = \tfrac{1}{2} PQ (PM + QN) = \frac{mmbb}{2a}(\frac{mbb}{a} - 2x)$$

Da nun $MENM = \frac{4ab}{3n} = AQNA - APMA - PMNQ$ iſt, ſo erhalten wir folgende Gleichung

$$\frac{4ab}{3n} = \frac{2a}{3bb}(\frac{mbb}{a} - x)^3 - \frac{mmbb}{2a}(\frac{mbb}{a} - 2x) - \frac{2a}{3bb}x^3$$

Man ſetze der Kürze halben $\frac{mbb}{a} = c$ ſo wird

$$\frac{4ab}{3n} = \frac{2a}{3bb}(c-x)^3 - \frac{mc}{2}(c-2x) - \frac{2a}{3bb}x^3 \text{ oder}$$

$$\frac{2b^3}{n} = (c-x)^3 - \frac{3mcbb}{4a}(c-2x) - x^3 \text{ das iſt, weil } \frac{mbb}{a} = c$$

$$\frac{2b^3}{n} = (c-x)^3 - \tfrac{3}{2}cc(\tfrac{1}{2}c - x) - x^3; \text{ oder da}$$

$$(c-x)^3 = (\tfrac{1}{2}c + (\tfrac{1}{2}c - x))^3 = \tfrac{1}{8}c^3 + \tfrac{3}{4}cc(\tfrac{1}{2}c - x) + \tfrac{3}{2}c(\tfrac{1}{2}c - x)^2 + (\tfrac{1}{2}c - x)^3$$

und $x^3 = (\frac{1}{2}c - (\frac{1}{2}c - x))^3 = \frac{1}{8}c^3 - \frac{3}{4}cc(\frac{1}{2}c - x) + \frac{3}{2}c(\frac{1}{2}c - x)^2 - (\frac{1}{2}c - x)^3$

ſo wird $\frac{2b^3}{n} = \frac{3}{2}cc(\frac{1}{2}c - x) + 2(\frac{1}{2}c - x)^3 - \frac{3}{2}cc(\frac{1}{2}c - x)$

das iſt $(\frac{1}{2}c - x)^3 = \frac{b^3}{n}$ und folglich $\frac{1}{2}c - x = \frac{b}{\sqrt[3]{n}}$

also $x = \frac{1}{2}c - \frac{b}{\sqrt[3]{n}} = \frac{mbb}{2a} - \frac{b}{\sqrt[3]{n}}$

Wir bekommen alſo für den erſten geſuchten n Theil MENM

$PM = \frac{mbb}{2a} - \frac{b}{\sqrt[3]{n}}$ und folglich

$QN = \frac{mbb}{2a} + \frac{b}{\sqrt[3]{n}}$; $PM + QN = \frac{mbb}{a}$; $PM - QN = \frac{-2b}{\sqrt[3]{n}}$

$$AP = \frac{a}{bb}\left(\frac{mbb}{2a} - \frac{b}{\sqrt[3]{n}}\right)^2 = a\left(\frac{mb}{2a} - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^2$$

$$AQ = \frac{a}{bb}\left(\frac{mbb}{2a} - \frac{b}{\sqrt[3]{n}}\right)^2 = a\left(\frac{mb}{2a} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^2$$

Setzet man nun weiter für n; $\frac{1}{2}n$, $\frac{1}{3}n$, $\frac{1}{4}n$, u. ſ. w. ſo bekömmt man aus dieſen Formuln die Lage der II, III, IV, und ſ. w. Parallellinie, welche nämlich die ganze Parabel in n gleiche Theile zerſchneiden.

Erſte Anmerkung. Bey dieſer Auflöſung aber iſt wohl zu beobachten, daß weil wir die Parabel nur bis an die Grundlinie CD eingeſchrenkt haben, die Applicate NQ nicht größer werden kann, als die halbe Grundlinie BD; das iſt $\frac{mb}{2a} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ muß < ſeyn als 1. Im Fall nun dieſes nicht gefunden würde, oder daß $\frac{mb}{2a} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} > 1$, ſo wird der Punct der Parabel N unter der Grundlinie fallen, und die Auflöſung der Aufgabe ſelbſten ganz anders eingerichtet werden müſſen.

Man ſetze alſo die Linie MN (4 Fig.) die den gegebenen Theil der ganzen Parabel abſchneidet, falle mit dem andern Ende N auf der Grundlinie BD; alſo daß hier MEDNM der geſuchte Theil oder MEDNM $= \frac{4ab}{3n}$; tang MNO aber $= m$ ſey.

Es ſey wiederum PM $= x$, ſo wird

$$AP = \frac{axx}{bb};\ PB = a - \frac{axx}{bb};\ ON = \frac{a}{m}\left(1 - \frac{xx}{bb}\right);\ BN = x + \frac{a}{m}\left(1 - \frac{xx}{bb}\right)$$

der Innhalt von PMNB $= \frac{1}{2}$ PB (PM + BN)

$$\frac{1}{2}\left(a - \frac{axx}{bb}\right)\left(2x + \frac{a}{m}\left(1 - \frac{xx}{bb}\right)\right)$$

oder PMNB $= ax\left(1 - \frac{xx}{bb}\right) + \frac{aa}{2m}\left(1 - \frac{xx}{bb}\right)^2$

Es iſt aber der Innhalt von

APMA $= \frac{2a}{3bb}x^3$ und

ABDA $= \frac{2ab}{3}$

Da nun der Innhalt von MEDN $= \frac{4ab}{3n} =$ ABDA — APMA — PMNB iſt, ſo erhalten wir folgende Gleichung

$$\frac{4ab}{3n} = \frac{2ab}{3} - \frac{2a}{3bb}x^3 - ax\left(1 - \frac{xx}{bb}\right) - \frac{aa}{2m}\left(1 - \frac{xx}{bb}\right)^2$$

welche ſich durch die Entwickelung in dieſe verwandelt

$$x^4 - \frac{2mbb}{3a}x^3 - 2bbxx + \frac{2mb^4}{a}x + b^4 - \frac{4mb^5}{3a}\left(1 - \frac{2}{n}\right) = 0.$$

Zweyte Anmerkung. Wann wir in der eben gefundenen Gleichung m das iſt tang MNO unendlich groß annehmen, ſo erhalten wir für den ſchon oben behandelten zweyten Fall

$$-\frac{2mb}{3a}x^3 + \frac{2mb^4}{a}x - \frac{4mb^5}{3a}\left(1 - \frac{2}{n}\right) = 0.$$

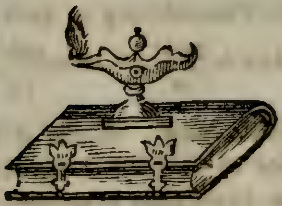
Und wenn man dieſe Gleichung durch $\frac{-2mbb}{3a}$ theilt

$$x^3 - 3bbx + 2b^3\left(1-\frac{2}{n}\right) = 0.$$

So wie wir dieſe Gleichung auch ſchon an dem eben bemeldten Orte herausgebracht haben. (§. 4.)

Auf eine ähnliche Art kann man auch den Werth von AP in dem erſten Fall (§. 3.) aus der in dem dritten Falle für AP (§. 5.) gefundenen Werthe herausbringen, wenn man nämlich in dieſem m das iſt tang MNO $= o$ ſetzt.

Dritte Anmerkung. Wenn bey einer Berechnung des dritten Falles für die Linie PM ein negativer Werth gefunden wird, ſo muß das Punct M der Parallellinie MN auf der andern Seite AC der Parabel angenommen oder abgeſtochen werden. Und dieſes war auch der Grund, warum ich hier nicht die der Parallellinie MN zukommende Abſciſſe AP, wie bey den beyden vorhergehenden Fällen geſuchet, ſondern derſelben lieber die Entfernung PM vorgezogen. Es beſtimmt nämlich jene (Abſciſſe) nicht diejenige Seite, wo das eine End M der Parallellinie MN hinfällt; bey den beyden erſten Fällen aber war dieſe Behutſamkeit nicht ſo nöthig.



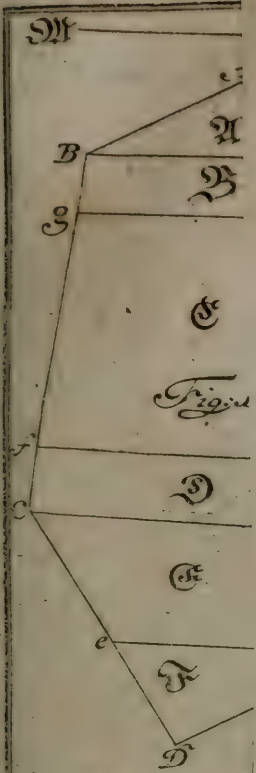

M
A
B
B
g
C
f
D
C
E
e
F
D

Fig. 1

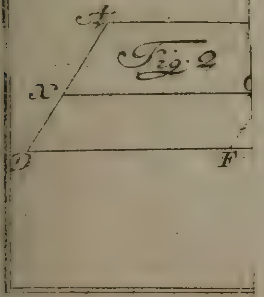


Fig. 2

ISH MUSE

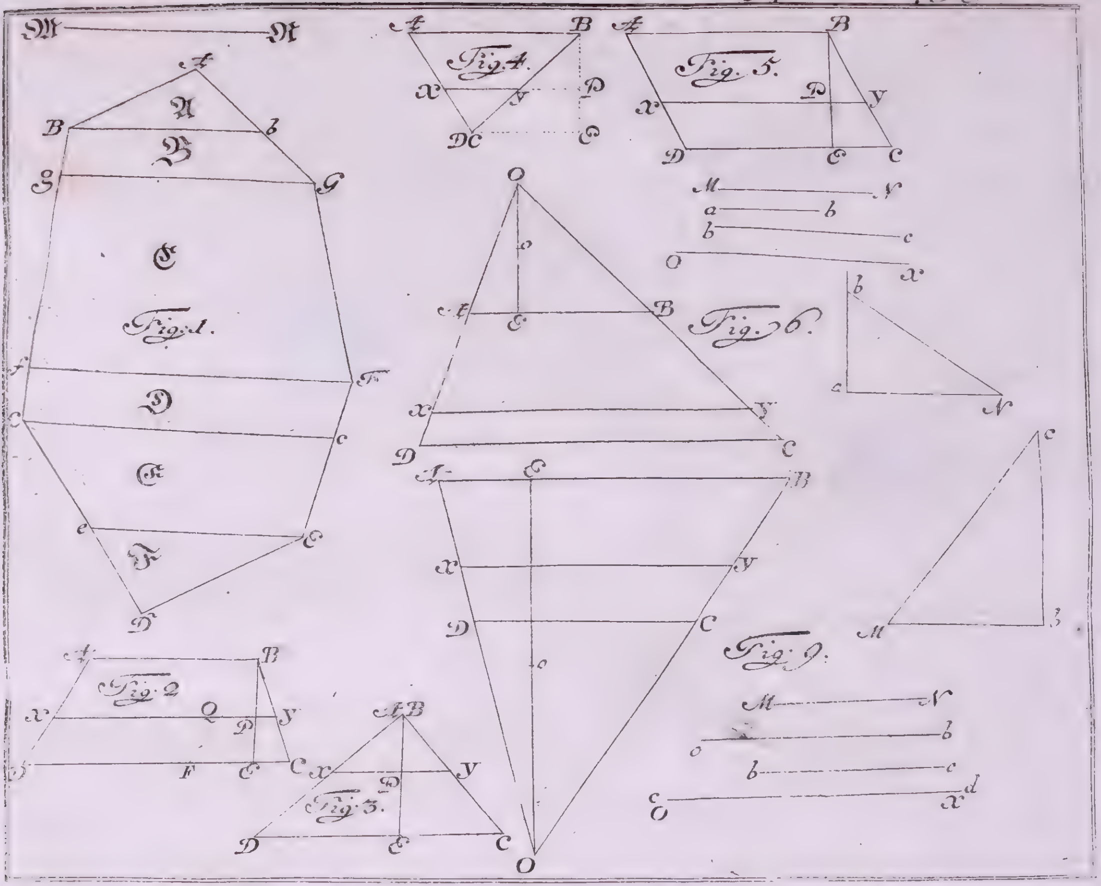
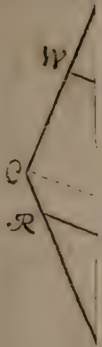


Fig. 1.
M
M
A
𝔄
B
b
𝔅
G
G
ℭ
f
F
𝔇
C
c
𝔈
e
E
𝔉
D
Fig. 2
A
B
x
Q
P
y
D
F
E
C
Fig. 3.
AB
x
y
D
D
E
C
Fig. 4.
A
B
x
y
P
DC
E
Fig. 5.
A
B
x
P
y
D
E
C
Fig. 6.
O
o
A
E
B
x
y
D
C
M
N
a
b
b
c
O
x
b
a
N
Fig. 9.
A
E
B
x
y
D
C
o
O
c
M
z
M
N
o
b
b
c
c
O
x
d


W
C
R

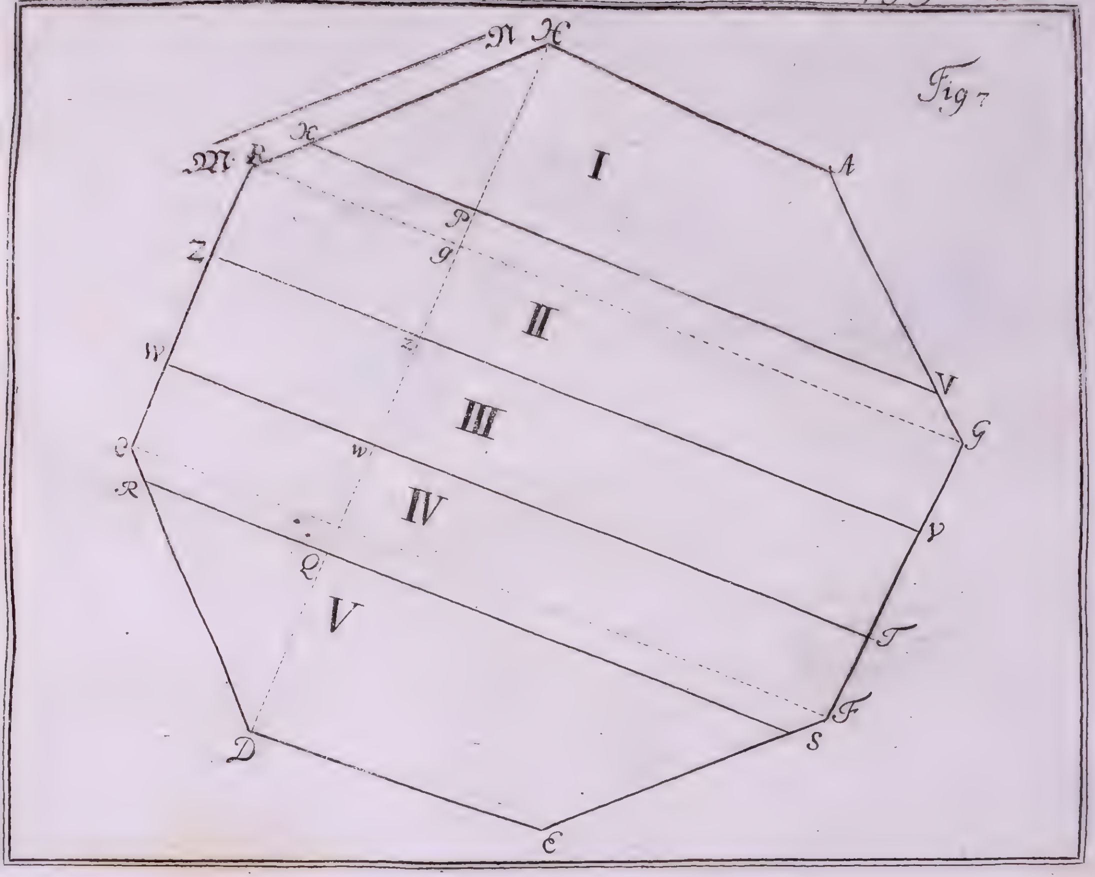


Fig 7
N
H
M
R
K
A
I
P
g
Z
z
II
W
V
G
III
C
w
IV
R
Y
Q
V
T
F
D
S
E

BRITISH MUSEUM

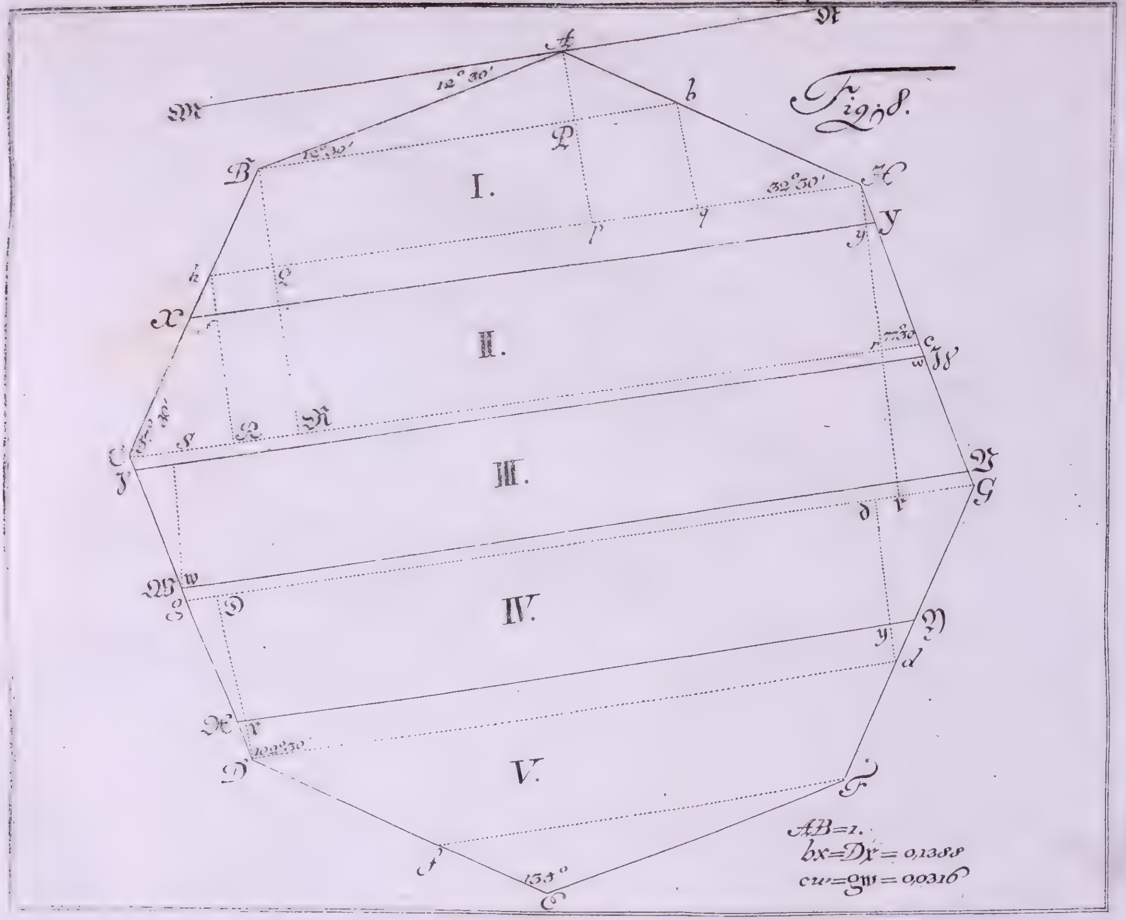


Fig. 8.

A
N
M
b
12° 30'
12° 30'
L
B
H
32° 30'
I.
p
q
y
Y
h
x
II.
77° 30'
c
w
X
R
C
s
III.
G
d
r
W
w
g
D
IV.
y
d
M
r
102° 30'
D
V.
F
f
135°
E
AB=1.
bx=Dx'=0,1388
cw=gw=0,0316

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

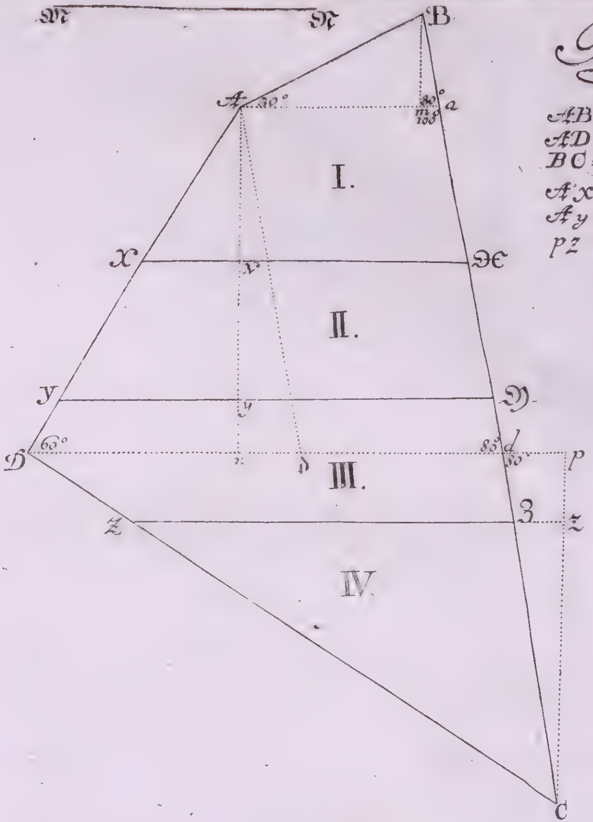
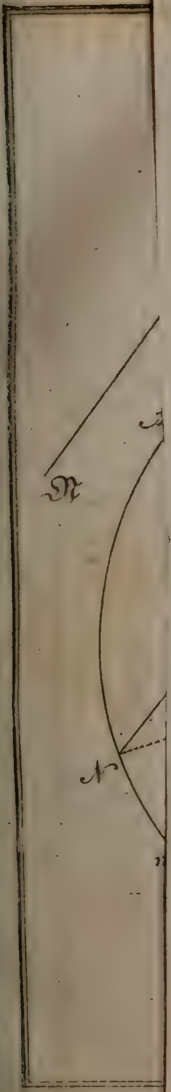

M
N
B
A
30°
80°
m
108
a
I.
X
X
x
II.
y
Y
y
D
60°
85°
d
85°
n
b
p
III.
Z
Z
z
IV.
C

Fig. 10.

AB = 100 ; BAD = 150° ;
AD = 200 ; ABC = 70° ;
BC = 400 ;

AX = 79, 64 ;
Ay = 147, 95 ;
pZ = 33, 96 ;



BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

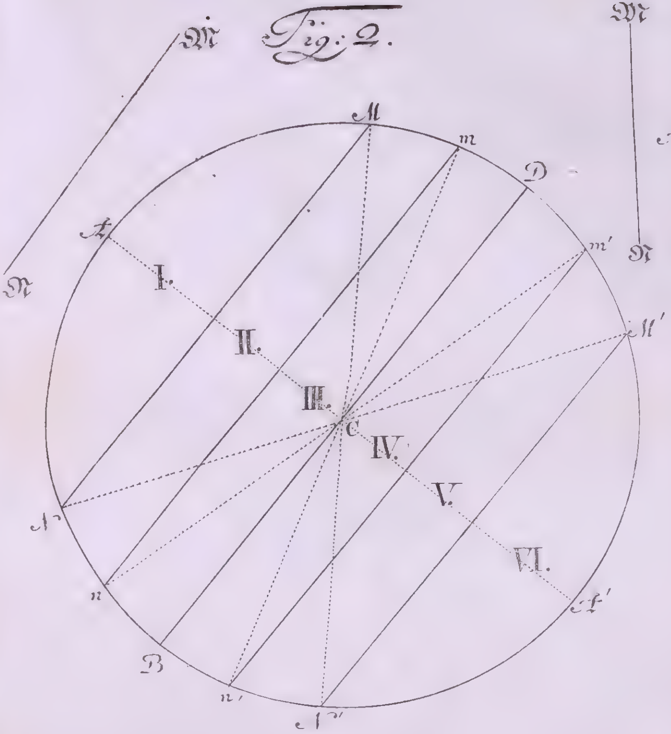

𝔐
𝔑
M
m
D
m'
M'
A
I.
II.
III.
C
IV.
V.
VI.
A'
N
n
B
n'
N'
𝔐
𝔑

Fig: 2.

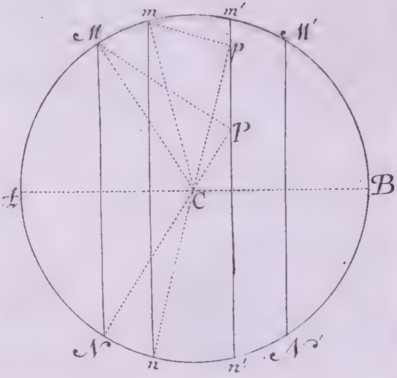
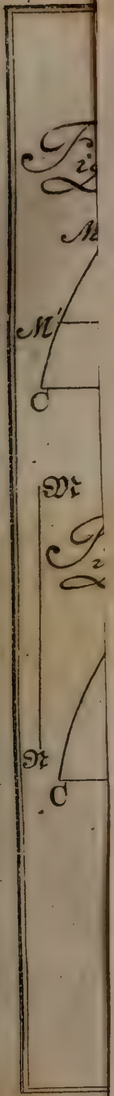

m
m'
M
M'
p
P
A
C
B
N
n
n'
N'

Fig: 1.


M'
C
𝔐
𝔐
C

5.ter B. Philoſoph. Abhandl. pag. 196 Tab. VI.

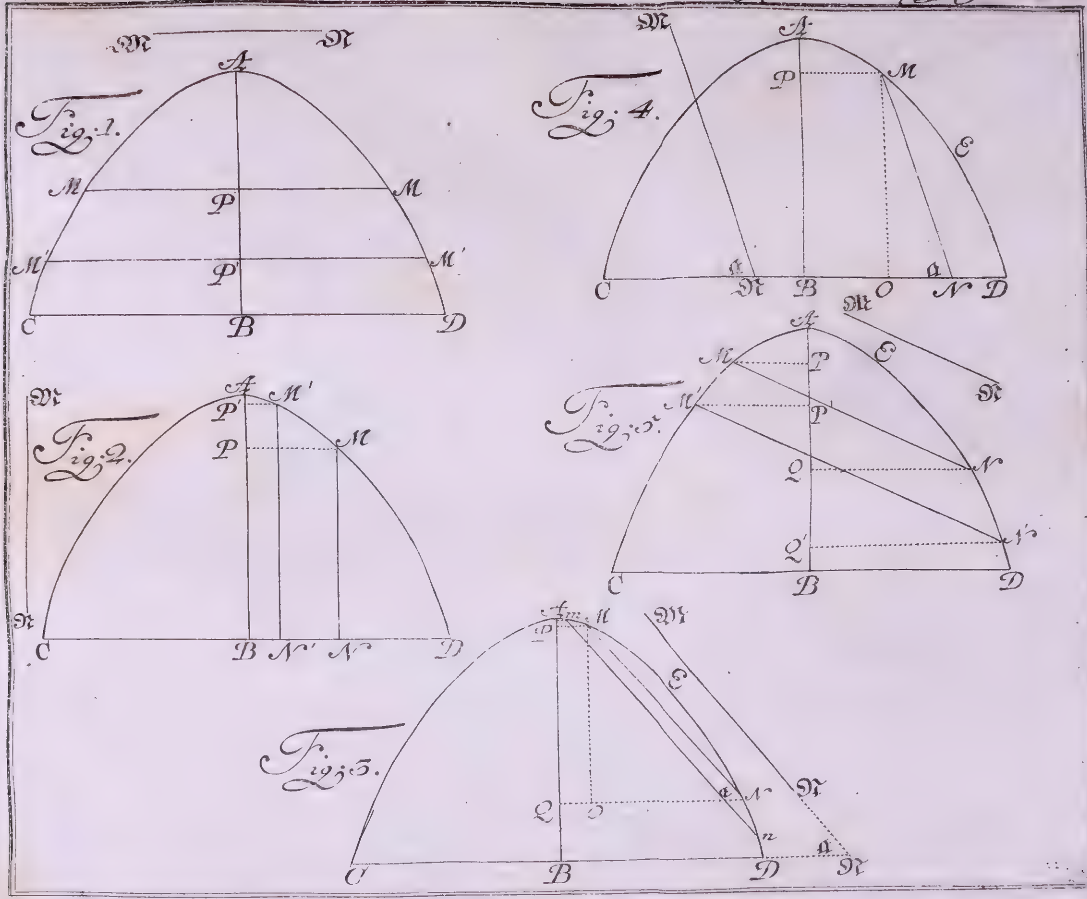


Fig. 1.
𝔐
𝔑
A
M
M
P
M′
M′
P′
C
B
D
Fig. 4.
𝔐
A
P
M
E
𝔞
𝔞
C
𝔑
B
O
N
D
Fig. 5.
𝔐
A
M
P
E
M′
P′
𝔑
Q
N
Q′
N′
C
B
D
Fig. 2.
𝔐
A
M′
P′
P
M
𝔑
C
B
N′
N
D
Fig. 3.
A
m
M
p
𝔐
E
𝔑
Q
o
𝔞
N
n
𝔞
C
B
D
𝔑

J. Albrecht Eulers
Verſuch
die Figur der Erden durch Beobachtungen des Monds zu beſtimmen.

Als die Pariſerakademie der Wiſſenſchaften den höchſtrühmlichen Entſchluß faßte, die Parallaxe des Monds auf das genaueſte zu beſtimmen, ſo wurden zu dieſem Ende zwey ihrer geſchickteſten Mitglieder (*) an zwey weit von einander entfernte und (ſo viel als es möglich war) auf einem und eben demſelben Mittagskreiſe gelegene Oerter verſchicket, um daſelbſt die mittäglichen Höhen des Mondes auf das fleißigſte zu beobachten. Es würde aber nichts deſtoweniger dieſer beyden Mitglieder Mühe und Fleiß fruchtlos geblieben ſeyn, und die Akademie würde ſich auch nicht geſchmeichelt haben, die wahre Parallaxe des Mondes aus dieſen ihren Beobachtungen herausbringen zu können, wenn ſie ſich vorhero nicht von der wahren Figur der Erde durch die bekannten Ausmeſſungen verſichert hätte. Wäre die Erde vollkommen kugelrund, ſo hätte die Beſtimmung

der

(*) Die Herren de la Caille und de la Lande: erſterer war nach dem Vorgebürge der guten Hofnung und letzterer nach Berlin abgereiſet; außer dieſen hatte ſich noch der verſtorbene Profeſſor Griſchow mit Genehmhaltung der rußiſch-kaiſerlichen Akademie zu Petersburg nach der Inſel Oeſel begeben, um daſelbſt mit erſteren gemeinſchaftlich die Mondshöhen zu beobachten.

der Parallaxe keine Schwierigkeit auf ſich. Denn da alsdenn beyde Beobachter, an welchen Oertern des Mittagskreißes ſie ſich auch befänden, gleichweit von dem Mittelpunct der Erde entfernt wären, ſo würde durch ihre übereinſtimmenden Beobachtungen die Entfernung des Monds durch eine und eben dieſelbe Einheit, nämlich durch den Halbmeſſer der Erde beſtimmt, und die Parallaxe des Monds leicht gefunden werden können.

Eine ganz andere Bewandtniß aber hat es hingegen, da die Erde in der That nicht genau kugelrund iſt: dann weil in dieſem Fall die Beobachter ſich meiſtentheils in verſchiedenen Entfernungen von dem Mittelpunct der Erde befinden, ſo iſt eine genaue Känntniß dieſer Verſchiedenheit der Entfernungen und ihrer wahren Größe unumgänglich nöthig, um die wahre Entfernung des Monds von dem Mittelpunct der Erde, und ſeine Parallaxe aus den Beobachtungen ſchließen zu können.

Da es alſo unläugbar iſt, daß die auf einem und eben demſelben Mittagskreiſe beobachteten Mondshöhen von der Figur der Erde abhängen, und dieſe hinwiederum einen Einfluß in jene nothwendig haben müſſe, ſo ſtehet mit allem Recht zu vermuthen, daß die Beobachtungen der mittäglichen Mondshöhen darzu dienen könnten, die Figur der Erde aus denſelben zu beſtimmen. Es müßten nämlich zu dieſem Ende verſchiedene Beobachter die mittäglichen ſcheinbaren Höhen des Monds an eben ſo viel verſchiedenen aber auf einem und eben demſelben Mittagskreiſe gelegenen Oertern meſſen, und eine Vergleichung aller Höhen, ſo zu gleicher Zeit genommen worden ſind, würde alsdenn die Figur des Mittagskreiſes geben, und folglich auch die ganze Figur der Erde, wenn ſonſten dieſelbe nicht gar zu unordentlich iſt. Ob nun gleich dieſe Art die Figur der Erde zu beſtimmen, allem Anſcheine nach weit unter derjenigen zu ſetzen iſt, deren ſich die Pariſerakademie bedienet hatte, und durch welche uns die Figur der Erde ſo genau bekannt geworden iſt, als es nur immer möglich ſeyn kann, ſo möchte es dennoch in einer andern Abſicht nicht undienlich ſeyn, theils zu erforſchen, wie die bemeldten Beobachtungen angewandt werden müßten, um aus denſelben die Figur der Erde zu erkennen, theils auch zu prüfen, in wie weit man ſich auf dieſe Beſtimmung der Figur der Erde verlaſſen könne.

Der ſicherſte und natürlichſte Weg aber, um dieſes Vorhaben auszuführen, möchte wohl derjenige ſeyn, den ich einer erlauchten Akademie der Wiſſenſchaften hiermit vorzulegen die Ehre habe.

Es ſoll gegenwärtige Abhandlung die Auflöſung zweyer Aufgaben in ſich enthalten. In der erſten derſelben werde ich die Figur eines Mittagskreiſes als bekannt annehmen und beſtimmen, unter welcher Höhe der Mond an einem jeden Orte dieſes Mittagskreiſes zu der Zeit erſcheinen muß, wenn derſelbe durch den Mittag, das iſt, durch die Ebene des Mittagskreiſes gehet.

Die Auflöſung dieſer Aufgabe wäre allein ſchon hinreichend, um auch hinwiederum die Figur eines Mittagskreiſes zu beſtimmen, auf welchem wirklich die Mondshöhen genommen worden wären. Man müßte nämlich verſchiedene Hypotheſen annehmen, das iſt, man müßte für die Figur des Mittagskreiſes verſchiedene krumme Linien erwählen, und nach dieſen Hypotheſen die verſchiedene mittägliche Mondshöhen berechnen; alsdenn aber dieſe Höhen mit denjenigen vergleichen, welche wirklich beobachtet worden ſind; da es ſich denn bald zeigen würde, welche Hypotheſe die wahre ſey, das iſt, mit welcher der angenommenen krummen Linien die wahre Figur des Mittagskreiſes übereinkäme.

In der Auflöſung der letztern Aufgabe werde ich aber zeigen, wie die unter verſchiedenen Polhöhen eines Mittagskreiſes beobachtete mittägliche Mondshöhen zu der Beſtimmung der Figur dieſes Mittagskreiſes unmittelbar führen könne.

Erſte Aufgabe.

Die Figur der Erde iſt bekannt; man ſoll für einen jeglichen Ort eines Mittagskreiſes die mittägliche Höhe des Mondes finden.

Auflöſung. Es ſey l (1 Figur) der Mittelpunct der Erde, Bb die An, B der Nordpal, und BYA ein Theil des Mittagskreiſes, auf welchem die mittägliche Höhen des Mondes beſtimmet werden ſollen. Es ſey aber ☾ der Ort des Mondes zur Zeit ſeines Durchganges durch dieſen Mittagskreis. Man ſetze die Entfernung des Mittelpuncts des Mondes von dem Mittelpunct der Erde ☾C $= f$ und den Winkel BC☾ $= \xi$, welcher die geocentriſche Entfernung des Monds von dem Nordpol miſſet. Es ſey nun Y ein Ort des Mittagskreiſes, für welchen die mittägliche Mondshöhe beſtimmet werden ſoll, und CX $= x$; XY $= y$ die beyden Coordinaten, welche die Lage dieſes Orts beſtimmen. Man ziehe YN auf dem Mittagskreiſe in Y ſenkrecht, und verlängere dieſelbe, bis ſie der Axe Bb in N begegnet, ſo wird der Winkel BNY das Complement der Polhöhe des Orts Y andeuten. Es ſey dieſer Winkel BNY $= \phi$ und alſo die Polhöhe des Orts Y $= 90° - \phi$. Da nun NX $= \frac{-ydy}{dx}$ ſo wird $\frac{-dx}{dy} = \text{tang}\,\phi$ und $\frac{-dy}{dx}$ der Tangens der Polhöhe in Y gleich ſeyn. Man verlängere die Perpendiculärlinie NY aufwärts, ſo wird dieſelbe durch das Zeinth Z des Orts Y gehen. Man ziehe endlich Y☾ ſo giebt der Winkel ZY☾ die Entfernung des Monds von dem Zeinth oder das Complement der mittäglichen Mondshöhen. Es ſoll alſo dieſer Winkel ZY☾ beſtimmet werden.

Da der Winkel $Bl☾ = \xi$ und $BNY = \phi$ ſo wird der Winkel $CON = YO☾ = \xi - \phi$ und $CN = NR = \frac{-y\,dy}{dx} - x = -x + y \cot. \phi$. Folglich in dem Dreyeck CNO

$$CQ = \frac{-x \sin\phi + y \cos\phi}{\sin(\xi - \phi)},\quad NO = \frac{-x + y \cot.\phi}{\sin(\xi - \phi)} \times \sin\xi.$$

Da nun $NY = \frac{y}{\sin\phi}$ und in dem Dreyeck OY☾:

$$O☾ = C☾ - CO = f + \frac{x \sin\phi - y \cos\phi}{\sin(\xi - \phi)}$$

$$OY = NY - NO = \frac{y}{\sin\phi} + \frac{x - y \cot\phi}{\sin(\xi - \phi)} \times \sin\xi = \frac{x \sin\xi - y \cos\xi}{\sin(\xi - \phi)}$$

Der Winkel YO☾ aber $= \xi - \phi$ iſt, ſo wird der geſuchte Winkel ZY☾ durch dieſe Formul beſtimmt und berechnet werden können.

$$\text{tang. } ZY☾ = \frac{f \sin(\xi - \phi) + x \sin\phi - y \cos\phi}{f \cos(\xi - \phi) - x \cos\phi - y \sin\phi}.$$

Andere und weit kürzere Auflöſung,

In welcher der Mittelpunct der Erden nicht in Betrachtung gezogen wird.

Es ſey BM (2 Fig.) die Axe der Erde, B der Nordpol: BYN der bewußte Mittagskreis, und ☾ der Ort des Monds zur Zeit ſeines Durchgangs durch dieſen Mittagskreis. Man ziehe aus ☾ die grade Linie ☾G auf der verlängerten Axe MBG ſenkrecht und ſetze für den Ort des ☾ die Entfernungen $BG = g$: $G☾ = h$. Nun ſey Y derjenige Ort des Mittagskreiſes, für welchen die mittägliche Höhe des Monds geſucht wird. Es werde gleichfalls aus Y die grade Linie YX auf der Axe Bb ſenkrecht gezogen, und die

Coordinaten oder Entfernungen $BX = x$, $XY = y$ genannt. Man ziehe durch Y die grade Linie YN auf dem Mittagskreis ſenkrecht, ſo wird dieſelbe auf der einen Seite der Axe Bb in N begegnen, auf der andern Seite aber durch das Zenith Z deſſelben Orts Y gehen. Es deute wiederum ϕ das Complement der Polhöhe in Y an, ſo wird der Winkel $BNY = \phi$ und weil $XN = \frac{ydy}{dx}$ iſt; $\frac{dx}{dy} = \tang \phi$ und $\frac{dy}{dx} = \cot \phi$ ſeyn: Es ſind uns demnach g, h, x, y und ϕ gegeben. Nun ziehe man endlich die grade Linie YV der Axe Bb parallel, welche folglich dem Beobachter in Y den Ort des Nordpols am Himmel zeigen wird. Der Winkel VY☾ wird alſo die ſcheinbare Entfernung des Monds ☾ von dem Nordpol V meſſen, und die ſcheinbare Entfernung des Monds von dem Zenith, oder das Complement der geſuchten mittäglichen Mondshöhen wird gefunden werden, wenn man von dieſem Winkel VY☾ den Winkel $VYZ = \phi$ (oder das Complement der Polhöhe) abzieht.

Es iſt aber $YV = g + x$; V☾ $= h - y$, folglich tang VY☾ $= \frac{h - y}{g + x}$: und die geſuchte mittägliche Höhe des Monds für den Ort Y $= 90° -$ VY☾ $+ \phi$.

Zuſätze.

1. Man ſetze die Entfernung des Monds von dem Nordpol oder den Winkel VY☾ $= \psi$, und ſeine Entfernung von dem Zenith oder den Winkel ZY☾ $= \omega$; ſo iſt $\psi = \phi + \omega$ und $\omega = \psi - \phi$. Wir haben aber gefunden $\tang \psi = \frac{h - y}{g + x}$.

2. Wenn der Ort des Monds nicht bekannt, und folglich auch g und h nicht gegeben wären, ſo würden vor allen Din-

gen zwey Beobachtungen erfordert werden, um zuerſt dieſer ihre Werthe berechnen zu können. Sind dieſelben aber einmal gefunden worden, ſo wird die gegebene Formul auch für einen jeglichen andern Ort deſſelben Mittagskreiſes die ſcheinbare Höhe des Monds bey dieſem ſeinem Durchgange durch den Mittagskreis geben.

3. Laßt uns alſo ſetzen, man hätte den Mond wirklich an zwey verſchiedenen und auf einem Mittagskreiſe gelegenen Oertern zu gleicher Zeit beobachtet. Es wäre für den erſtern Ort $x=p$; $y=q$ und man hätte durch die Beobachtung gefunden $\operatorname{tang}\psi=r$. Für den zweyten Ort aber wäre $x=\mathrm{P}$; $y=\mathrm{Q}$ und die Beobachtung hätte gegeben $\operatorname{tang}\psi=\mathrm{R}$. Wir würden alsdann dieſe beyde Gleichungen erhalten

$r=\frac{h-q}{g+p}$ und $\mathrm{R}=\frac{h-\mathrm{Q}}{g+\mathrm{P}}$ und hieraus hinwiederum folgende Werthe für h und g

$$g=\frac{\mathrm{Q}-q+\mathrm{PR}-pr}{r-\mathrm{R}};\quad h=\frac{\mathrm{Q}r-p\mathrm{R}+(\mathrm{P}-p)\,r\mathrm{R}}{r-\mathrm{R}}$$

4. Wenn die Erde vollkommen kugelrund und $\mathrm{CB}=\mathrm{CM}=a$ der halbe Durchmeſſer derſelben wäre, ſo würde $x=a-a\cos\phi$ und $y=a\sin\phi$, folglich

$\operatorname{tang}\psi=\frac{h-a\sin\phi}{g+a-a\cos\phi}$. Daraus wir dann, weil $\psi-\phi=\omega$ iſt, folgende Gleichung ziehen

$(g+a)\sin\psi-h\cos\psi=a\sin\omega$. Man ſetze nun wiederum, daß eine andere zu gleicher Zeit und auf eben demſelben Mittagskreis gemachte Beobachtung dieſe Gleichung gegeben hätte

$(g+a)\sin\psi^{1}-h\cos\psi^{1}=a\sin\omega^{1}$; ſo würde man durch die Vergleichung beyder Beobachtungen finden

$$g+a\,\frac{a(\sin\omega\cos\psi^{1}-\sin\omega^{1}\cos\psi)}{\sin(\psi-\psi^{1})}\text{ und }h=\frac{a(\sin\omega\sin\psi^{1}-\sin\omega^{1}\sin\psi)}{\sin(\psi-\psi^{1})}.$$

Es giebt aber die Summa der beyden Quadraten $(g+a)^2+h^2$ das Quadrat der Entfernung des Mondes ☾ von dem Mittelpunct der Erden C. Es wird alſo dieſe Entfernung ſelbſten ſeyn

$$C☾ = \frac{a\sqrt{(\sin\omega.\sin\omega + \sin\omega^1.\sin\omega^1 - 2\sin\omega.\sin\omega^1.\cos(\psi-\psi^1))}.}{\sin(\psi-\psi^1)}$$

Oder da der Winkel $\psi-\psi^1$ allemal ſehr klein iſt, und folglich ſein Coſinus ohne merklichen Fehler dem Halbmeſſer l gleich geſetzt werden kann, ſo wird ſehr genau $C☾ = \frac{\sin\omega - \sin\omega^1}{\sin(\psi-\psi^1)}a.$

5. Wir wollen anjetzo annehmen, die Erde wäre eine elliptiſche Spheroide; $CB=a$ wäre ihre halbe Axe und b der Halbmeſſer ihres Aequators. So werden wir erſtlich für den Ort Y, deſſen Zenith wir von dem Nordpol um den Winkel ϕ entfernt angenommen haben, erhalten

$$a-x = \frac{aa\cos\phi}{\sqrt{(aa\cos\phi.\cos\phi + bb\sin\phi.\sin\phi)}}$$

und $y = \frac{bb\sin\phi}{\sqrt{(aa\cos\phi.\cos\phi + bb\sin\phi.\sin\phi)}}.$

Und eine jede aus der Beobachtung geſchloſſene Entfernung des Monds von dem Nordpol, oder ein jeder Winkel ψ würde uns alsdann dieſe Gleichung geben

$$\tan\psi = \frac{h\sqrt{(aa\cos\phi.\cos\phi + bb\sin\phi.\sin\phi)} - bb\sin\phi}{(g+a)\sqrt{(aa\cos\phi.\cos\phi + bb\sin\phi.\sin\phi)} - aa\cos\phi.}$$

Zwey zu gleicher Zeit auf einem Mittagskreiſe gemachte Beobachtungen werden aber wiederum die Werthe von $g+a$ und h geben, und die Formul $\sqrt{((g+a)^2+h^2)}$ wird alsdann die Entfernung des Monds von dem Mittelpuncte der Erde beſtimmen. Wollte man endlich noch eine dritte Beobachtung zur Hülfe nehmen, ſo könnte man auch ſogar im Stande ſeyn, die Verhältniß $a:b$ das iſt die Gattung der Ellipſis zu beſtimmen.

6. Um dieſe Beſtimmungen zu erleichtern und die gegebene Gleichung kürzer zu faſſen, kann cot. $\phi = m$: tang. $\psi = n$; $b = va$: $g + a = ra$ und $h = sa$ geſetzt werden: Es wird aber alsdenn eine jegliche Beobachtung eine dergleichen Gleichung geben $n = \frac{s\sqrt{(mm + vv)} - vv}{r\sqrt{(mm + vv)} - m}$: aus deren dreyen hernach die Werthe der unbekannten Größen r, s, und v beſtimmet werden müſſen.

Prüfung.

Man nehme den Ort des Mondes für bekannt an, und ſetze $r = 10$; $s = 60$ oder $g = 9a$: $h = 60a$, wo nämlich a die halbe Axe der Erde andeutet. Man nehme auch die Figur der Erde als bekannt an, und ſetze

1. Die Erde wäre eine vollkommene Kugel deren Halbmeſſer alſo $= a$ iſt. Man berechne nach der gegebenen Formul die mittägliche Höhe des Monds für drey verſchiedene Oerter eines und eben deſſelben Mittagskreiſes, und es ſeyen die Entfernungen dieſer Oerter von dem Nordpol 30°, 80° und 120°, oder ihre Polhöhen 60°, 10° nördlich und 30° ſüdlich: ſo wird für die Entfernung des Orts von dem Nordpol, oder für den Winkel $\phi =$

30°. 80°. 120°.

Die ſcheinbare Entfernung des Monds von dem Nordpol, oder der Winkel $\psi =$

81°.. 16′.. 21″. 80°.. 32′.. 48″. 79°.. 55′.. 54″

Folglich die mittägliche Höhe des Monds $90° + \phi - \psi$.

38°.. 43′.. 39″. ſüdlich 89°.. 27′.. 12″ ſüdlich. 49°.. 55′.. 54″ nördlich.

2. Wenn wir aber nach den Ausmeſſungen der Pariſerakademie annehmen, die Erde wäre eine Spheroide, deren Durchmeſſer um den 200ſten Theil größer iſt als die Axe; oder wenn wir

ſetzen $b = 1\frac{1}{200}a$, ſo werden wir durch unſere Formul folgende mittägliche Mondshöhen heraus bringen.

Für die Entfernung des Orts von dem Nordpol, oder für den Winkel $\phi =$
30°. 80°. 120°.
Die ſcheinbare Entfernung des Monds von dieſem Nordpol, oder der Winkel $\psi =$
81°.. 16′.. 12″. 80°.. 32′.. 42″. 79°.. 55′.. 57″.
Folglich die mittägliche Höhe des Monds $90° + \phi - \psi$.
38°.. 43′.. 48″ ſüdlich 89°.. 23′.. 18″ ſüdlich 49°.. 55′.. 57″ nördlich.

3. Endlich wenn wir die zwey erſtere mittägliche Höhen des Monds, ſo wie wir dieſelben in der erſten Vorausſetzung gefunden haben, als wirkliche Beobachtungen betrachten, und überdem für die Figur der Erde annehmen $b = 1\frac{1}{200}a$; alſo daß $v = 1,05$ ſo werden wir erhalten

Erſtlich für den Ort des Mondes $r = \frac{109270}{10959} = 9,9708$

und $s = \frac{656708}{10959} = 59,9240$

zweytens für den dritten Ort, deſſen Breite 30° ſüdlich iſt, die ſcheinbare Entfernung des Monds von dem Pol, oder den Winkel $\psi = 79°.. 56′\ 2′$, folglich die Höhe des Monds von Norden an gerechnet = 49°.. 56′.. 2″.

Schluß.

Aus dieſer Prüfung erhellet ganz deutlich, in wie weit man ſich auf diejenige Beſtimmung der Figur der Erde verlaſſen könne, welche durch die Beobachtungen des Monds heraus gebracht werden kann, und wie genau dieſe Beobachtungen angeſtellt werden müßten, wenn man ſicher ſeyn wollte, daß jene Beſtimmung von der Wahrheit nicht gar zu beträchtlich abwiche. Denn ſo günſtig wir auch zu unſerm Vorhaben die Oerter der drey angeführten obgleich erdichteten Beobachter erwählet hatten, ſo ſehen wir nunmehro dennoch, daß um die wahre Figur der Erde, aus derſelben Beobachtungen zu ſchließen, nothwendig erfordert werde, daß man von dieſen Beobachtungen bis auf eine Secunde gewiß ſey: in wie weit dieſes aber möglich ſey, mögen geübte Beobachter urtheilen. Indeſſen könnte allemal eine große Menge von Beobachtungen dieſen Mangel der Genauigkeit erſetzen, und wenn ſich dermaleins drey oder mehrere Beobachter auf einem und eben demſelben Mittagskreiſe befinden ſollten, ſo möchte der gegenwärtige Entwurf nicht gänzlich ohne Nutzen ausgeführet werden können. Um dieſer Urſachen willen werde ich mich auch nicht abſchröcken laſſen, die verſprochene Auflöſung der zweyten Aufgabe beyzuſetzen; in welcher nämlich noch kürzlich gezeigt werden ſoll, wie die Figur der Erde unmittelbar aus den beobachteten mittäglichen Höhen des Monds beſtimmet werden kann.

Letzte Aufgabe.

Die mittägliche Höhe des Monds iſt an vielen auf einem und eben demſelben Mittagskreiſe gelegenen Oertern zu gleichen Zeiten beobachtet worden; man ſoll die Figur der Erde beſtimmen.

Auflöſung.

Ich ſetze hier vor allen Dingen voraus, daß die Polhöhe oder Breite eines jeden Orts bekannt iſt; oder, welches auf eins heraus kömmt, daß man für einen jeden Ort den Winkel ϕ, welcher die Entfernung des Pols von dem Zenith andeutet, weis. Da nun auch für einen jeden dieſer Oerter der Winkel ψ oder die Entfernung des Monds von demſelben Pol aus der Beobachtung geſchloſſen wird; ſo kann eine aufmerkſame Vergleichung dieſer beyden Werthen von ϕ und ψ paarweis genommen, leicht zeigen, wie dieſer Winkel ψ von jenem ϕ abhänge: das iſt, man wird nicht ohne große Mühe diejenige Gleichung errathen können, welche auf eine allgemeine Art zwiſchen dieſen beyden Winkeln ψ und ϕ Statt finden müßte; zumal da die Figur der Erde ſchon einigermaßen bekannt iſt. Ich nehme alſo dieſe erwehnte Gleichung als bekannt an. Es ſey nun Y derjenige Ort, deſſen Zenith von dem Nordpol um den Winkel ϕ entfernt iſt, und man ſetze für dieſen Ort Y, die Coordinaten $BX = x$; $XY = y$. Man verlangt alſo eine Gleichung zwiſchen x und y. Da $\frac{dx}{dy} = \operatorname{tang} \phi$: $\operatorname{tang} \psi = \frac{h-y}{g+x}$: ſo wird aus dieſer $y = h - (g+x) \operatorname{tang} \psi$: folglich $dy = -dx \operatorname{tang} \psi - \frac{(g+x)\,d\psi}{\cos\psi^2}$, und weil aus jener Gleichung

$dy = \frac{dx}{\operatorname{tang}\phi}$; ſo wird

$$\frac{dx}{g+x} = \frac{-d\psi \operatorname{tang}\phi}{\cos\psi^2\,(1 + \operatorname{tang}\phi.\operatorname{tang}\psi)} = \frac{-d\psi \sin\phi}{\cos\psi.\cos(\psi-\phi)} \text{ ſeyn.}$$

Man bringe nun den Winkel ω, der $= \psi - \phi$ iſt, in die Rechnung, ſo wird, da ψ durch ϕ bekannt iſt, auch ψ durch ω beſtimmet werden können. Man wird alſo eine Gleichung zwiſchen ψ und ω erhalten. Es iſt aber, wenn wir $\psi - \phi = \omega$ und $\phi = \psi - \omega$ ſetzen

$$\frac{dx}{g+x} = \frac{-d\psi \sin(\psi-\omega)}{\cos\psi \cos\omega} = \frac{-d\psi \sin\psi}{\cos\psi} + \frac{d\psi \sin\omega}{\cos\omega}$$

Folglich $l(g+x) = l\cos\psi + \int\frac{d\psi \sin\omega}{\cos\omega} + lC$

Da nun allemal $\int\frac{d\psi \sin\omega}{\cos\omega}$ durch die bekannte Gleichung zwiſchen

ψ und ω

ψ und ω gefunden werden kann, ſo ſey $\int \frac{d\psi \sin\omega}{\cos\omega} = l\bumpeq$: und wir werden erhalten $l(g+x) = l\cos\psi + l\bumpeq + lC$ das iſt $g+x = C\bumpeq \cos\psi$: Folglich da $y = h - (g+x) \tan\psi$, ſo werden die geſuchte Werthe der Coordinaten x und y ſeyn
$x = -g + C\bumpeq \cos\psi$; $y = h - C\bumpeq \sin\psi$.

Zu einer noch größern Bequemlichkeit wollen wir die Coordinaten des Orts Y von dem Ort ☾ des Monds an rechnen, und alſo ſetzen ☾$V = h - y = Y$; $VY = g + x = X$; und wir werden erhalten $X = C\bumpeq \cos\psi$; $Y = C\bumpeq \sin\psi$, folglich $\cos\psi = \frac{X}{C\bumpeq}$; $\sin\psi = \frac{Y}{C\bumpeq}$. Man ſetze ferner die Entfernung des Monds von dem Orte Y oder die grade Linie Y☾ $= Z$; ſo wird $ZZ = XX + YY$ folglich $Z = C\bumpeq$. Da nun der Werth von $\bumpeq$ durch ψ beſtimmet wird, da nämlich $l\bumpeq = \int \frac{d\psi \sin\omega}{\cos\omega}$, und $\cos\psi = \frac{X}{Z}$ und $\sin\psi = \frac{Y}{Z}$ iſt, ſo kann derſelbe Werth vor $\bumpeq$ auch durch die Coordinaten X, Y, und $Z = \sqrt{(XX + YY)}$ beſtimmet werden. Die Gleichung $Z = C\bumpeq$ wird aber alsdenn nur eine Gleichung zwiſchen X und Y ſeyn, durch welche wir folglich die geſuchte Figur des Mittagskreiſes, und hiemit auch die Figur der ganzen Erde erkennen werden.

Exempel.

Laßt uns ſetzen, die Beobachtungen des Monds hätten uns auf folgende Gleichung zwiſchen den Winkeln ψ und ϕ gebracht $\sin(\psi - \phi) = n \sin(\psi - \alpha)$, und welche uns hernach, da $\psi - \phi = \omega$ iſt, dieſe Gleichung $\sin\omega = n \sin(\psi - \alpha)$ gegeben. Es deutet aber wie bewußt ψ den Winkel VY☾ oder die Entfernung des Monds von dem Nordpol, und ω den Winkel ZY☾ oder die Entfernung des Monds von dem Zenith an.

Da nun $\cos\omega = \surd(1 - nn \sin(\psi - \alpha)^2) = \surd(1 - nn + nn \cos(\psi - \alpha)^2)$, ſo wird $l\bumpeq = \int \frac{nd\psi \sin(\psi - \alpha)}{\surd(1 - nn + (nn\cos(\psi - \alpha)^2)}$ folglich

$$l\bumpeq = l(\surd(1 - nn + nn\cos(\psi - \alpha)^2) - n\cos(\psi - \alpha))$$

und $\bumpeq = \surd(1 - nn + nn\cos(\psi - \alpha)^2) - n\cos(\psi - \alpha)$. Es iſt aber $\bumpeq = \frac{Z}{C}$, alſo auch

$$\surd(1 - nn + nn\cos(\psi - \alpha)^2) - n\cos(\psi - \alpha) = \frac{Z}{C}$$ oder

$$\surd(1 - nn\sin(\psi - \alpha)^2) - n\cos(\psi - \alpha) = \frac{Z}{C};$$

$$\surd(1 - nn\sin(\psi - \alpha)^2) = \frac{Z}{C} + n\cos(\psi - \alpha).$$

Und nachdem das Wurzelzeichen weggebracht worden iſt

$$\frac{ZZ}{CC} + \frac{2nZ}{C}\cos(\psi - \alpha) = 1 - nn$$

Weil nun $\cos(\psi - \alpha) = \cos\psi.\cos\alpha + \sin\phi.\sin\alpha = \frac{X\cos\alpha + Y\sin\alpha}{Z}$; und $ZZ = XX + YY$, ſo wird

$XX + YY + 2nC(X\cos\alpha + Y\sin\alpha) = (1 - nn)\,CC$ und welche die geſuchte Gleichung für die Figur des Mittagskreiſes iſt. Man ſchreibe $-a$ für die beſtändige Größe C, welche, da ſie durch die Integration in der Rechnung gekommen iſt, gänzlich von unſerer Willkuhr abhängt. So wird $XX + YY - 2na(X\cos\alpha + Y\sin\alpha) = (1 - nn)aa$; folglich

$$(X - na\cos\alpha)^2 + (na\sin\alpha - Y)^2 = aa.$$

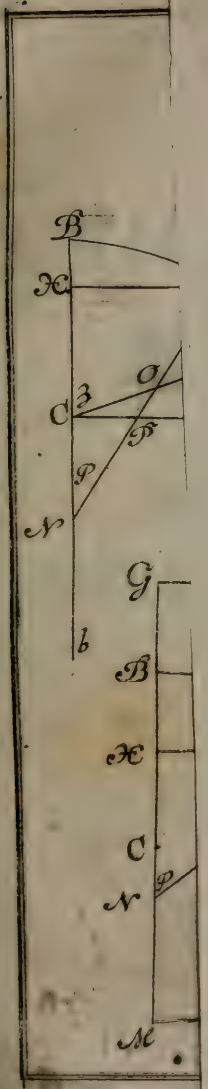
Hieraus erhellet nun, daß die Figur des Mittagskreiſes BYN eine Zirkellinie iſt, deſſen Halbmeſſer $= a$ iſt. Es ſey C der

Mittelpunct dieſer Zirkellinie und CB $= a$ deſſelben Halbmeſſer; ſo muß (weil $CX^2 + XY^2 = aa$;) $na \cos\alpha$ die Entfernung GC und $na \sin\alpha$ die Entfernung ☾G geben; der Buchſtaben α drückt folglich den Winkel GC☾ und na die Entfernung C☾ des Monds von dem Mittelpunct der Erde aus. Weil nun dieſer Winkel α und dieſe Zahl n durch die Gleichung $\sin\omega = n \sin(\psi - \alpha)$ erkannt worden, ſo nehme man den Halbmeſſer der Erde a nach Belieben an, und mache ☾G $= na \sin\alpha$ und GC $= na \cos\alpha$; ſo wird der Punct C das Mittelpunct der Erde in Anſehung des Monds geben, BM $= 2a$ aber wird deſſelben Axe ſeyn. Und auf dieſe Weiſe werden alsdann die Erſcheinungen des Monds auf dem Mittagskreiſe BYM denen Beobachtungen und der daraus geleiteten Gleichung $\sin\omega = n \sin(\psi - \alpha)$ vollkommen gemäß ſeyn; $\psi - \alpha$ aber deutet hier die Parallel der Höhe an.

Schluß.

Dieſes Exempel iſt hinreichend, um daraus zu erkennen, wie die angezeigte Methode, die Figur der Erde zu beſtimmen, angewandt werden müſſe. Und es erhellet auch zugleich, daß dieſe Aufgabe an und für ſich ſelbſten unbeſtimmt ſey. Denn wie auch immer diejenige Figur des Mittagskreiſes beſchaffen ſeyn mag, welche der Gleichung zwiſchen ψ und ϕ ein Genügen leiſtet; ſo wird eine jegliche andere Figur, ſo jener ähnlich iſt, und auch in Anſehung des Mondes eine ähnliche Lage hat, derſelben Gleichung gleichfalls ein Genüge leiſten. Wenn man nur dieſes dabey beobachtet, daß die Axe der Erde oder die Richtung ihrer beyden Polen auf die gerade Linie ☾G, welche durch den Mittelpunct des Monds nach Belieben gezogen wird, ſenkrecht ſtehe.

Schließlich ſieht man leicht ein, daß dieſe Methode die Figur der Erde zu beſtimmen, größtentheils nur deswegen unſicher, und derjenigen hintan zu ſetzen ſey, deren ſich die Pariſerakademie bedienet hatte, weil die Entfernung des Mondes in Anſehung der Axe der Erde ſehr groß iſt. Denn wenn der Mond der Erde weit näher wäre, oder wenn ſich in der Nähe des Erdballs ein anderer Körper befände, den man dennoch an allen Orten eines Mittagskreiſes ſehen könnte, ſo würde die hier angezeigte Methode, die Figur der Erde zu beſtimmen, die allerſicherſte und gewiß weit bequemer ſeyn, als diejenige iſt, welche ſich auf die Ausmeſſung der verſchiedenen Graden durch Dreyecke gründet. Die Beſtimmung des Halbmeſſers der Erde würde aber, ſobald die Figur deſſen bekannt iſt, von wenig Erheblichkeit ſeyn.


B
H
O
3
C
F
P
N
b
G
B
H
C
P
N
M

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

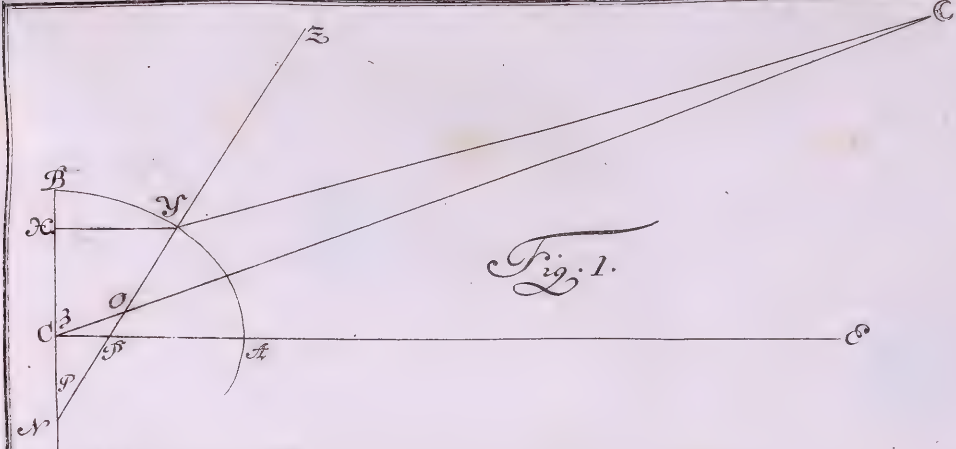

Z
☾
B
Y
H
O
z
C
F
A
E
φ
N
b

Fig. 1.

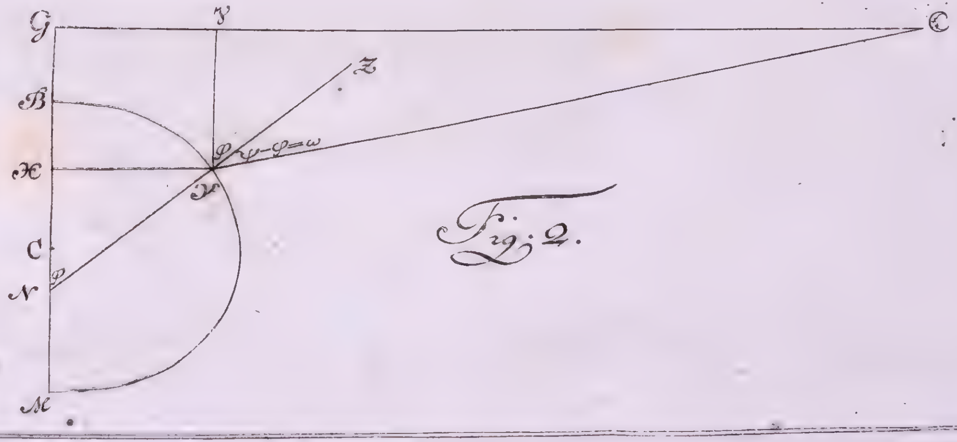

G
y
☾
Z
B
φ
ψ−φ=ω
H
Y
C
φ
N
M

Fig. 2.

J. Albrecht Eulers
Nachricht
von einer
beſondern magnetiſchen
Sonnenuhr.

Die Sonnenuhr, von welcher ich hiermit der erlauchten Akademie der Wiſſenſchaften eine Nachricht und Beſchreibung mitzutheilen die Ehre habe, iſt mir bey Gelegenheit eines hier durchreiſenden Herrn gezeiget, und von dem geſchickten Künſtler Herrn Stegmann in Caſſel verfertiget worden.

Dieſes Inſtrument wird in der erſten Figur vorgeſtellt, wo KLMN die Büchſe iſt, in welcher ſich die Magnetnadel POQ befindet, die, wenn das Inſtrument recht geſtellet worden, auf der darinn gezeichneten Stundenlinie FEG die Stunde des Tages anzeiget.

Um das Inſtrument aber richtig zu ſtellen, muß folgendes beobachtet werden.

I. Befindet ſich auf der Mittagslinie EC die auf einer Regel bis in A verlängert iſt, an dem äußerſten Ende A ein aufrechtſtehender Steft AB und zugleich eine im Horizonte bewegliche Regel AD, mit einer darauf gezogenen graden Linie AD, welche gegen den aus A beſchriebenen und in ſeine Grade eingetheilten Zirkelbogen ſo geſtellt werden muß, daß der Winkel CAD der Abweichung der Magnetnadel gleich werde.

II. Wird das ganze Inſtrument dergeſtalt auf eine Horizontalfläche geſtellt, daß bey Sonnenſchein der Schatten des Stefts AB genau auf die Linie AD zu fallen komme, und alsdann wird die Magnetnadel QOP auf der Stundenlinie FEG die wahre Tagesſtunde anzeigen; wenn nur vorher der Steft in O, worauf die Magnetnadel ruhet, und der auf der Linie CE beweglich iſt, recht geſtellt worden.

III. Es befindet ſich nämlich auf der Linie CE eine Rinne TV, in welcher der Steft O hin und wieder geſchoben werden kann, wobey die Monate bemerket ſind, nach welcher der Steft O jederzeit geſtellt werden muß, daher es dann geſchieht, daß zu verſchiedenen Jahrszeiten die Magnetnadel QOP mit ihrem nördlichen Ende P bald über die Stundenlinie FEG herausgehet, bald kaum dahin reichet. Es iſt auch für ſich klar, daß dieſes Inſtrument jederzeit genau horizontal geſtellt werden muß, da denn der Steft AB ſenkrecht zu ſtehen kommt.

IV. Endlich iſt auch nicht zu vergeſſen, daß dieſe Sonnenuhr nur auf eine gewiſſe Polhöhe eingerichtet iſt, und nicht zugleich für verſchiedene gelten kann. Diejenige, ſo ich geſehen, iſt nur für die Polhöhe von Königsberg in Preußen gemacht; die in der erſten Figur hingegen abgezeichnete Sonnenuhre für die Polhöhe von 52° 30′ eingerichtet worden.

So eingeſchränkt aber auch der Gebrauch dieſer Sonnenuhr iſt, ſo verdienen doch die Umſtände, die bey Verfertigung derſelben in Acht genommen werden müſſen, in Betrachtung gezogen zu werden, welches aus folgenden Anmerkungen deutlicher erhellen wird.

1. Da dieſe Uhr des Mittags XII Uhr anzeiget, und alſo die Magnetnadel QOP auf der Linie OE ſtehen muß, indem der

Schatten des Stefts AB auf die Linie AD fällt, ſo iſt AD alsdann die wahre Mittagslinie, woraus erhellt, daß die grade Linie ACE, worauf die Magnetnadel zu liegen kommt, von der Mittagslinie juſt um die Declination der Magnetnadel abweichen müſſe. Wenn dahero die Linie von Süden gegen Norden geſtellt wird, ſo muß der Winkel CAD der Abweichung der Magnetnadel gleich ſeyn. Da nun hier zu Land dieſe Abweichung ohngefähr 15 Grad gegen Weſten beträgt, ſo muß der Winkel CAD von 15 Graden ſeyn, und um ſo viel Grade muß die Regel AD von der Linie AC von Norden gegen Oſten geſtellt werden, zu welchem Ende der aus dem Mittelpunct A beſchriebene Zirkelbogen RCS in ſeine Grade eingetheilt iſt. Auf dem Inſtrument, ſo ich geſehen, geht dieſe Eintheilung nur auf einer Seite von C gegen S Oſtwärts, wann nämlich AC gegen Norden gekehret wird; ohne Zweifel weil öſtliche Declinationen hier zu Land nirgend Statt finden.

2. Hieraus ergiebt ſich nun der Grund, warum beſagter maſſen die bewegliche Regel AD genau nach der Declination der Magnetnadel geſtellt werden muß, ſo lange ſich die magnetiſche Abweichung nicht merklich verändert; damit aber auch alsdann, ſowohl Vor- als Nachmittags die Magnetnadel auf der Stundenlinie die wahre Zeit anzeige, wenn das Inſtrument ſo geſtellt wird, daß der Schatten des Stefts AB auf die Linie AD fällt, ſo muß nicht nur für eine jegliche Declination der Sonne der Steft der Magnetnadel O in der Rinne TV beſonders geſtellt, ſondern die Stundenlinie FEG auch nach einem gewiſſen Geſetz gezogen und abgetheilet werden, als worauf der Hauptgrund der ganzen Einrichtung dieſes Inſtruments beruhet; wie ich im Folgenden deutlich lehren werde.

3. Da die Magnetnadel des Mittags auf die Linie OE zu ſtehen kömmt, ſo iſt klar, daß wenn dieſelbe Nachmittags in die

Stellung QOP kommt, wo ſie die Stunde richtig anzeigen ſoll, alsdann der Winkel EOP dem Azimuth der Sonnen gleich ſeyn müſſe, dergeſtallt, daß alsdann die Nachmittagsſtunden von E gegen Weſten, die Vormittagsſtunden aber gegen Oſten zu ſtehen kommen; und alſo die Ordnung der Stunden verkehret werden muß, als ſonſten auf den gewöhnlichen Horizontalſonnenuhren zu geſchehen pfleget.

4. Um nun zu finden, wie dieſe richtige Anzeigung der Stunden erhalten werden könne, ſo müſſen wir unſere Betrachtung auf die Bewegung der Sonne richten. Es ſey demnach (2 Fig.) Z das Zenith des gegebenen Orts, für welchen die Sonnenuhr verfertiget werden ſoll, HZR der Mittagskreis, in demſelben das Punct P der Pol und HR der Horizont; man nenne die Polhöhe $PR = p$; ſo iſt der Bogen $PZ = 90° - p$. Nun ſeyen ſeit Mittag n Stunden verfloſſen, und man ziehe den Bogen PS, ſo daß der Winkel ZPS 15mal n Graden bekomme, welcher der Stundenwinkel genannt wird. Man ſetze dieſen Winkel $ZPS = s$ alſo daß $s = 15n°$. Man nehme den Bogen PS von 90 Graden, ſo würde S der Ort der Sonne ſeyn, wann dieſelbe keine Declination hätte. Gegenwärtig aber ſey die Declination der Sonne $= q$ gegen Norden; und nachdem man den Bogen SP verlängert und $S\odot = q$ genommen, ſo wird jetzo das Punct $\odot$ den Ort der Sonne anzeigen. Dahin ziehe man den Verticalkreis $Z\odot$, ſo wird der Winkel $HZ\odot$ das gegenwärtige Azimuth der Sonne geben, welchem folglich in unſerm Inſtrument der Winkel EOP (1 Figur.) gleich ſeyn muß, wenn nämlich daſelbſt das Punct P die n Stunde Nachmittags anzeigen ſoll.

5. Wir wollen nun erſtlich den Fall betrachten, da die Sonne keine Declination hat, und ſich alſo in S befindet: alsdann ſoll (3 Fig.) O der Ort des Stefts der Magnetnadel ſeyn,

welche nun die angezeigte n Stunde Nachmittags durch ihre Lage ON in dem Punct N der Stundenlinie EN andeuten muß, ſo daß der Winkel EON dem Winkel HZS (2 Figur) gleich wird. Man nenne demnach die Weite $EO = a$ (3 Fig.) und die Linie $ON = z$, welche zugleich mit dem Winkel $EON = HZS$ die Natur der Stundenlinie EN ausdrücken wird. Laßt uns nun ferner ſetzen, daß für die gegebene Declination der Sonne $S\odot = q$, der Steft der Magnetnadel in o gerücket werden müſſe, und ſetze die Weite $Oo = v$; ſo muß für eben dieſelbe n Stunde der Winkel EoN dem Winkel HZ☉ gleich werden; dergeſtalt, daß der Winkel ONo (3 Fig.) dem Winkel SZ☉ (2 Fig.) gleich wird. Daher man dieſe Verhältniß bekommt $\sin ONo : Oo = \sin EoN : ON$, das iſt $\sin SZ\odot : v = \sin PZ\odot : Z$.

6. Nun aber iſt in dem ſphäriſchen Dreyeck PZS die Seite $PS = 90°$ die Seite $BZ = 90° - p$ und der Winkel $ZPS = s = 15n°$; daraus erhält man

$$\text{tang}\, HZS = \frac{\sin s}{\sin p . \cos s} = \text{tang}\, EON.$$

Wenn man alſo den Winkel $EON = HZS = \phi$ ſetzt, ſo wird $\text{tang}\,\phi = \frac{\text{tang}\, s}{\sin p}$; ferner da $\sin SZ\odot : \sin PZ\odot = \frac{\sin S\odot}{\sin ZS} : \frac{\sin P\odot}{\sin PZ}$

das iſt $\sin SZ\odot : \sin PZ\odot = \sin q . \cos p : \cos q . \sin ZS$

und $\sin ZS : \sin s = 1 : \sin\phi$

ſo wird $\sin SZ\odot : \sin PZ\odot = \sin q . \cos p : \frac{\cos q . \sin s}{\sin\phi}$

Folglich weil $\sin SZ\odot : \sin PZ\odot = v : z$

ſo erhält man $v : z = \text{tang}\, q : \frac{\sin s}{\cos p . \sin\phi}$.

7. Hier iſt nun dieſes hauptſächlich in Erwegung zu ziehen, daß die Weiten $Oo = v$ einig und allein von der Declination der Sonne q abhängen, dagegen aber die Linien $ON = z$ davon unabhängig ſeyn müſſen. Dahero ſetze ich $v = C\,\text{tang}\, q$, und dann

wird $z = \frac{C\sin s}{\cos p.\sin\phi}$. Um nun die beſtändige Größe C zu beſtimmen, ſo iſt zu merken, daß wenn der Stundenwinkel $s = o$, die Linie ON $= z$ der Linie OE $= a$ gleich werden müſſe. In dieſem Fall aber wird auch $\phi = o$, und alſo $\mathrm{tang}\phi = \sin\phi = \frac{\mathrm{tang}\, s}{\sin p} = \frac{\sin s}{\sin p}$; dahero bekömmt man für dieſen Fall $z = \frac{C\sin s.\sin p}{\cos p.\sin s} = C\,\mathrm{tang}\, p = a$: alſo daß $C = \frac{a}{\mathrm{tang}\, p}$ und folglich $v = \frac{a\,\mathrm{tang}\, q}{\mathrm{tang}\, p}$ und $z = \frac{a\sin s}{\sin p.\sin\phi}$. Da nun die Polhöhe p in dieſen beyden Ausdrücken vorkommt, ſo iſt klar, daß ein ſolches Inſtrument nur für eine gewiſſe Polhöhe eingerichtet werden kann.

8. Der erſtere dieſer Ausdrücke O$o = v = \frac{a\,\mathrm{tang}\, q}{\mathrm{tang}\, p}$ giebt nun zu erkennen, wie für eine jede Declination der Sonne der Steft der Magnetnadel gerücket werden muß.

Der andere aber ON $= z = \frac{a\sin s}{\sin p.\sin\phi}$ zeiget uns die wahre Figur der Stundenlinie EN nebſt ihrer Eintheilung.

Man laſſe zu dieſem Ende aus N auf OE die Perpendiculärlinie NX herunter fallen, und ſetze OX $= x$ und XN $= y$, ſo wird $x = z\cos\phi = \frac{a\sin s}{\sin p.\,\mathrm{tang}\phi}$ oder weil $\mathrm{tang}\phi = \frac{\mathrm{tang}\, s}{\sin p}$; $x = a\cos s$ und $y = z\sin\phi$ das iſt — — — — — — $y = \frac{a\sin s}{\sin p}$.

Man beſchreibe alſo aus dem Mittelpuncte O mit dem Halbmeſſer OE $= a$ die Zirkellinie EVK, und nehme darinn den Stundenwinkel EOV $= s$; ſo wird offenbar OX $= a\cos s$ und da XY $= a\sin s$, ſo wird XN $= y = \frac{XV}{\sin p}$: oder XV : XN $= \sin p : 1$ alſo daß die Stundenlinie EN eine Ellipſis ſeyn muß.

9. Für dieſe Ellipſis deren halbe Axe OE wir a genennet haben, iſt alſo der halbe Durchmeſſer = $\frac{a}{\sin p}$

der Parameter = $2a \sin p$ und

die halbe Entfernung der beyden Brennpuncten von einander, oder die Entfernung eines jeden Brennpuncts von dem Mittelpunct O = $\frac{a}{\mathrm{tang}\,p}$.

Wo p die Polhöhe desjenigen Orts andeutet, für welchen die magnetiſche Sonnenuhr verfertiget werden ſoll.

10. Die Verfertigung einer dergleichen magnetiſchen Sonnenuhre iſt folglich nunmehro keiner Schwierigkeit mehr unterworfen.

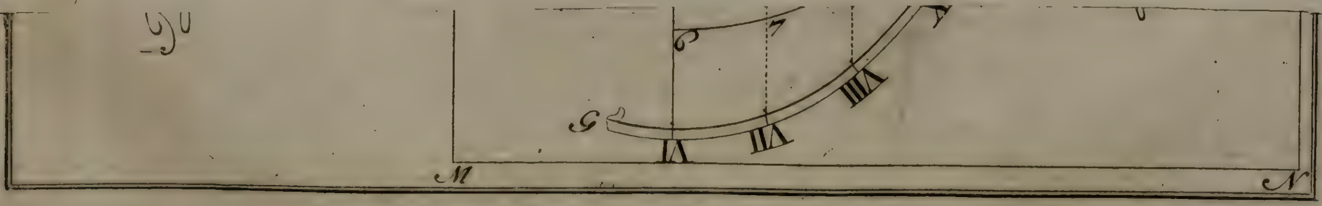
Man ziehe durch die Mitte der Kapſel KLNM (1 Fig.) die grade Linie CE, und nehme auf derſelben eine Entfernung OE an, welche etwa ein Drittel der Kapſellänge KL betragen kann; ſo wie die Figur es auszeiget. Durch O ziehe man die grade Linie VI. VI auf EC ſenkrecht, und beſchreibe aus dem Mittelpunct O mit dem Halbmeſſer OE die halbe Zirkellinie CEC. Man theile dieſen halben Kreis in 12 gleiche Theile, und ziehe die graden Linien 5, 7; 4, 8; 3, 9; 2, 10; und 1, 11.

Man reiße das rechtwinklichte Dreyeck eof auf, deſſen ein Winkel ofe der gegebenen Polhöhe und die dieſem Winkel gegenüberſtehende Seite eo der erſtbemeldten Entfernung OE gleich iſt. (4 Fig.) So wird die Seite $of = \frac{a}{\mathrm{tang}\,p}$ ſeyn. Auf der graden Linie VI—VI (1 Fig.) trage man zu beyden Seiten von O die gleichen Entfernungen $Of = Of$ der Seite $of = \frac{a}{\mathrm{tang}\,p}$ gleich hin; ſo werden f und f die beyden Brennpuncte der Ellipſis ſeyn, welche alſo, da ſie durch das Punct E gehen ſoll, leicht beſchrieben werden kann. Es ſey FEG die beſchriebene Ellipſis, welche alſo von den graden Linien 5—7; 4—8; 3—9 &c. in den Puncten V. IIII. III. II. I. XI. X. IX. VIII und VII. in ihre Stunden gehörig abgetheilet wird.

Was nun zweytens die Verfertigung der Rinne TV und ihre Eintheilung anbelangt, ſo ziehe man in dem ebenbemeldten rechtwinklichten Dreyeck *eof* (4 Fig.) durch die Ecke *f* die grade Linie TV auf *fo* ſenkrecht. Man trage ferner zu beyden Seiten der Seite *fo* die verſchiedenen Declinationen der Sonne auf: man mache nämlich den Winkel TO*f* = 23½°
den Winkel *tof* = der Declination der Sonne im Auguſtmonat
den Winkel *uof* = der Declination der Sonne im Septembermonat
den Winkel *fov* = der Declination der Sonne im Octobermonat
den Winkel *fow* = der Declination der Sonne im Novembermonat
den Winkel *fox* = der Declination der Sonne im Decembermonat
und wiederum den Winkel *fo*V = 23½°.

So werden die Puncte *s*, *t*, *u*, *v*, *w*, *x* der graden Linie TV die Oerter anzeigen, wo der Stift der Magnetnadel zu jeder Jahrszeit hingerückt werden muß; die Linie TV aber ſelbſten wird die Länge der ganzen Rinne geben, welche man derohalben ſammt ihrer Eintheilung auf dem Inſtrument dergeſtallt tragen muß, daß das Punct *f* genau auf dem Mittelpunct *o* zu ſtehen kommt.

Endlich muß die Länge der Magnetnadel ſo beſchaffen ſeyn, daß dieſelbe die Stundenlinie FEG zu allen Jahrszeiten zum wenigſten erreichet, oder ihre Länge muß der Entfernung V—IIII gleich ſeyn.

G
6
7
VI
VII
VIII
M
N

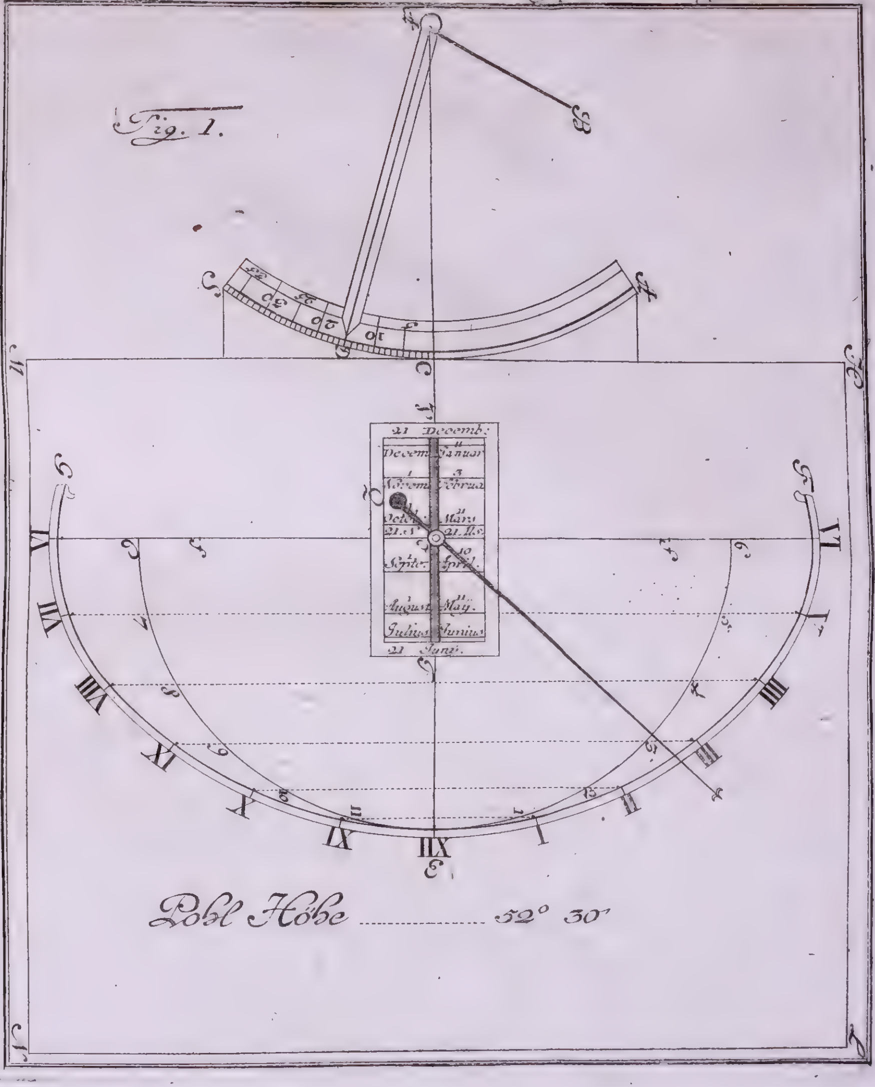


Fig. 1.
B
C
A
D
5
10
15
20
25
30
35
21 Decemb.
Decem.
Januar
Novem.
Februa
Octob.
Martii
21. S.
21. M.
Septe.
April.
August.
Maij.
Julius
Junius
21 Junii.
VI
VII
VIII
IX
X
XI
XII
I
II
III
IIII
V
VI
6
7
8
9
10
11
1
2
3
4
5
6
E
Pohl Höhe .... 52° 30′

1. Ju
1. Aug.

1. Sept

21. Septe
1. Octob

1. Noven

1. Decen

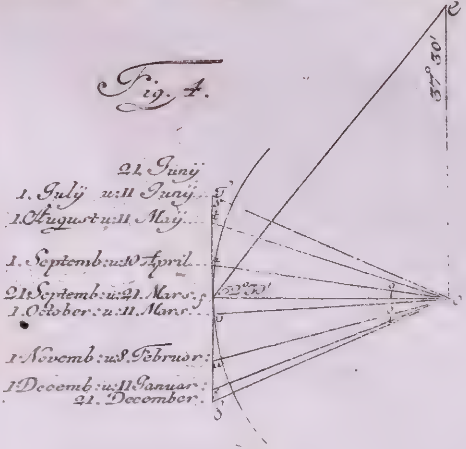


Fig. 4.
e
37° 30'
21. Junij
1. Julij u:11 Junij
1. August u:11 Maij
1. Septemb: u:10 April
21 Septemb: u:21 Mars
1. October: u:11 Mars
1. Novemb: u:8 Februar
1 Decemb: u:11 Januar
21. December
52° 30'

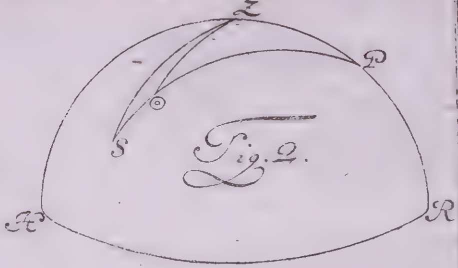


Fig. 2.

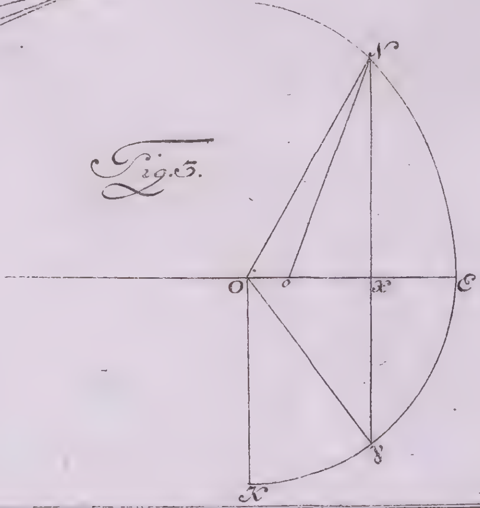


Fig. 3.

Verſuch
einer
Abhandlung
von
Scheidung und Aufbereitung
geringhaltiger Aerze bey Bergwerken

aufgeſetzt
von
Karl Auguſt Scheidt
den 4 Julii 1765.

Von der Nothwendigkeit und dem Nutzen, geringhaltige Aerze zu ſcheiden und aufzubereiten.

Geringhaltige, oder an Metal arme Aerze ſind bey Bergwerken eine bekannte Sache, und welcher Gewerke, oder Bergmann ſollte ſie nicht kennen? da ſie bey Bergwerken allemal in größerer Menge, als an Gehalte reichere und derbere Aerze vorfallen. Wenn der Bergmann nur dieſe nehmen, und jene verachten wollte, würde er niemals, oder zum wenigſten ſehr ſchwer bey ſeinem Baue fortkommen, er würde eher aus dem Felde gehen müſſen, als er Anfangs vermuthet hätte. Nein! die Bergleute ſind zu gute Wirthe, als daß ſie das Geringe verachten ſollten; die es nicht ſind, ſollten es doch ſeyn; denn gute Wirthſchaft auch in dieſen Dingen bringt Nutzen.

Man trachtet zwar bey dem Bergbaue meiſtentheils nach reichen Aerzen: ſie fallen beſſer in die Augen, und füllen den Beutel geſchwinder; allein das edelſte im Reiche der Natur, nach menſchlichen Begriffen und Meynungen, iſt immer ſeltener, als das unedlere und geringere; beydes iſt immer in natürlichen Körpern miteinander verbunden. Reiche und geringe Aerze ſind öfters ſo miteinander vereiniget, daß keine Gränze zwiſchen ihnen angegeben werden kann; das ſonſt geübte Auge eines Aerzſcheiders muß ſie aufs höchſte nur nach einem Ungefähr bemerken, und mit dem Scheidehammer in der Hand beſtimmen.

Wir müſſen alſo denen Bergleuten die Freyheit laſſen, daß wenn die reichen Aerze gewonnen werden ſollen, ſie auch die ärmern zugleich mit bearbeiten mögen, und der letztern wegen weder Schlägel noch Eiſen ſchonen dürfen. Wer Bergmann genug iſt, und Aerzſtuffen kennet, wird niemals dieſen Wahrheiten widerſprechen, ſo ſich auf den Augenſchein und Erfahrung gründen. Aus dem angeführten iſt alſo klar, daß die geringen Aerze gewonnen werden müſſen, wenn wir die reichen haben wollen. Sind die reichen Aerze ſeltener, als die geringen, und muß man dieſe mit jenen bearbeiten und gewinnen, ſo wird von den Gewinnerkoſten einem ſo viel als dem andern anzurechnen ſeyn, und das eine zum Schmelzfeuer ſo viel Recht als das andere haben, nur mit dem einzigen Unterſchiede, daß die reichen wegen ihrer Reinigkeit den Rang mit Recht von denen geringern behaupten, die geringen aber erſt gereiniget werden müſſen, ehe ſie dem Feuer mit Nutzen übergeben werden können. Ein reiches Aerz aber iſt dasjenige, an welchen wenig oder gar kein Berg und Geſtein zu finden iſt, ein armes Aerz aber wird das genennet, das nur körnigt und öfters ſehr zart in viel Berg und Geſteine eingeſprengt iſt, oder deutlicher zu reden: eine reiche Aerzſtuffe iſt die, ſo aus viel Aerz und wenig oder gar keinem Gebürge oder Geſtein beſtehet; eine arme aber, ſo mit viel Gebürge oder Geſtein und wenig Aerz gemiſcht iſt; da nun Aerz, das mit viel ſtrengen Gebürge und Geſtein gemiſcht iſt, im Schmelzen nicht ſo geſchwind und leichte zu fließen pfleget, als reiches und derbes, ſondern eine dicke nußige Schlacke giebt, welche den wahren Gehalt der Aerze niemals völlig aus ſich im Feuer nieder fallen läſſet; ſo leuchtet die Nothwendigkeit der Scheidung oder Auf- und Vorbereitung der armen Aerze Jedermann deutlich in die Augen.

Iſt dieſe Auf- oder Vorbereitung nöthig, ſo muß die beſte Art derſelben, ſo viel möglich, aufgeſucht werden.

Wir finden bey Bergwerken zwey Hauptvorbereitungen, Reinigungen, oder Scheidungen der Aerze von Berg und Geſtein, ehe ſie im Feuer mit Nutzen zu gute gemacht werden; die eine geſchiehet mit dem Poch- und Scheidehammer in der Hand, damit das geringe Aerz von dem reichen abzuſöndern; die andere durch Poch- und Waſchwerke vermittelſt zu geſchlagenen Waſſers; bey jener kommt es auf die Känntniß der derben reichen und geringen Aerze an, welche ein geübter Scheidepurſche zu unterſcheiden wiſſen muß. Ich finde hiebey weiter nichts zu erinnern, als daß diejenigen, ſo mit dem Scheiden der Aerze zu thun haben, aufmerkſam genug ſeyn, und nichts, was derb und rein, unter die geringen Aerze werfen ſollen, mit welchen es ſonſt durch die Pochwerke und Wäſchen gehen müßte; in dem erſten, würde es, weil es insgemein mürber, als das geringe iſt, bergmänniſch zu reden, zu todte gepocht werden, und auf denen Waſchherdten würde es in dem Herdtwaſſer aufſteigen, fortſchwimmen, und nichts zu erhalten ſeyn; die Arbeit würde nur dadurch ohne Noth vermehret werden, viel gutes reiches Aerz verloren gehen, und der Schaden für die Gewerkſchaft ſich verdoppeln.

Bey der Aufbereitung der geringen Aerze durch Poch- und Waſchwerke iſt die Sache weit wichtiger, und verdienet genauer im Folgenden betrachtet zu werden.

Von den zu Aufbereitung der geringen Aerze gehörigen Pochwerken.

Weil das Aerz öfters nur klar körnigt und zart in Berg und Geſteine eingeſprengt lieget, kann es mit dem Hammer nicht geſchieden werden; es ſind daher die Alten ſchon auf die Scheidung ſolcher Aerze durch Poch- und Waſchwerke gefallen, wovon ſonderlich Agricola de Re metallica verſchiedenes aufgezeichnet, welchen Löhneis, Rößler und die neuern Schriftſteller gefolget ſind.

Pochwerke ſind Maſchinen, die aus etlichen langen bücheneu viereckigten ſenkrecht zwiſchen Säulen, Querhölzern und Riegeln, ſo Laden genennet werden, ſtehenden, und unten mit ¾ Centner ſchweren Eiſen verſehenen Hölzern oder Stempeln beſtehen, in welchen Däumlinge oder hölzerne Arme ſind, die vermittelſt einer mit Hebeköpfen verſehenen Welle eines Waſſerrades gehoben werden, und hernach durch ihren Zurückfall die mit Aerz eingeſprengten Berge oder Geſtein in einen unter ihnen befindlichen, von hölzernen Bohlen gemachten Kumpfe, oder Kaſten zerſtoſſen und klar pochen, welches zerſtoſſene und klar gemachte Geſtein oder Berg der eine zu nächſt der einen Säule befindliche Stempel mit dem in den Kumpf geſchlagenen Waſſer durch ein in dieſelbe Säule gemachtes Loch, in dem er nach ſeinen geſchehenen Hube zurück fället, heraus in ein hölzernes Gerinne quetſchet, oder ſich bergmänniſch auszudrücken, das mit Pochhaufwerk vermiſchte Waſſer in die daran liegenden Gerinne oder Pochgräben austrägt. Dieſer ſonſt ſo nützlichen Maſchine Hauptfehler iſt die gar zu große Reibung ihrer Theile; dieſem Fehler einzuſehen, ehe auf deſſen Verbeſſerung gedacht werden kann, muß ich die Zeichnung eines bey Bergwerken gebräuchlichen dreyſtempeligten Pochwerks Fig. 1. liefern, wo

A. Das Waſſerrad iſt
B. Die Welle des Rades
C. Die Hebeköpfe
D. Ein Däumling oder Arm des Stempels.
E. Die Stempel.
F. Die Laden, zwiſchen welchen die Stempel aufgehoben werden, und wieder niederfallen.
G. Die Riegel, ſo die Laden zuſammen halten.
H. Die Säulen
I. Der Kumpf- oder Pochkaſten
K. Das Austrageloch.

Ich will nunmehr den Fehler dieſer Maſchine aufſuchen, und deutlich vor Augen legen.

Wenn das Rad A. mit ſeiner Welle B. durch aufgeſchlagenes Waſſer in Bewegung geſetzt wird, greifen die Hebeköpfe C. nach einander an die Däumlinge D. derer Stempel E. Hier gehet ſchon bey dem Hube jeden Stempels zwiſchen dem Hebekopfe und Däumlinge, da jener ſowohl, als dieſer bey 6 Zoll breit iſt, eine ſtarke Reibung vor, indem über 2½ Centner Laſt, ſo ein dergleichen Pochſtempel mit ſeinem Eiſen hat, gehoben werden muß; der Hebekopf, in dem er mit der Welle umgedrehet wird, und den Däumling des Stempels faſſet, ziehet ihn mit dem Stempel nach ſich zu, wodurch der Stempel mit Gewalt, ſowohl an das eine unterſte Ladenholz bey *a*, als das andere oberſte bey *b*, angedrückt wird, und ſich daſelbſt bey jedem Hube abermal und zu gleicher Zeit reibet, ſo, daß das Rad viel Kraft anwenden muß, dieſe dreyfache Reibung und Widerſtand zugleich mit der Laſt eines einzigen Stempels zu überwinden; da nun bey einem 6 ſtempligten Pochgezeuge, dergleichen man insgemein an einer Welle antrift, allezeit 4 Stempel zugleich gehoben werden, oder ihre Laſt vermittelſt der Däumlinge auf denen Hebeköpfen der Radewelle hänget; ſo iſt leicht zu erachten, daß der Widerſtand der Reibung ſehr beträchtlich bey dieſer Maſchine iſt, welchen zu überwinden, entweder viel Waſſer auf das Rad nöthig iſt, oder wo dieſes, ſonderlich in denen Gebürgen bey trockener Witterung fehlet, das Pochgezeug ſtille ſtehen muß, wodurch die Zeit verloren gehet, die Aerze nicht gepochet, noch aufbereitet, viel weniger hernach zum Schaden derer Gewerken zu gute gemacht werden können.

Dieſes iſt es, was mich bewogen, auf ein Mittel zu denken, wodurch dieſem großen Fehler gedachter Maſchine abgeholfen werden möchte.

Der ehmalige Profeſſor der Naturlehre Doctor Lehmann in Leipzig hat ſchon dieſe Maſchine ſeiner Betrachtung werth gehalten, und ſie durch angebrachte mittelbare Hebel zu verbeſſern geſucht, dadurch etwas Kraft zu erſparen; allein der Hauptfehler, die Reibung, iſt dadurch faſt mehr vermehret, als vermindert worden, daher auch ſeine Erfindung nirgends, meines Wiſſens, bey Pochwerken angebracht iſt; man hat ſich bisher lieber mit der alten Weiſe beholfen. Dieſer Gelehrte hat unter dem Titel: Vollkommene Beſchreibung einiger neuen Puchwerke ꝛc. ſeine Erfindung Anno 1716. in 4to zu Leipzig durch den Druck bekannt gemacht, welche hernach Anno 1749. mit beygefügter Zeichnung wieder aufgeleget worden.

Ich will es wagen, und hier einen neuen Vorſchlag thun, zu ſehen, ob ich glücklicher ſeyn werde, dieſen Fehler der Pochwerke, nämlich ihre große Reibung, wenigſtens zum Theil wegzuſchaffen. Es iſt nöthig, mein hiezu ausgedachtes Mittel, durch eine Zeichnung ſo kurz, als möglich, und zwar nur mit einem einzigen Stempel Fig. 2. vorzuſtellen; denn wie dieſer vorgeſtellet iſt, werden auch mehrere bey einem Pochwerke angebracht werden können.

A. Das Waſſerrad.
B. Die Welle.
C. Der Hebekopf.
L. Der unterſte Hebel.
M. Die dännene Stange mit Ketten oder Seilen.
N. Der oberſte Hebel.
O. Die Kette oder Seil, wodurch der oberſte Hebel mit dem Stempel verbunden iſt.
F. Die Ladenhölzer.
P. Die Schwelle, auf welcher der unterſte Hebel mit dem einen Arme liegt.

Das übrige alles außer dem Däumlinge, welcher wegfällt, iſt wie bey der 1 Fig.

Es iſt aus denen Geſetzen der Bewegung bekannt, daß wenn die Kraft nach einem rechten Winkel wirket, ſolche, einen Körper zu bewegen, mehr ausrichtet, als wenn ihre Wirkung nach einem ſpitzigen oder ſtumpfigen Winkel geſchiehet.

Hier bey meiner Erfindung in der 2 Figur geſchiehet die Bewegung bey 1. 2. 3. vermöge der Bogenſtücke der Hebel nach rechten Winkeln, und der Stempel wird weder bey ſeinem Hube, noch bey ſeinem Falle an die Laden gedrückt, folglich fällt das Reiben der Stempel zwiſchen denſelben weg: der oberſte Hebel N liegt im Gleichgewichte, und die Reibung in ſeinem Ruhepuncte iſt ſehr geringe. Der unterſte Hebel L beſtehet auch aus zwey gleich langen Armen; der Arm aber ohne Bogenſtücke, welchen der Hebekopf faſſet, muß ſo gemacht werden, daß er etwas ſchwerer als der andere iſt, damit wenn ihn der Hebekopf fahren läſſet,

ſet, er ſich in ſeine vorige Stellung zum folgenden Hube ſenke, und der Stempel hiezu bey ſeinem Falle keine Kraft anwenden dürfe.

Durch dieſe Einrichtung der Hebel wird der Hub der Stempellaſt erleichtert, und der Stempel wird in ſeinem Falle nirgends gehindert; denn der oberſte Hebel liegt im Gleichgewichte, und der unterſte begiebt ſich wegen der mehrern Schwere des Armes, welchen der Hebekopf faſſet, in ſeine vorige Stellung. Die wenige Schwere der dännenen Stange mit beyden kurzen Ketten, oder guten hänfenen Seilen, ſo von dem fallenden Stempel gehoben werden muß, hindert die Kraft des fallenden Stempels, der mit ſeinem Eiſenwerk über 2½ Centner hat, wenig, ſo daß dieſer Umſtand faſt keiner Betrachtung werth iſt, indem die Stange mit beyden Ketten kaum 6 bis 8 Pfund betragen kann. Was iſt dieſes gegen dem Fall einer Laſt von mehr als 2½ Centner. Der Stempel wird alſo leichter von dem Hebekopfe gehoben, dahero auch die Reibung des einen Armes des unterſten Hebels an den Hebekopfe geringer iſt, als die zwiſchen dem Hebekopfe C. und Däumlinge D. in der erſten Fig. Die Reibung der Hebel in ihren Ruhepuncten, oder Zapfen, gegen die Reibung des Stempels zwiſchen den Laden nach der alten Art iſt ebenfalls faſt vor nichts zu achten.

Dieſe heftige Reibung des Stempels zwiſchen denen Laden nach der 1 Fig. fället bey meiner Art nach der 2 Figur, wo er ſenkrecht gehoben wird, demnach weg, wodurch vieles Stempel- Laden- und Riegelholz das durch die ſtarke Reibung bey der alten Art ſich abnutzet, erſparet wird.

Die Spannung des oberſten und unterſten Hebels mit einer leichten dännenen Stange wird nach dem Aufſtehen des Stempels auf der Pochſohle in dem Kumpfe gerichtet; die Höhe des erforderlichen Hubes des Stempels aber muß die Einrichtung der Länge des Hebekopfes und der Arme der Hebel geben, welche willkührlich iſt, und Jedermann leicht nach ſeinem Gefallen machen kann.

Der eine ſchwerere Arm des unterſten Hebels nach der 2 Fig. liegt auf einer Schwelle P, welche nicht zuläſſet, daß er tiefer ſinken, und der Hebekopf ihn nicht faſſen könnte; wodurch auch zugleich das Einpochen des Stempels in die Pochſohle, wenn nicht allemal Stufwerk genug unter ihm liegt, vermieden wird; da es hingegen in dieſem Falle bey der alten Art ohne Verwüſtung und Zerbrechung des ganzen Pochgezeuges nicht leicht abgehet; bricht bey meiner Art ein Gelenk einer Kette, oder es bricht eine Stange, oder ein Hebel, ſo gehet der eine Theil der Maſchine, nach der Radewelle zu, ohne Hinderniß in ſeiner Bewegung fort, und der andere, nach denen Stempeln zu, ſtehet, ohne daß etwas weiter zerbrechen kann, ſtille.

Wenn man beyde Maſchinen Fig. 1. und 2. gegen einander berechnet, ohne auf ihre Reibung Bedacht zu nehmen, ſo iſt das Facit zwar einerley, als

Es ſey bey der 1 Fig. der halbe Durchmeſſer des Waſſerrades 5 Fuß, der halbe Durchmeſſer der Welle mit der Länge des Hebekopfes außer ihr 1½ Fuß lang, ſo wird ſich die Kraft zur Laſt verhalten wie 1½ zu 5, wenn nun die Laſt des Stempels mit dem Pocheiſen 250 Pf. iſt, ſo werden 75 Pf. Kraft dieſe Laſt in der Gleichwage erhalten; denn:

$$5 : 1\tfrac{1}{2} = 250 : X$$

$$X = \frac{1\tfrac{1}{2} \times 250}{5} = \frac{375}{5} = 75 \text{ Pf.}$$

Bey der 2 Figur ſey der halbe Durchmeſſer des Waſſerrades auch 5 Fuß, der eine Arm des unterſten Hebels 1 Fuß, der eine Arm des oberſten Hebels 1 Fuß; der halbe Durchmeſſer der Welle mit dem Hebekopfe außer ihr 1½ Fuß, der andere Arm des unterſten Hebels 1 Fuß, der andere Arm des oberſten Hebels 1 Fuß, ſo wird ſich die Kraft zur Laſt verhalten, wie 1½. zu 5., denn:

$$5 : 1\frac{1}{2} = 250 : X$$

$$X = \frac{1\frac{1}{2} \times 250}{5} = \frac{375}{5} = 75 \text{ Pf.}$$

Wenn man aber die Einrichtung und den Bau beyder Figuren mit ein wenig Aufmerkſamkeit betrachtet, ſo werden die Vortheile der zweyten vor der 1 Figur in Anſehung der verminderten Reibung, der längern Erhaltung des Stempel- Laden- und andern Holzwerkes, wie auch der leichtern und geſchwindern Bewegung deutlich in die Augen leuchten, und ich meinen Zweck: die Reibung dieſer Maſchine zu vermindern, erhalten haben.

Es findet ſich zwar in Leupolds großen Maſchinentheater im 1ſten Theile in dem 16 Cap. eine Beſchreibung, und auf der XXXI Tab. die Zeichnung einer Art, den Stempel ſenkrecht zu heben, und dadurch die allzugroße Reibung zu vermindern, allein der Stempel wird bey derſelben eben ſo gut an die Laden gedrückt, als bey Fig. 1. Die Verfertigung der Heber nach einer Schneckenlinie würde denen gemeinen Zimmerlingen bey Bergwerken nicht überall ſo leichte beyzubringen ſeyn, die Rollen, ſo ſich bey jeden Hube zu viel drehen müſſen, würden bald wandelbar, die Radewelle zu ſehr verlochet, und ihre haltbare Stärke dadurch geſchwächet werden.

Bey der Stellung und Richtung dieſer Maſchine, ob ſie das geringe Stufwerk grob, oder klar, oder nach der Bergſprache, röſche, oder zähe pochen ſoll, kommt es lediglich auf die in den Kumpf und auf das Rad zuſchlagenden Waſſer an; ſoll grob gepocht werden, ſo müſſen viel Waſſer auf das Rad und in den Kumpf geſchlagen werden; ſoll klar gepocht werden, ſo ſchlägt man wenig Waſſer auf das Rad und in den Kumpf.

Ob aber das geringe Stufwerk, ſo an manchen Bergorten auch Ausſchläge genennet wird, grob oder klar gepochet werden müſſe, wird aus der Größe der in das zu pochende Stufwerk eingeſprengten Aerztheile, ſo man Schlich nennet, geurtheilet: ſind die eingeſprengten Aerztheile zart und klein, ſo muß klar oder zähe gepocht werden, liegen ſie aber grob körnigt darinne, ſo wird das Stufwerk grob, oder röſche gepocht.

Alle Maſchinen die ein Stoßen oder Reiben verrichten, verwandeln und zerſetzen die zu zerſtoſſenden oder zu zerreibenden Körper in faſt unendlich ihrer Größe nach verſchiedene Theile, ſo, daß ihre Auseinanderſönderung oder Scheidung demjenigen ſehr ſchwer, ja faſt unmöglich fället, der ſie unternehmen ſoll; man hat daher bereits darauf gedacht, dieſe Theile, ſo viel möglich, von einander zu söndern, und zu dem Ende gewiſſe Gerinne, ſo man Pochgräben nennet, mit einigen fußtiefen Gruben, oder ſogenannten Sümpfen angelegt, wovon nunmehro im Folgenden gehandelt werden ſoll.

Von den Gerinnen oder Pochgräben, worinne ſich das geringe Pochhaufwerk zu Boden ſetzet.

In gegenwärtigem Falle, da Stufwerk von Geſtein und Gebürge gepochet werden ſoll, worinne Aerze klar und körnigt eingeſprengt liegen, muß auf ein ſchickliches und gutes Mittel gedacht werden, wodurch die in dem ausgetragenen Pochhaufwerke befindlichen, ihrer Größe nach ſo verſchiedenen Theile, ſo viel möglich, auseinander geſöndert werden; bisher hat man dergleichen Pochhaufwerk in gewiſſe in die Erde eingegrabene Gerinne von dännenen Bohlen, ſo Pochgräben genennet werden, laufen laſſen, in welchen ſich erſt das Grobe im Anfange ſolcher Gerinne, und hernach das immer Klärere und Klärere bis zu Ende derſelben aus dem Waſſer ab und zu Boden ſetzen ſollen; man hat auch Abtheilungen in dergleichen Gerinnen gemacht, und ſo viel Sorten ſich in Gedanken eingebildet, als willkührlich gemachte Abtheilungen in denen Gerinnen vorhanden geweſen; der vorgeſetzte Zweck aber iſt nicht recht erreichet worden, ſondern es haben ſich noch immer Theile in der erſten Abtheilung, ſo das Gefülle genennet wird, gefunden, die erſt in der andern, dritten, oder folgenden hätten niederſinken ſollen; überhaupt die Sortirung iſt in dieſen Gerinnen nicht hinlänglich geſchehen, weil ſie allemal zu enge und in keiner rechten Verhältniß zu der nöthigen Ausbreitung der mit Pochhaufwerk vermiſchten Waſſer angeleget worden; hierauf aber kommt es an, wenn die Sortirung gut von ſtatten gehen, und dadurch der folgenden Aerz- oder Schlichſcheidung von Berg und Stein auf denen Waſchherdten vorgearbeitet werden ſoll.

Nun ſind in einem gepochten oder zerriebenen Haufwerke nicht allemal nur Theile von verſchiedener Größe und Schwere von einerley Materie miteinander vermiſcht, ſondern es finden ſich auch vielmal Theile von ganz anderer Materie in eben demſelben Haufwerke, die an Größe und Schwere ſehr unterſchieden ſind; eben ſo iſt das Pochhaufwerk bey Bergwerken beſchaffen; will ich dieſes ordentlich auseinander ſöndern, und denen Waſchherdten vorarbeiten, ſo muß ich, ſo viel möglich, diejenigen Theile, ſo einander entweder an Größe oder an Schwere gleich ſind, zuſammen zu bringen ſuchen.

Man hat bey Bergwerken, wo dieſe Abſönderung der Aerze oder Schliche vom Berg und Geſtein ein ſehr wichtiger und nützlicher Gegenſtand iſt, auf vielerley Arten derſelben gedacht, und bis jetzo keine beſſere gefunden, als die, ſo durch Waſſer geſchiehet; ſie iſt auch in der That die natürlichſte, wenn ich bedenke, daß ſelbſt die Theile der verſchiedenen Erd- und Steinlagen unſeres Erdbodens durch Waſſer geſchieden, und auseinander geſöndert worden, und, wo ſie ſich hie und da mit Regen- und Fluthwaſſer zum Theil von neuem vermiſchen, ſolches, wenn das Waſſer ruhiger wird, noch zu geſchehen pfleget, wie die Erfahrung lehret.

Bis hieher bin ich mit denen Bergleuten einig; ob aber die bisher bey Pochwerken gebräuchlichen Pochgräben oder Gerinne ſo beſchaffen und angeleget ſind, daß damit der vorgeſetzte Zweck einer geſchickten Vorbereitung zu der darauf folgenden völligen Scheidung und Reinigung derer Schliche auf denen Waſchherdten erlanget werden könne, daran habe ich Urſache zu zweifeln.

Es fallen zwar die aus dem Kumpfe des Pochwerkes ausgetragenen und mit Pochhaufwerk vermiſchten Waſſer zuerſt in das gleich unter dem Austrageloche liegende Stückegerinne, ſo das Gefälle genennet wird; die Pochwerksleute machen es kurz, damit ſich nur die gröbern Pochwerkstheile des Pochhaufwerkes darinne ſetzen und ſammeln, die leichtern in die daran liegenden andern Gerinne fortſchwimmen, und ſich in deren Abtheilungen nach Art ihrer Größe und Schwere aus dem Waſſer abſetzen ſollen. Dieſe Vorrichtung thut auch etwas, und wenn man die wenigen Sorten Pochhaufwerk, ſo insgemein, wenn die Gerinne voll ſind, zu weiterer Scheidung vor die Waſchherdte ausgeſtochen werden, nicht genau beſiehet und beurtheilet, ſo zeiget ſich ein Unterſchied zwiſchen dieſen Sorten, ſo, daß das aus dem

Gefälle ausgeſtochene Pochhaufwerk das gröbſte und das andere in dem Gerinne abwärts folgende immer klärer und klärer ausſiehet; allein man mache es mit dieſen ausgeſtochenen Pochhaufwerksſorten ſo, wie ich es verſucht, laſſe jede derſelben beſonders in ein rundes Faß mit Waſſer einrühren, und wenn ſich das Haufwerk zu Boden geſetzt, das Waſſer abgegoſſen, und das Haufwerk in etwas trocken geworden, die Reiffen vom Faſſe abſchlagen, die Tauben gemach weg nehmen, ſo wird, wenn ein Schnitt mit einem langen Meſſer, oder mit einer eiſernen Schaufel von oben nach unten zu durch den Kuchen, oder das ſich geſetzte Haufwerk geſchiehet, ganz deutlich erhellen, daß am Boden erſt grobe hernach immer klärere und klärere Pochhaufwerkstheile nach der Ordnung ihrer Schwere und Größe bis an die Oberfläche des Haufwerks oder Kuchens in lauter horizontalen Flächen liegen, die in ihrer Gerinnabtheilung vorher alle untereinander gemiſcht waren, folglich mußte die Scheidung der Pochhaufwerkstheile in dem Stückegerinne, woher es genommen war, nicht, wie es der Endzweck erforderte, vorgegangen ſeyn. Die Pochwerksleute geſtehen dieſe Wahrheit auch ſelbſt dadurch ein, daß ſie die aus denen Pochgerinnen mit eiſernen Schaufeln ausgeſtochenen Sorten zum Theil wiederum durch kurze Gerinne, welche ſie Schlemm- und Durchlaßgräben nennen, abermal mit Waſſer ſchlemmen, durchlaſſen, und der folgenden Reinigung derſelben auf denen Waſchherdten dadurch vorarbeiten, daß ſie das Haufwerk wieder theilen, und aus einer noch mehrere Sorten machen; allein ſie richten damit faſt eben ſo wenig, als mit den Pochgerinnen aus, und ſind bey der folgenden Reinigung auf denen Waſchherdten wenig gebeſſert, ſonderlich wenn die Schlemmer und Durchlaſſer bey ihrer Arbeit nachläſig, oder unachtſam ſind, und alles wieder untereinander laufen laſſen, wie es vorher geweſen.

Dieſer weitläuftigen Arbeit entübriget zu ſeyn, iſt alſo nöthig, die Vorrichtung zur Scheidung des Pochhaufwerks gleich ſo zu machen, daß deſſen Theile, ſobald ſie mit dem Waſſer aus dem Kumpfe des Pochwerks zum Austrageloche heraus gequetſchet werden, im Fortfließen beſſer voneinander geſöndert, und in ſo viele Sorten, als nur möglich ſeyn will, getheilet werden, deren meiſte Theile zum wenigſten entweder an Größe, oder an Schwere einander faſt gleich ſind, ſo wird dergleichen alſo getheiltes Pochhaufwerk, ohne es erſt wieder zu ſchlemmen und durchzulaſſen, ſobald auf denen Waſchherdten mit leichterer Mühe und Arbeit verwaſchen, und die Aerzſchliche vom Berg und Geſteine gereiniget werden können.

Es kömmt bey der Scheidung und Sortirung des Pochhaufwerks hauptſächlich auch darauf mit an, daß auf eine geſchickte und leichte Art Aerz- und Bergtheile entweder von gleicher Schwere, aber ungleicher Größe, oder von gleicher Größe, aber ungleicher Schwere in ein Haufwerk zuſammen gebracht werden; ſind lauter Theile ſowohl von Aerz als Berg von gleicher Schwere aber ungleicher Größe beyſammen, ſo müſſen die Bergtheile größer ſeyn, als die Aerztheile, denn Aerz iſt ordentlicher Weiſe ſchwerer als Berg, iſt dieſes, ſo werden die Bergtheile dem von Herdte herabfließenden Waſſer mehr Fläche entgegen ſtellen, woran das Waſſer ſtößet, als die Aerztheile, folglich werden jene ſtärker vom Waſſer gefaſſet, auf dem ſchiefliegenden Herdte von denen Aerztheilen herabrollen, und von ihnen, indem ſie auf dem Herdte zurück bleiben, geſchieden werden, welches bey dem Verwaſchen auf denen Herdten die tägliche Erfahrung lehret.

Sind lauter Theile von Aerz und Berg von gleicher Größe, aber ungleicher Schwere beyſammen, ſo werden die Aerztheile ſchwerer, als die Bergtheile ſeyn, und die Bergtheile werden als leichtere von dem Waſſer vermittelſt einer ihm mit einem breiten kurzen Beſen von fichtenen Reißig gegebenen gelinden Bewegung gehoben und abgeſöndert werden, ſo daß die Aerztheile allein zurück bleiben müſſen. Man muß alſo auf Mittel denken, entweder lauter gleich ſchwere, oder lauter gleich große Aerz- und Bergtheile in ein Haufwerk zu bringen, wenn ſie durch Waſſer auf denen Waſchherdten voneinander geſöndert, und die Aerztheile, oder Schliche von denen Bergtheilen gereiniget werden ſollen; ſind aber die Bergtheile mit denen Aerztheilen von einerley Größe und Schwere zugleich, wie man Beyſpiele bey denen in Spath brechenden Aerzen hat, ſo muß vor dieſen Fall auf ganz andere Mittel gedacht werden, wie ſie vor dem Verwaſchen auf denen Herdten auf einen der beyden erſten Fälle können gebracht werden.

Ich will Mittel nur für den erſten Fall ſuchen, da Theile von gleicher Schwere zuſammen gebracht werden können; denn lauter gleich große Theile eines Haufwerks von andern ihrer Größe nach faſt unendlich verſchiedenen Theilen zu söndern, und ſie in ein beſonderes Haufwerk zu bringen, würde eine Arbeit ſeyn, mit der man niemals zu Ende kommen könnte, man möchte ſie nun ſieben, leſen, wurfeln, durchbeuteln, oder es mit ihnen machen, wie man wollte, ſo würde immer groß und klein untereinander bleiben; gleich ſchwere Theile aber laſſen ſich noch eher von andern leichtern durch flüßige Körper abſöndern. Man weis, daß die flüßigen Körper ſo beſchaffen ſind, daß ſich die feſten durch ſie hindurch bewegen können, und daß ſie ſich nach der ihnen eigenen Schwere aus jenem, wo ſie vorher vermiſcht und beweget worden, zu Boden ſetzen.

Der flüßige Körper, das Waſſer, iſt, wie oben erwehnet worden, von langen Zeiten her zu Scheidung des Pochhaufwerks, niemals aber auf die beſte Weiſe, gebraucht worden.

Man hat wohl geſehen, daß feſte Körper in dem Waſſer ſchwimmen, und von ihm auf eine gewiſſe Weite, ehe ſie aus ihm zu Boden ſinken, mit fortgeriſſen werden; man iſt auch gewahr worden, daß die gröbeſten und ſchwereſten zuerſt und nach und nach die immer leichtern aus einem bewegten Waſſer niedergeſunken, weßwegen Pochgerinne mit Gefälle, Abtheilungen und Sümpfen angeleget worden; man iſt aber damit von dem vorgeſetzten Zwecke noch immer zu weit entfernet geblieben. Ich will ſuchen, demſelben näher zu kommen, und eine neue Art der Sortirung des Pochhaufwerks, ſobald es aus dem Pochwerkskumpfe durch den Austrageſtempel heraus gequetſchet wird, angeben, wodurch denen Waſchherdten ohne Schlem- und Durchlaßgräben vorgearbeitet, auch ſogar das allzuviele Sumpf anlegen größten Theils entbehret werden kann.

Man weis, je weiter und breiter miteinander vermiſchte verſchiedene Dinge auseinander geſetzt werden können, je leichter geſchiehet ihre Auseinanderſönderung, dieſes zeiget ſich bey flüßigen und feſten Körpern, wenn ſie miteinander vermiſcht und die letztern ſchwerer, als jene, ſind. Eine Erfahrung ſoll die Sache klar machen:

Wenn man Waſſer aus einem im Anfange engen hernach ſich immer je mehr und mehr erweiternden Gerinne, das Wagerecht liegt, fortfließen läſſet, ſo wird es ſich nach der Geſtalt der Fläche des Bodens in dem Gerinne mit denen in ihm eingemiſchten Dingen ausbreiten, denn alle flüßige Körper nehmen, wenn ſie ruhig ſtehen, ſtäts eine mit dem Horizont parallele Lage an, wie ſelbſt das Beyſpiel aller Teiche und ſtehenden Waſſer uns hievon genugſam unterrichtet; je weiter das Waſſer ſich ausbreiten kann, je eher ſetzen ſich die mit ihm vermiſchten feſten Körper zu Boden.

Dieſes iſt es, was mich auf den Einfall gebracht, dem Geſchäfte der Natur nach zu gehen, und es auf die ausgetragenen mit Pochhaufwerk vermiſchten Waſſer anzuwenden.

Ich dachte der Sache nach, und lies ein kleines Gerüſte, ſo ich im Folgenden ein Stuffengerinne nennen werde, von dännenen Brettern zuſammen ſetzen, es war 16 Fuß lang, und konnte nur 8 Stuffen bekommen, weil mir der Platz vor dem Austrageloche des Pochwerks, an welches ich es legen wollte, und das Gefälle zu mehrern Stuffen fehlete; oben waren die Seitenbretter des Stuffengerinnes, wo es an das Austrageloch des Pochwerkes angeleget werden ſollte, nur 1½ Fuß und unten am Ende bis 8 Fuß voneinander; der erſten Stuffe gab ich 3 Fuß Breite, der 2. niederwärts folgenden 2¾ Fuß, der 3. 2½, der 4. 2¼, der 5. 2, der 6. 1½, der 7. 1, der 8. 1 Fuß.

Jede Stuffe lies ich 1½ Zoll tiefer, als ihre vorhergehende, Wagrecht legen; alle Stuffen wurden aus dem Mittelpuncte der obern engern Breite des Stuffengerinnes, als concentriſche Bogen beſchrieben, und wie das ganze Gerinne, ſo auch jede Stuffe über der andern von dännenen auf der obern Seite glatt gehobelten Brettern, ſo ohne Aeſte waren, mit hölzernen keilförmigen Riegeln auf einen hölzernen Gerüſte alſo befeſtiget, daß es leicht auseinander genommen, und nach Gefallen wieder zuſammen geſetzt, auch ſtatt der abgenutzten Stücken neue eingelegt werden konnten; mit der untern Stuffe aber lies ich es an einen Sumpf ſtoſſen, wie die 1 Fig. bey X. zeiget.

Meine Leſer fordern ohne Zweifel Rechenſchaft von dieſer Anlage, es iſt billig, daß ich ſie ihnen gebe: Oben bey dem Austrageloche iſt das mit Pochhaufwerk vermiſchte Waſſer noch in der Enge beyſammen, und kann ſich nicht ſogleich auf einmal aus=

ausbreiten, ſondern es geſchiehet dieſes vermöge des Baues des Stuffengerinnes nur nach und nach, daher iſt das Stuffengerinne oben enge und abwärts immer breiter und breiter gemacht worden, um ſich nach der Bewegung des Waſſers, welche nicht allein vorwärts, ſondern auch ſeitwärts auf einer Wagerecht liegenden Fläche geſchiehet, zu richten, welches Verſuch und Erfahrung beweiſen.

Die oberſte Stuffe am Austrageloche iſt vorwärts breiter, als die folgende, ſeitwärts aber nicht ſo breit, als ſie, weil da zum Niederſinken der gröbſten Pochhaufwerkstheile, die ſich als die mehreſten am geſchwindeſten häufen, Platz ſeyn muß.

Die folgenden Stuffen ſind vorwärts ſchmäler, je nach dem ſie ſeitwärts breiter ſind, damit beyläufig auf jeder ſich faſt gleich viel Pochhaufwerk aus denen Waſſern nach verſchiedener Kläre abſetzen möge, weil deren immer klärere und klärere auch immer abwärts weniger und weniger aus dem Waſſer niederfallen, welches ſich dadurch erweiſen läſſet, daß mehrere Zeit vergehet, ehe die unterſten Stuffen völlig 1 oder 1½ Zoll dicke mit Pochhaufwerk beleget werden; wie dann auch bey meinem mit dieſem Stuffengerinne angeſtellten Verſuche die Erfahrung gewieſen, daß das auf jeder Stuffe aus denen Pochwerkswaſſern niedergeſunkene Pochhaufwerk ſehr merklich unterſchieden geweſen, ſo, daß ich ſo viel abgetheilte Sorten bekam, als Stuffen waren.

Die Stuffen ſelbſt liegen Wagerecht, damit ſich die auf jede Stuffe herabfließenden mit Pochhaufwerk vermiſchten Waſſer deſto beſſer ausbreiten, und ihre beygemiſchten Pochhaufwerkstheile nach ihrer Größe und Schwere daſelbſt ſinken laſſen können.

Weil die immer klärern und klärern Pochhaufwerkstheile immer weiter und weiter in dem Pochwaſſer ſchwimmend fortgetragen werden, und ſich nicht eher aus dieſem Waſſer niederſenken, als bis es ſich weiter ausbreiten kann; ſo ſind die Stuffen nach und nach zu dieſem Behuf ſeitwärts immer breiter und breiter bis an das Ende des Stuffengerinnes gemacht worden; denn die Körper von ſchwererer Art als das Waſſer, können in demſelben da, wo es ſeichter wird, eher zu Boden kommen, als wo es tiefer iſt.

Ich habe jede Stuffe nur 1½ Zoll unter der andern vorwärts angelegt, damit die Pochwaſſer von einer Stuffe zur andern keinen zu hohen Fall haben, und dadurch das ſich ſchon auf jeder Stuffe aufgeſetzte Pochhaufwerk wieder mit ſich fort ſchwemmen möchten.

Das eine Seitenbrett des Stuffengerinnes iſt im Riſſe weggelaſſen, damit die Stuffen deſto deulicher in die Augen fallen.

Wenn nun die Stuffen von dem aus dem Waſſer niedergeſunkenen Pochhaufwerke ſo hoch belegt ſind, daß ihre Geſtalt keiner Treppe mehr ähnlich, ſondern faſt wie eine ebene ſchiefliegende Fläche auszuſehen anfängt, ſo ſchützt man das Pochwerksrad ab, nimmt mit einer leichten, blechernen Handſchaufel das ſich auf jeder Stuffe geſetzte Pochhaufwerk weg, und machet deſſen ſo viele Sorten und Haufen, als Stuffen ſind; je mehr man alſo Gefälle bey einem Pochwerke haben kann, je mehrere Stuffen- und Pochhaufwerksſorten wird man machen, und dadurch ohne Schlem- und Durchlaßgräben denen Waſchherdten auf beſſere und leichterere Art in guter Ordnung vorarbeiten können, der Verſuch und die Erfahrung, ſo ich mit dieſen kleinen Stuffengerinne gemacht, haben es bewieſen, indem ich nicht allein jede Sorte mit leichterer Mühe auf denen Herdten verwaſchen, ſondern auch bey dem zweytenmale Aufſetzen derſelben auf die Herdte, alle Schlich- oder Aerztheile aus dem Pochhaufwerke erhalten habe; obgleich alle Sorten auf Herdten verwaſchen wurden, die einerley ſchiefliegende Fläche gegen den Horizont hatten, da ſonſt das Pochhaufwerk wohl ſechs, ſieben und mehrmal aus denen Sümpfen wieder auf die Herdte geſetzt und von neuen herunter gewaſchen werden mußte.

Ich erhielt alſo meinen Zweck, und ſahe ganz deutlich, daß durch dergleichen Stuffengerinne denen Waſchherdten viel beſſer vorgearbeitet, wie auch viel mehr Zeit, Arbeit und Koſten bey Aufbereitung geringer Pochärze erſparet würde, als mit denen bisher gewöhnlichen Pochgräben geſchehen.

Das letzte trübe Waſſer, was von der letzten Stuffe in den daran liegenden Sumpf lief, ward unterſucht, ob ſich noch Aerztheile darinne befinden möchten; alleine es war davon ſchon ſo rein, daß man es ohne Bedenken als unnütze hätte wegwerfen können; ich bin alſo überzeugt, daß, je länger das Gerinne fortgeführet wird, und je mehr Stuffen darinne angeleget werden, je weniger wird der Abſchuß der letzten Pochtrübe noch Schlich in ſich halten, und endlich gar als purer Schlam vom Gebürge mit denen wilden Wäſſern fortgeſchaffet werden können.

Noch etwas iſt bey dieſem Stuffengerinne zu bedenken, nämlich, daß die obere Stuffe eben wie bey denen gemeinen Pochgräben das Gefälle, bald und eher völlig mit Pochhaufwerk beleget und angefüllet wird, als die folgenden; denn des groben Pochhaufwerkes, das aus den Pochwäſſern zuerſt niederſinket, iſt mehr, als des klärern; daher muß das ſich auf der oberſten 1ſten Stuffe häufig aufſetzende Pochhaufwerk öfter abgenommen werden, als das auf der 2. folgenden, von dieſer öfter, als von der 3 Stuffe und ſo fort; es würde alſo auch das Pochwerk ſehr oft abgeſchützet werden müſſen, wenn man das Pochhaufwerk von jeder Stuffe, ſobald ſie genugſam beleget wäre, wegnehmen und nicht den Lauf der Pochwerkswaſſer und die Sortirung des Pochhaufwerks auf denen andern folgenden Stuffen hindern wollte, indem man eine von denen vorhergehenden abräumete. Dieſem Uebel aber kann auf folgende Weiſe gar füglich abgeholfen werden:

Man faſſe nämlich die mit Pochhaufwerk vermiſchten ausgetragenen Pochhaufwerkswaſſer nach der 3 Figur in ein etwann 5 Zoll weites etwas ſchüßiges und ſo langes Gerinne, daß zwey Stuffengerinne an ſelbiges geleget werden können; in dieſes Gerinne mache man vor jedes Stuffengerinne einen Einſchnitt, durch welchen die mit Pochhaufwerk vermiſchten Waſſer auf die Stuffengerinne laufen können; man verſehe dieſe Einſchnitte mit ſolchen Schutzbretterchen, wie bey denen Waſchherdtsgerinnen, alſo, daß, wenn bey *a* von der 1 Stuffe das ſich aufgeſetzte Pochhaufwerk abgenommen werden muß, das Schutzbrettchen bey *b* quer in das enge Gerinne geſetzt werde, und die Pochhaufwerkswaſſer in deſſen bey *c* auf das andere Stuffengerinne laufen müſſen. Iſt die 1 Stuffe dieſes Stuffengerinnes auch voll, daß ſie geräumet werden muß, ſo nehme man das Schutzbrettchen bey *b* aus dem engen Gerinne, und ſetze das bey *c* ein, ſo wird das Pochhaufwerkswaſſer wieder auf das Stuffengerinne bey *a* laufen, und die abgeräumte 1 Stuffe daſelbſt wieder belegen; unterdeſſen, wenn die 1 Stuffen beyder Stuffengerinne ein paarmal geräumet worden, werden die 2 Stuffen derſelben zu räumen nöthig ſeyn; man verfahre ſodenn mit dem ab und anſchützen eben ſo, wie zuvor. Auf ſolche Weiſe, wenn man bey denen folgenden Stuffen auch ſo verfähret, wird man nicht nöthig haben, das ganze Pochwerk ſo ofte wegen des Abräumens der Stuffen abzuſchützen, ja man wird es, wenn nicht etwann an ſelbigen etwas wandelbar wird, gar nicht, wie bisher, bey Ausſtehung der Pochgräben abſchützen dürfen, ſondern es kann vielmehr beſtändig fortgehen, und alſo in Tag und Nacht, da es ſonſt dreymal wegen des Ausſtechens der Pochgräben abgeſchützet werden muß, mehr, als bisher pochen und arbeiten.

Man iſt zwar ſchon in denen alten Zeiten auf eine Art von Stuffengerinnen gefallen, wie die Zeichnungen im Agricola beweiſen, allein es iſt dazumal der Sache noch nicht hinlänglich nachgedacht, vielweniger überleget worden, daß die trüben Pochhaufwerkswaſſer zu ordentlicher Abſetzung ihrer in ſich habenden feſten Theile von Schlich und Berg ſich ausbreiten und dazu Platz haben müßten; weswegen ſie auch dergleichen Gerinne durchaus faſt von einerley Weite, und die Stuffen in ſelbigen nach geraden Parallellinien angelegt, welchem Fehler ich durch meine neue Anlage der Stuffen nach immer niederwärts an Größe zunehmenden Bogen abgeholfen zu haben, zuverſichtlich hoffe; die genaue Betrachtung der 1 Fig. bey X. wird das übrige deutlich und überzeugend darſtellen.

Von denen Aerzwäſchen.

Ich ſehe mich verbunden, noch etwas von denen Aerzwäſchen, als welche mit der Pocharbeit zuſammen hängen, zu erwehnen; ob ſie gleich für dieſesmal mein eigentlicher Gegenſtand nicht ſind:

Man hat eigentlich 2 Hauptarten von Aerzwäſchen, die eine iſt die Sieb- oder Setzwäſche, die andere die Herdtwäſche.

Die Siebwäſche gehöret der Ordnung nach eigentlich nicht hieher, denn ſie hat mehr mit denen trocken gepochten reichern

Aerzen, und dem Grubenklein zu thun, welches das in denen Gruben bey dem Gewinnen abgebröckelte und verzettelte reiche Aerz iſt, das vermittelſt gewiſſer Siebe in einem Faſſe mit Waſſer abgewaſchen und das Grobe zum Theil von dem Klaren geſchieden und ausgeklaubet wird.

Die Herdtwäſche aber hänget mit dem naſſen Pochwerke genau zuſammen, und nimmt hier ihren Platz ein.

Ich habe oben der Vorarbeit des Pochhaufwerkes vor die Herdte gedacht, und behauptet, daß ſie in einer ordentlichen und guten Sortirung der Pochhaufwerkstheile beſtünde, daß ſolche durch das von mir angegebene Stuffengerinne könne erlanget, und die Arbeit des bisherigen Durchlaſſens und Schlemmens des Pochhaufwerks erſparet werden.

Das ſortirte Pochhaufwerk wird endlich auf die Waſchherdte geſetzt, und durch daraufgelaſſenes Waſſer die Aerztheile von denen Bergtheilen geſöndert, dergeſtalt, daß die Bergtheile von denen Aerztheilen abgeſpühlet, und dieſe alleine auf denen Waſchherdten erhalten werden. Ich habe ferner geſagt, je mehr Theile von einerley Schwere oder von einerley Größe beyſammen wären, je leichter könne die völlige Abſönderung der Bergtheile von denen Aerztheilen auf denen Waſchherdten geſchehen.

Da nun aber auch zum Abwaſchen der Bergtheile von den Aerztheilen eine ſchiefliegende Fläche, worauf das Waſſer herunter laufen kann, ſehr vieles beyträgt, ſo müſſen die Herdte mit ihren Flächen ſo gelegt werden, daß dieſe ſich etwas gegen dem Horizont neigen, und mit demſelben einen Winkel machen; da aber bey der Vorarbeit verſchiedene Sorten Pochhaufwerk gemacht werden, ſo, daß immer eine klärer, als die andere iſt, und gröbere Sorten bey einerley Neigung eines Waſchherdtes mit dem Waſſer eher herunter rollen, als klärere, ſo wird auch vor jede Sorte Pochhaufwerk, eine andere Neigung der Herdtfläche gegen den Horizont nöthig ſeyn, es müſſen alſo die Waſchherdtsflächen bey einer Aerzwäſche nicht einerley Neigung gegen dem Horizont haben. Wie viel Grade aber der Neigungswinkel der Herdtfläche vor jede Pochhaufwerksſorte haben müſſe, kann hier nicht angegeben werden, weil ſich dieſes lediglich nach der Beſchaffenheit der Schlich- und Bergtheile im Haufwerke, die entweder leicht, ſchwer, ſchmierig, groß, klein und ſo weiter ſeyn kann, richten muß; denn eine andere Neigung erfordert Bleyglanz und ſein Gebürge, und vieleicht eine andere ein reiches ins Gebürge zart eingeſprengtes leichteres Silberärz, und ſo fort.

Es muß dahero jeder Pochſteiger, oder anderer der Sache verſtändiger Proben mit ſeinem Pochhaufwerksſorten auf verſchiedene gegen den Horizont geneigte Herdtflächen machen, und ſehen, auf welcher ſich die oder jene Pochhaufwerksſorte am leichteſten geſchwindeſten und reineſten verwaſchen läßt. Dieſe Proben recht genau anzuſtellen, wird es ſich der Mühe reichlich verlohnen, da auf das Gute verwaſchen, der geringen oder armen Aerze bey Bergwerken ſogar viel ankommt, daß ein beweglicher Waſchherdt zu ſolchen Proben gehalten, und ſo vorgerichtet werde, daß er oben, ohne herunter zu rutſchen, oder hinan zu weichen, aufliege, und unten auf jegliche verlangte Höhe durch unter zutreibende Keile erhoben oder herunter gelaſſen werden könne; wobey zugleich auf die Menge des, auf dieſe oder jene Neigung des Herdtes nöthigen Waſſers mit Achtung gegeben werden muß, ohne welche Bemerkung ſonſt die oder jene gemachte Neigung des Waſchherdtes nicht viel helfen würde. Es iſt denen Gewerken, ſo geringe Aerze verwaſchen laſſen, mehr als zu bekannt, daß in ihren

Aerzwäſchen von langen Zeiten her bey gewiſſen Pochhaufwerksſorten grob Leinentuch, ſo die Pochwerksleute Planen nennen, auf die Herdte ausgebreitet werden, dadurch gewiſſe Sorten von Schlich deſto eher auf denſelben zu erhalten: dieſe Art zu verwaſchen hat zwar wohl in denjenigen Zeiten vor ſehr gut angeſehen werden können, da die Sortirung des Pochhaufwerkes und die Einrichtung der Lage der Waſchherdte noch nicht ſo weit als heut zu Tage getrieben geweſen; jetzo aber ſind geſchickte und uneigennützige Poch- und Waſchwerksſteiger ganz anderer Meynung, und glauben mit mir billig und vernünftig, daß bey oben angegebener Sortirungsart, und gehöriger Neigung der Herdte gegen den Horizont zum Verwaſchen einiges Pochhaufwerkes keine Planen mehr nöthig ſind, und die Gewerken das Geld davor mit guten Grunde, Fug und Recht erſparen können; obgleich dieſer Meynung von einigen andern Poch- und Waſchwerksleuten, wiewohl ohne Grund, widerſprochen werden dürfte, ſo lange die Anſchaffung der neuen und Ablegung der abgenutzten Planen ein Profitchen vor diejenigen Leute bleibet, welche damit zu thun haben.

Ich wünſche, daß dieſer Aufſatz meine gute Abſicht erreichen, und denen Bergwerksliebhabern in Aufbereitung ihrer geringen Aerze den beſten Nutzen ſchaffen möge, von welchen ich meines Orts vollkommen im Voraus durch Erfahrung überzeuget bin.

⁂

A
B
C

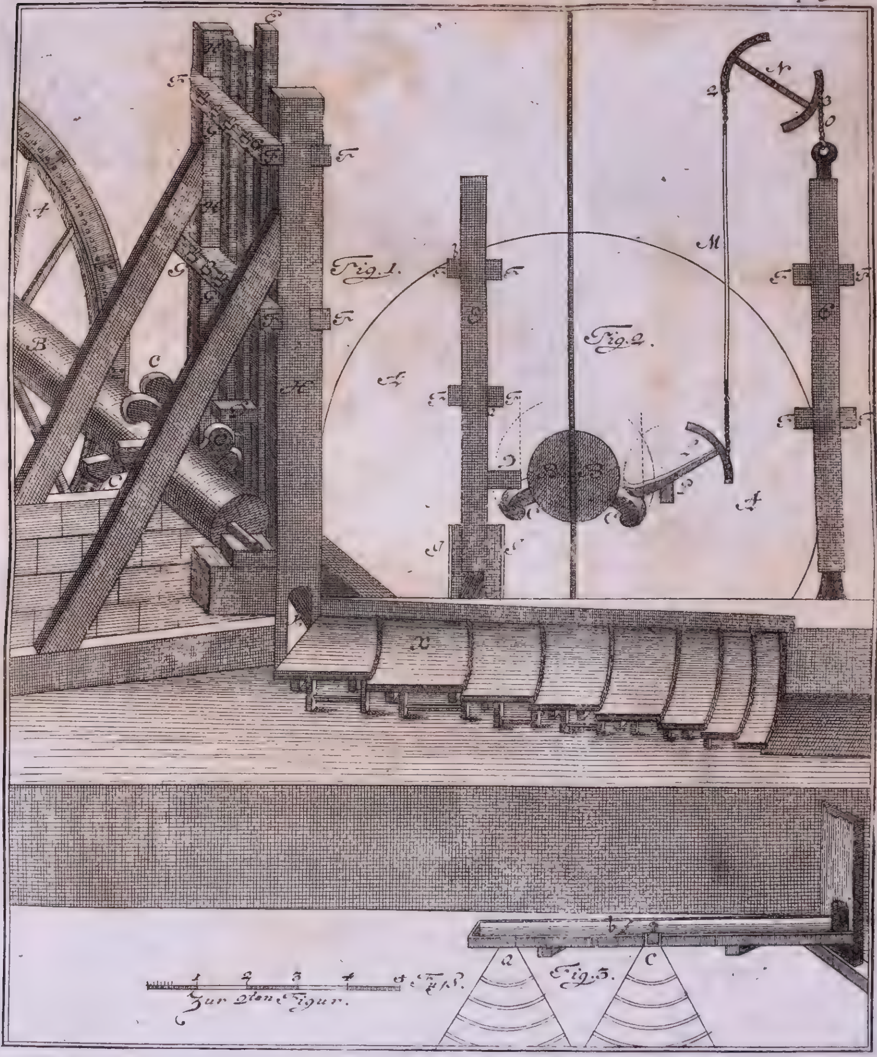


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
A
B
C
E
F
G
H
M
N
X
a
b
c
1 2 3 4 5 Fuß.
Zur 2ten Figur.

Denen
hochanſehnlichen Gliedern
der
churbaieriſchen Akademie
der Wiſſenſchaften
ſeinen gnädigen, hochzuehrenden und werthgeſchätzten
Herren
wiedmet
dieſe durch Erfahrung und vorſichtiges Nachſinnen
gefundene Wahrheiten,
welche
die ſammlende Lebenskraft aller Dinge, die innere
Beſchaffenheit der erſten Anfänge der Körper, und
die natürliche Ordnung bey Erzeugung der
Körper betreffen
D. Anton Rüdiger
bey der
Univerſität zu Leipzig
der Chymie öffentlicher Lehrer.

§. 1.

Daß jeder natürlicher Körper in allen Naturreichen, ja jeder greiflicher Theil der Körper, aus feſten und flüßigen Theilen, und aus einem ſolchen Grundweſen, welches beyde miteinander vereiniget, zuſammengeſetzt ſey, beweiſen nicht allein die chyemiſchen Auflöſungen der Körper durch **trockenes Feuer, Salz und Waſſer**, ſondern auch die Trennungen aufgelößter **Körper** von ihren Auflöſungsmitteln, **durch Salz oder Erde.**

§. 2.

Wenn man mit trockenem Feuer die Körper der Erdgewächſe, die Theile der Thiere und Inſecten zergliedert, ſo erhält man zuförderſt **wäſſerige Theile**, ſo entweder unter einer dunſtigen mehr trockenen Geſtalt, und bey einem ſehr geringen Grade des Feuers, ſich erheben, und die bey dem Deſtilliren vorgeſchlagenen Gefäſſe gar leichte erhitzen können; oder ſolche, die ſchwerer und bey etwas ſtärkerm Feuer ſteigen, und unter einer ſolchen Dunſt erhoben werden, welche mehr feuchte iſt, und ſich ſehr leichte wieder in wäßrige Tropfen zuſammen begiebet. Man erhält ferner aus denen Körpern durch trockenes Feuer, ſaure, alkaliniſche, **mehr zuſammengeſetzte Salze**, und mit denen Salzen auch **Oele**, **weſentliche** oder **empyrevmatiſche**, **von zerſtörtem Reſinöſen** und **Gummöſen** oder **Schleimichten entſtandene.** Wenn endlich alle flüchtige Materie aus denen Körpern getrieben, ſo kann das Fixe rückſtändige in ofnen Gefäſſen von allen weit mehr gebundenen Wäßrigen, Salzigten und Oeligten, durch Beyhülfe der freyen Luft vollends getrennet werden, da man denn nach ſattſamen Calciniren, aus denen meiſten Körpern, ſalzigte, **mehr** und **weniger Fette**, auch **gefärbte Erden**, erhält, welche, wenn ſie einem aufgelößten Mercurialſublimat mit gehörigen Handgriffen zugeſetzet werden, **Niederſchläge mit ſehr veränderten Farben** machen, und in ſo weit ihrer Natur und Eigenſchaft nach unterſchieden zu werden verdienen.

§. 3.

Durch **Salz** und **Oel**, oder durch ein **ſeifenhaftes Weſen**, ſind alſo in Erdgewächſen und Thieren, Waſſer und Erde miteinander vereiniget; weil Waſſer das erſte, die Erde das letzte, und Salz und Oel zwiſchen dieſen das mittlere Educt iſt. Die Miſchungen aber **von mittler Beweglichkeit** müſſen nothwendig Fixes und Flüchtiges zugleich in ſich beſchloſſen enthalten, und alſo dem Fixen ſowohl als dem Flüchtigen verwandt ſeyn, mithin auch zwiſchen feſten und flüßigen ein Vereinigungsmittel abgeben können.

§. 4.

Die allen Körpern eigene Kraft muß in dem **ſeifenhaften Weſen** wohnen. Denn ſobald man einem gemiſchten Körper, oder nur gewiſſen Theilen derſelben, das Salz, beſonders das öligte Salz, gänzlich entzogen hat, ſo ſind dieſelben aller ihnen eignen Kraft, wenigſtens der deutlichen Empfindung nach, gänzlich

lich beraubet. Die ätheriſchen Oele verlieren leichte in der Luft, die in den Körper des Oels faſt gar keine Wirkung hat, ihren regierenden Geiſt, oder ihr ſeifenhaftes flüchtiges Salzweſen. Wurzeln, Rinden, Hölzer, Kräuter, Blumen, verlieren durch wiederholtes ſattſames Kochen mit Waſſer alles Salz, und mit dieſem alle beſondere und eigene Kraft, und alſo ſcheinet das ölichte oder weſentliche Salz der Körper, und beſonders das Salz, ſo **in der verbrennlichen Materie wohnet**, die **erſte ſammlende Kraft** der Körper zu enthalten, der es eigen iſt, die erdigten und wäßrigen Anfänge der Körper nur in einem gewiſſen Verhältniß, oder mit beſonderer Proportion zu vereinigen.

§. 5.

So wie in Erdgewächſen und thieriſchen Körpern, Waſſer, Erde und ölichtes Salzweſen nicht nur in der flüchtigen, ſondern auch in der fixen Materie der Körper befindlich ſind, ſo kann man auch in unterirrdiſchem Reiche, ſogar in Metallen, dieſe Materien und Theile der Körper, nur nicht allezeit durch bloße Auflöſung mit trockenem Feuer, ſondern durch mehr künſtliche und eben nicht bekannte Zergliederung, vermittelſt der **Salze** und **beſonderer ſogenannter Gradirwaſſer** erweiſen.

§. 6.

Aus denen Metallen kann man durch verſchiedene mehr einfache Salze mancherley feſte und wahre erdigte Theile gänzlich abſöndern. Die mehr einfachen Salze ſind ſaure, in welchen die metalliſchen Körper aufgelöſet werden, nach der Auflöſung werden die Salze flüchtig gemacht, und bey der Flüchtigmachung ſöndert ſich allezeit ein verbrennlicher Theil zugleich mit einem erdigten Grundweſen von dem metalliſchen Körper gänzlich ab. So ſteiget z. E. bey der Auflöſung des Zinks im Salzſau-

ren,

ren allezeit ein verbrennlicher Geiſt, der auch, wenn die Auflöſung in einem geraumen Zuckerglaſe gemacht worden, gar leichte, ſo wie er ſchnell ſich erhebt, kann angezündet werden.

§. 7.

Die Erden der Metalle, wenn verſchiedene derſelben zugleich in einem Spiritu, ſo man von dem aufgelößten Metalle abgezogen, eingeſchloſſen ſind, machen mit ihrem Sauren das Gradirwaſſer aus, ſo wieder eben demſelben Metalle, von welchem es gezogen, appliciret werden kann, damit nach dem wahren Ausſpruch, und der gewiß höchſtnöthigen Erinnerung des Paracelſi **die Auflöſung der Metalle durch Metalle geſchehe.** Es trennet ſich ſodann das weſentliche Salz der Metalle, und vereiniget ſich mit ſeiner applicirten re inflammabili und terra. Eben dieſes Salz kann nach der geſchehenen Auflöſung auch flüchtig gemacht werden. Wohl zu merken iſt, daß das mehr einfache Salz der Metalle, mit dem Brennbaren und Erdigten in ein wahres ſal ſalſum mercuriale gehe. Aus dieſem ſale ſalſo mercuriali metallorum vero, kann man wieder zweyerley Theile trennen, nämlich einen fixen oder mehr feſten, der ſich mit körperlichem, aber aufgelößt geweſenen Golde oder Silber vereiniget, und das öligte **fixe ſaure Salz mit ſeiner Erde gemiſcht** iſt. Ferner einen höchſtflüßigen und flüchtigen Theil des Salzes, welcher ſich bey dem Niederſchlage der edlen Metalle aus ihren Menſtruis trennet, und mit dem Auflöſungsmittel vereiniget bleibet. Dieſer flüßige und flüchtige Theil des ſalis mercurialis ſalſi iſt ein bloßes mercurialiſches Waſſer, oder mercurialiſche Feuchtigkeit der Metalle. Auf dieſe Weiſe habe durch eigene Erfahrung gefunden, daß auch die Metalle in eine wahre mercurialiſche Feuchtigkeit, in ein ſaures Salz der verbrennlichen Materie, und in erdigte Theile aufgelöſet, und auf dieſem geheimen Wege recht natürlich können zergliedert werden, auch daß aus dieſer Zergliederung ungezweifelt folge; wie in denen Metallen ebenfalls **Waſſer, verbrennliche Materie mit ihrem Salze,** und **feſte erdigte Theile** das ganze zuſammengeſetzte materielle Weſen dieſer Körper ausmachen. Es kann dieſes aber auch durch Feuer und Salz bey einer mehr bekannten Arbeit bewieſen werden. Nämlich wenn man auf gemeine Art **ammoniacaliſche Flores** aus denen Metallen bereitet, und hernach durch wiederholtes Sublimiren derſelben, die mehr fixen Theile abſöndert, ſo daß man im Salmiak die zarteſten und flüchtigſten behält. Die flüchtigſten Erden ſind zugleich leichtflüſſige, und enthalten das wahre Waſſer der Metalle, gleichwie die fixern und gröbern erdigten den feſteſten Stoff in ſich beſchloſſen haben. Soll nun der Mercurius in den flüchtigſten Erden offenbar werden, ſo ſind die vor ſich höchſtgereinigten Salmiakblumen durch einen ſolchen Körper noch weiter zu reinigen, der mit dem Salze der Metalle die größte Verwandtſchaft hat, da man denn endlich, wenn auf dieſe Weiſe das weſentliche ſaure Salz der Metalle von den flüchtigſten und flüßigſten Erden abgeſöndert wird, einen wahren lebendigen Mercurium erhält.

§. 8.

Nunmehr iſt völlig erwieſen, daß jeder natürlicher Körper aus feſten, flüßigen Theilen, und aus einem beyde miteinander vereinigenden Salze, welches der verbrennlichen Materie eigen, beſtehe; und daß man dieſes durch verſchiedene Arten der Auflöſungen, bey vegetabiliſchen Körpern und Thieren mit trockenem Feuer, bey denen Metallen, mit Salz, Feuer und Waſſer, und hiernächſt überall durch Trennung aufgelößter Körper von ihren Auflöſungsmitteln ungezweifelt erfahren könne.

§. 9.

Es iſt ferner merkwürdig, daß man in jedem Stoff der Körper, in denen Erden, in dem Waſſer, in dem verbrennlichen Oele, in reſinöſen nnd balſamiſchen Weſen der Körper, und in gummöſen Subſtanzen, ja in dem feinſten Brennbaren ſelbſt, wieder Salz entdecke. Doch muß man nicht allezeit Waſſer und Alkali, oder alkaliniſche Erde zur Entdeckung des Salzes zureichend zu ſeyn glauben, weil auch in dem reinſten Schnee- und Regenwaſſer durch Fäulniß Salz gefunden wird, ſo ganz gewiß ein Saures enthält, welches Gold aufzulöſen vermögend. Von dem brennenden Weingeiſte kann man durch die Gährung ebenfalls gewiß darthun, daß er in ſeiner genaueſten und unzertrennlichen Miſchung ein Weinſaures verborgen halte; denn der ganze Wein wird in einer hermetiſch verſchloſſenen Phiole zu Eßig. Auch wenn der höchſt rectificirte Spiritus ardens ſehr oft über dem Alkali deſtilliret wird, ſo macht er etwas von dem Alkali zu einem ſale neutro, ſo Balſamum Samech genennet wird, zu dem ſo befördert der Spiritus ardens die Cryſtalliſation der Salze, ja wenn man noch tiefer nachforſchet, ſo muß und ſoll der verbrennlichen Materie ein Salz weſentlich ſeyn; denn in dem Verbrennlichen iſt gewiß elementariſches Feuer geſammelt, wie man bey der Auflöſung des Brennbaren durch flammendes oder glimmendes Feuer mit Augen ſiehet. Ferner ſo ſind in der Natur nicht allein feſte, ſondern auch flüßige verbrennliche Materien gegenwärtig. Demnach muß die reinſte verbrennliche Materie eben ſowohl mit Waſſer als mit Erde können gemiſcht werden. Nichts aber hat eben ſowohl mit Waſſer als Erde Verwandtſchaft, als das einfache ſaure Salz. Demnach muß in der verbrennlichen Materie, das elementariſche Feuer durch ſaures Salz geſammelt ſeyn. Nicht allein das elementariſche Feuer, ſondern auch ſogar die Luft, und das Lichtweſen ſelbſt, finden wir an ſalzigten Theilen geſammelt, wie der Salpeter und das weſentliche Salz des Urins, aus welchem allein, bekannter maſſen der Phosphorus bereitet werden kann, überzeugend beweiſen. Das ganze Meer iſt voll von Salze, welches mit dem Waſſer die größte Verwandtſchaft hat. In der Erde und mineraliſchen Wäſſern finden wir das urſprüngliche vitrioliſche Salz beſonders ausgeſtreut. Und alſo iſt keine Materie der Körper und kein Element, das nicht ein ihm eignes Salz bey ſich führte. **Der Sammlungspunct von Elementen ſcheinet wahrhaftig Salz zu ſeyn.**

§. 10.

Eben ſo allgemein als die Materie des Salzes iſt, ſcheinet auch das Brennbare, deſſen Weſen vom Salze nicht getrennet werden kann, zu ſeyn. Denn keine Erde, kein Waſſer, kein Körper der verſchiedenen Naturreiche, iſt von der verbrennlichen Materie ganz frey. In der Luft ſelbſt haben verſchiedene Erſcheinungen (meteora) und im Lichte die electriſchen Verſuche die Gegenwart des Brennbaren ſattſam bewieſen. Der ſcharfſinnige Stahl hat auch ganz beſonders ſich bemühet, mit Grunde der Wahrheit das Brennbare als eine überal ausgeſtreute Materie zu zeigen, Obſerv. Chymic. CCC. Berol. 1731. Ja wenn ich erwäge, daß die genaue Miſchung der Erde mit dem geiſtigen Saüren gar nicht anders geſchehen könne, als wenn das geiſtige Saure durch Erde figiret, und durch Waſſer und Brennbares zugleich mit der Erde flüchtig gemacht wird, ſo empfinde gar deutlich, daß das Brennbare, welches aus der **reinſten und flüchtigſten Mercurialerde**, oder dem elementariſchen Feuer ſelbſt und ſaurem Salze §. 9. beſtehet, ein Band- und Vereinigungsmittel wieder zwiſchen Erde und Salze nothwendig ſeyn müſſe. Demnach würde aus dem geiſtigen urſprünglichen obern und untern Sauren mit Waſſer und Erde nimmermehr ein einiges Weſen, ein erſter Grund der Körper erzeugt werden, wenn nicht die verbrennliche Materie, eine wahre Vereinigung zu machen, geſchaffen wäre. Das Brennbare wirket aber mit dem Waſſer nach einem beſtändigen Naturgeſetze nur in diejenigen Theile der urſprünglichen Salze und der Erden, welche ſeiner höchſtſubtilen ſulphuriſchen lebendigen Kraft am ähnlichſten ſind. Auf dieſe Weiſe wird in der Natur beſtändig ein zarter Schwefel des Salzes, und eine vollkommene lebendige Kraft des Salzes aus dem allgemeinen Sauren mit Erde und Waſſer, vermittelſt des feurigen Geiſtes im Brennbaren, erzeuget. Es beſtrebet ſich immer das Salz, der verbrennlichen Materie ſeine Kraft aus dem urſprünglichen Sauren zu vermehren, und durch Erde und Waſſer zu ſammeln, und in einer mehr ſinnlichen Geſtalt darzuſtellen. Durch dieſes natürliche Beſtreben und Wirken der Miſchungen in einander, entſteht ein vergrößertes Leben des **erſten Weſens der Körper**, oder des **Brennbaren. Dieſes vergrößerte Leben des Brennbaren**, könnte man ſeines Urſprunges wegen gar füglich den **Schwefel des Naturſalzes** nennen. Es entſtehet dieſer zwar allezeit aus dem urſprünglichen Sauren, aber nicht allein aus dem Untern, ſondern auch aus dem Obern. Das Obere finden wir durch Trübſand und alkaliniſche Erde im Meerſalze figiret, das Untere iſt mit der Fettigkeit der Erde vereiniget. Wenn alſo **das Brennbare** das vitrioliſche Saure zugleich mit der Fettigkeit der Erde flüchtig gemacht hat, ſo wirkt es auch in das figirte Obere, welches letztere durch das erſtere wieder flüchtig gemacht wird, indem beyde wieder mit dem Salze der verbrennlichen Materie und mit Waſſer vereiniget werden, ſo entſteht ein einiges vollkommenes Weſen; nämlich ein flüchtiger Schwefel des urſprünglichen Salzes. Sobald dieſer wieder durch Erde figiret, und durch ſein eignes Weſen wieder flüchtig geworden, ſo hat man ein **ſulphuriſches Weſen des Naturſalzes**, welches geſammelte, durchdringende, belebende, und alſo vollkommene große Kräfte enthält. Dieſes Weſen iſt es, welches aller Zerſtörung entgegen, die Erzeugung der körperlichen Kraft befördert, und dem ungeachtet die Körper in der Möglichkeit zerſtört zu werden erhält, weil in dem Salze der verbrennlichen Materie das elementariſche Feuer ſelbſt der regierende Geiſt dieſes Weſens iſt. In dieſem ſulphuriſchen Grundweſen des Naturſalzes iſt der allgemeine Saamen aller Dinge, der überall in allen Körpern und Anfängen derſelben die Abbildungskraft, oder die anziehende ſammelnde Lebenskraft ausmacht, ohne welcher nichts wachſen, leben und ſich vermehren kann.

§. 11.

Die nähern Anfänge der Körper entſtehen alle von dieſem einigen **Grundweſen des allgemeinen Naturſchwefels**. Ohne dieſem wären die Anfänge der Körper tode, leidende, und könnten zu ihrer Vermehrung ſich mit keiner lebendigen Kraft beſtrebend äußern. Wenn die Kraft des Naturſchwefels in die fette, ſandigte und alkaliniſche Erde wirket, ſo werden alle figirende Lebenskräfte des Naturſchwefels, die Kraft des vitrioliſchen Sauren, die bindende und fette Erde ſelbſt abgeſöndert, und mit beyden bleibet das Waſſer und elementariſche Feuer vereiniget, und ſo entſtehet aus Erde, Salz und Waſſer des allgemeinen Saamens aller Dinge, mit der alkaliniſchen und ſandigten Erde der figirende *Sulphur*. Wenn hingegen der Schwefel des Naturſalzes in das Brennbare ſelbſt und in die dem Sauren entgegengeſetzte Erde wirket, ſo ſcheidet ſich aus dem Naturſchwefel das Brennbare mit wenigem ſchweren und leichten Waſſer, und am meiſten die ſandigte und alkaliniſche mit ſalzſaurem geſchwängerte

Erde, da denn wieder aus Salze, Waſſer und Erde des Naturſchwefels, die kräftige Subſtanz des weſentlichen oder färbenden Sulphuris ihren Urſprung erhält. Endlich kann auch das Waſſer vornehmlich und am häufigſten in jedem Naturreiche, in die Theile des Naturſchwefels wirken, da alle flüchtigmachende Kräfte, die Kraft des flüchtigmachenden Sauren, die Kraft der dem Sauren entgegengeſetzten und zugleich fetten Erde ſich abſöndern, und alſo das flüchtigmachende ſulphuriſche lebendige Grundweſen, mit dem ſchweren und bindenden Waſſer vermiſcht, aus dem allgemeinen Saamen hervorgehet. Zum Beweiſe aller vorhergeſetzten Entſtehungsarten der Anfänge aus dem allgemeinen Leben der Dinge, ſind diejenigen Erfahrungen mit vorſtehenden Lehrſätzen zu vergleichen, ſo ich §. 20. und 24. angeführt habe.

§. 12.

In eben der Proportion, in welcher ſich das feſte, flüßige und aus beyden gemiſchte, von beſonderer Art aus dem allgemeinen Saamen getrennet oder abgeſöndert hat, in eben demſelben Verhältniß müſſen ſich auch die übrigen gleichartigen Theile mit der erſten Grundlage verbinden; weil die lebendige Kraft in jedem beſondern Anfange der Körper, auch eine durch Miſchung beſonders abgemeſſene **Anziehende** iſt. Die halbflüchtige ſulphuriſche Erde iſt eigentlich die allgemeine anziehende, ſo ich in jedem Magnetſtein als eine ſolche beweiſen kann. Von dieſer, überhaupt betrachtet, entſtehen alle beſondere durch Beymiſchung des Brennbaren, oder allgemeinen Sauren, oder des Waſſers und Salzſauren, abgemeſſene ſammlende Kräfte, vermittelſt welcher zuförderſt drey Hauptarten der Körper erzeugt werden, unter welchen einige vornehmlich das figirende, andere das färbende, und die dritte Art das flüchtigmachende Leben enthalten; jedoch mit dieſem merkwürdigen Unterſchiede, daß nicht allein in denjenigen Körpern, ſo aus dem figirenden Leben geboren worden, ſondern auch in denen, welche das flüchtigmachende Salzweſen zum Grunde haben, und in denen, in welchen die ſulphuriſche Erde nebſt dem Brennbaren die erſte Grundlage geweſen, in jeder beſonderen Art wieder vornehmlich entweder das Waſſer, oder die trockene Erde, die herrſchende Miſchung ausmachen könne; daher denn von jeder erſten Art wieder zwey Arten der Körper (Decompoſita) abſtammen; und alſo aus denen Kräften des allgemeinen Saamens in allen **neun Arten** der Körper, eine vollkommene Anzahl, gebildet werden, bey denen wieder alle nur mögliche, ja eine unendliche Anzahl mehr und weniger zuſammengeſetzter und in ihrer Kraft auf das mannigfaltigſte abgemeſſener Körper ihren nähern Urſprung finden. Es wäre alſo ein feines Räthſel, welches man denen beſonders, die chymiſche Weisheit zu beſitzen meynen, um die wahre Größe ihrer Einſichten unpartheyiſch zu prüfen, zur Auflöſung vorlegen könnte:

> **Wie man die Zahl 9, als die vollkommenſte, nicht in einer arithmetiſchen, ſondern chymiſchen Betrachtung erweiſen könnte?**

§. 13.

Da alſo von den erſten Anfängen der Körper keine zureichende, und das innere Weſen derſelben beſtimmende Erkänntniß möglich iſt, wo man nicht die allgemeine Saamenskraft vorher erforſchet hat, ſo hätten die Araber ſowohl, als der **Baſilius** und **Paracelſus**, und der Herr **Becher**, und alle noch neuere **Chymiſten**, ehe ſie die erzeugenden nähern Anfänge der Dinge zu betrachten vorgenommen hätten, das Leben ſelbſt, von welchem die erzeugenden Anfänge entſtanden, betrachten ſollen. Auch war es nöthig, erſt das, was alle Körper gemein haben, nämlich das flüßige, feſte, erdigte, und das Band von beyden zu beweiſen, um richtig urtheilen zu können, ob ſich auch alles, was in Körpern gefunden wird, deutlich und ungezwungen aus den geſetzten Anfängen herleiten laſſe; und ob auch in den erſten Grundweſen zur Erzeugung, Sammlung und Vermehrung der erſten Anfänge zureichende Kräfte gegenwärtig ſind?

§. 14.

Die nächſten Anfänge der beſondern Körper, in ſoweit ſie wirklich einander entgegen geſetzt werden können, müſſen ſie *nicht untereinander gemiſcht ſeyn.* Jeder beſonderer Anfang aber eines aus flüßigen, feſten, und beyde verbindenden Theilen jederzeit beſtehenden Körpers, muß und ſoll vor ſich gemiſcht ſeyn, und ex ſibi invicem admixtis unius eſſentiæ, diverſæ tamen formæ, beſtehen; denn ſonſt könnte nicht von dem Anfange das flüßige ſowohl, als das feſte, und das Band von beyden in der körperlichen Zuſammenſetzung erzeugt werden. Wie die aufmerkſame Erfahrung lehret, ſo iſt in flüßigen, feſten und beyde vereinigenden Theilen, nur die Proportion der admixtorum, nicht aber das Weſen unterſchieden, daher kann der nächſte Anfang eines Körpers nicht eines vielfältigen Weſens, ſondern er muß unius eſſentiæ ſeyn; er mag in dichtflüßiger, oder feſter Geſtalt, oder gar in Geſtalt der Luft erſcheinen. Wenn die Anfänge der Körper nicht lebendig wären, ſo könnten ſie mit keiner ſammlenden anziehenden Kraft nach der Vergrößerung ihres Weſens ſtreben, und den körperlichen Zuſammenhang, wenn er entſtanden, erhalten. Es würden ohne dieſe Eigenſchaft entweder gar keine Körper gezeugt werden; oder die entſtandenen Körper wären der allerleichteſten Zerſtörung und Zerſtreuung unterworfen. Daher ſoll der nächſte

Anfang von zerſtörenden und die Erzeugung hinderenden Dingen ſattſam gereiniget ſeyn.

§. 15.

Aus allen vorher bewieſenen Grundſätzen folget alſo, daß die nächſten Anfänge der Körper ſeyn müſſen

1) **Einfache**, *rebus diverſæ eſſentiæ neutiquam permixta*, und alſo *unius eſſentiæ*, *ſimplicia*.

2) **Reine**, *pura*, **von allen zerſtörenden und unwirkſamen ſattſam gereinigte.**

3) **Lebendige**, *viva*, *h. e. penetrandi & coagmentandi vi prædita*, **ſammlende, und in das Feſte ſowohl, als das Flüßige leicht eindringende.**

Wenn beſondere und einzelne Körper entſtehen ſollen, ſo muß das erſte lebendige Weſen, **entweder von der Erde, oder dem Brennbaren, oder dem Waſſer** in ſeiner Kraft beſonders abgemeſſen werden, ſo trennt ſich von dem Leben ein einiges, der innern Kraft aber des ſcheidenden völlig ähnliches und gleiches Weſen. Denn alle Körper ſind aus einem ſulphuriſchen Weſen des Naturſalzes, und doch dreyen ſubſtantiellen Grundmiſchungen; nämlich **Erde, Waſſer** und **dem Brennbaren**, die aber ſelbſt aus dem einen hervor und wieder in daſſelbe eingegangen, entſtanden.

II.

§. 16.

Im zwölften und dreyzehnten Jahrhundert, da die **Araber** und **Saracenen** ſich mit Unterſuchung der Metalle und Mineralien lange Zeit beſchäftiget hatten, wurden endlich ſolche Beſtimmungen von Anfängen der Körper gegeben, aus welchen man nicht einmal lernen konnte, wie die Natur unterirrdiſche und metalliſche Körper erzeuge, geſchweige, daß man die deutliche Erzeugung der Körper in andern Reichen daraus hätte einſehen können. Ein Mercurius, und ein dieſen Mercurium bindender, dicht und feſtmachender Sulphur, ſollen zur Erzeugung aller Körper nach denen Grundſätzen der Araber erfordert werden. Was iſt aber der Schwefel, an ſich betrachtet, iſt er etwas verbrennliches, oder was unverbrennliches, oder iſt er etwas aus beyden gemiſchtes? (**Der erſte Sammlungspunct aller Dinge war aus beyden vereinigt entſtanden** §. 9. 10.) Ferner möchte man fragen, ob der Sulphur ein Salz hätte, und was es vor ein Sach wäre. Und wenn das Verbrennliche zugleich mit dem Salze in dem Sulphure enthalten; ob das Verbrennliche bey dem Salze ſeyn müſſe, oder ob es auch weg ſeyn könne; und was endlich der Sulphur als Sulphur wirke? Bevor nicht dieſe Fragen aufgelöſet werden, kann man den Sulphur als ein deutliches Grundweſen der Körper nicht annehmen. Was iſt nun ferner das feſtmachende und bindende in dem Sulphure, iſt es vom Sulphure unterſchieden? oder gehört es zu dem Sulphure? Und endlich, was wird man ſich unter dem Mercurio ſelbſt vorſtellen müſſen; iſt es ein gemeines oder philoſophiſches Queckſilber. Ich glaube, beyde könnten kein wahres und weniger vermiſchtes Grundweſen der Körper abgeben.

§. 17.

Zu Anfange des ſechszehenten Jahrhundert fieng der **Theophraſtus Paracelſus** nach der Anleitung eines Baſilii Valentini an, die Grundſätze der Araber zu beſtreiten. Er glaubte ein **ſeiner materiellen Beſchaffenheit nach ganz unbeſtimmtes Salz, ein eben ſo unbeſtimmter Schwefel, und endlich ein ſubtiles**

ätheriſches Weſen, ſo er unter dem Mercurio verſtanden wiſſen wollte, könnten mehr zur Erzeugung der Körper zureichende Anfänge vorſtellen. Was nun aber erſt den Mercurium des Theophraſti betrift, ſo fraget man billig, in was für einer Materie dieſer ätheriſche Mercurialgeiſt ruhet? Iſt er vieleicht im Waſſer, Erde und in einem ſauren Salze ſinnlich? wie z. E. das elementariſche Feuer, das in Spiritu ardente von Salze geſammelt, und mit Waſſer vermiſcht iſt §. 9. Wenigſtens müßte das ſubtile, ätheriſche Weſen, und der Mercurius erſt der Materie nach definiret werden, ehe man ihn, als ein mögliches chymiſches Grundweſen der Körper zulaſſen könnte. Der Sulphur ſoll derjenige Anfang ſeyn, von welchem Geruch und Zuſammenhang der Körper entſtehen. Aber was iſt das für ein Zuſammenhang, welchen der Sulphur verſchaffet, iſt es vieleicht derjenige, den ſchon das Waſſer leiſtet? ſo haben wir den Sulphur nicht nöthig; oder ſoll unter dem Zuſammenhang eine Vereinigung von feſten und flüßigen verſtanden werden, ſo müßte der Sulphur Salz bey ſich haben, weil ohne dem Salze, in welchen ſchon feſtes und flüßiges gemiſcht iſt, keine Vereinigung des feſten und flüßigen geſchehen kann. Wie kann ferner der Geruch vom Sulphure ohne verbrennliche Materie entſtehen, da alles riechende beſonders denen Oelen, balſamiſchen und verbrennlichen Geiſtern eigen iſt. Demnach iſt der Sulphur ebenfalls **nicht der Materie**, ſondern nur der Wirkung nach beſtimmet worden. Das Salz, als das dritte Grundweſen, ſoll denen Körpern die Feſtigkeit geben, wie kann man aber von dem, was **im Waſſer ſo leichte auflößlich iſt**, in ſoweit es die Eigenſchaft hat, eine beſtändige Härte erwarten. Es iſt überal Salz, **im Waſſer, in der Erde, in der verbrennlichen Materie**, wie die oben angeführten Erfahrungen ſattſam bewieſen haben; und alſo iſt **das Salz kein beſondrer Anfang** (principium), **ſondern nebſt dem elementariſchen Feuer allen An-**

fängen der Körper weſentlich und gemein §. 9. Daß aber die Erde feſt mache, wenn ſie der allgemeinen Kraft des Salzes eine beſondere Abmeſſung ertheilet, iſt mit der Wahrheit, Erfahrung, Vernunft und Natur durchaus übereinſtimmend; und alſo werde ich glauben, was die Natur redet; die Erde ertheilet dem Salze ſelbſt Feſtigkeit, Härte und Feuerbeſtändigkeit, wenn ſie von **Waſſer**, einfachen **Salze** und **Verbrennlichen** nicht überſetzet wird.

§. 18.

In neuern Zeiten haben endlich des **vortreflichen und ſcharfſinnigen Bechers** Lehrſätze, von den erſten Anfängen der Körper, und ſeine **drey Erden**, als zureichende Grundweſen der Körper, auch bey allen tief nachdenkenden und wahrhaftig gelehrten Männern den meiſten Beyfall gefunden. Es iſt wahr, daß alles, was aus den Körpern erhalten wird, es mag Waſſer, Salz, Oel, u. ſ. w. ſeyn, doch allezeit eine verborgene, feine und einfache Erde in ſich habe, und daß der fixe und feſte Theil aller Dinge ganz gewiß trockene Erde ſey. Herr **Becher** erinnert aber hin und wieder in ſeinen Schriften, daß ſeine Erden auch unter der Geſtalt des Waſſers, eines Rauchs und der Dunſt, und wie eine Luft erſcheinen; und alſo bisweilen viele, bisweilen nur wenigere flüßige Theile beygemiſcht haben. Eben dieſer Urſachen wegen iſt in allen erdigten Anfängen ein Beſtreben gegen das Waſſer, und des Waſſers gegen die erdigten Theile, weil genau gemiſchtes Waſſer, allen auch trockenen Erden beywohnet; iſt dieſes, ſo folget ferner, daß in der trockenen Erde ſowohl, als in dem befeuchtenden Waſſer, Spuren eines feurigen Salzgeiſtes, als eines Bandes feſter und flüßiger Theile §. 9. ſeyn müſſen. Und alſo wäre die allgemeine Idee der Erde des Hrn. **Bechers**, wenn ſie recht erklärt würde, nur ein mehr feſter und trockener Theil, von dem §. 10. 11. erwieſenen und ſeiner Erzeugung nach beſtimmten Naturſchwefel. Da aber der Herr Becher den allgemeinen Begriff der Erde nicht auf dieſe Weiſe deutlich aufgeſchloſſen, und die beſondere figirende ſulphuriſche und mercurialiſche Erde, nur nach gewiſſen äußerlichen unterſcheidenden Kennzeichen, in Phyſica ſubterranea, in Alphabetho minerali, in Oedipo chemico betrachtet hat; ich aber mehr auf das innere Weſen der erſten Anfänge in dieſer meiner Abhandlung geſehen habe, ſo bin ich durch die genauere Nachforſchung in Stand geſetzt worden, mehr Fragen, ſo bey der Erkänntniß des Weſens der Körper zu beantworten vorfallen, aufzulöſen.

Z. E. 1) In was vor Ordnung, und durch was vor Mittel man die erſten Grundweſen der Körper abſöndern könne §. 7. **und** 25?

2) Was vollkommen und unvollkommen in jedem Grundweſen ſey? §. 23.

3) Wovon die vermehrende, durchdringende, elaſtiſche Kraft in denen Anfängen der Körper entſtehe, §. 10. 27., **und ob man alle Wirkungen der lebendigen Anfänge in die Körper vollſtändig beſtimmen könne?** §. 27.

4) Wie man von jedem Körper ſeine vollkommene und lebendige Kraft leicht trennen könne? §. 26.

5) Wie man das Verhältniß des einen Grundweſens gegen das andere dergeſtalt anzeige; daß aus dem Weſen ihrer Materien, die nöthige und zugleich nützliche Verwandtſchaft erhelle. §. 29.

§. 19.

Einige von den neueſten Chymicis haben es noch beſſer als die alten, und der vortrefliche Herr Becher zu treffen geglaubet, wenn ſie gar fünf Anfänge der Körper ſetzten, nämlich 1) Erde, 2) Waſſer, 3) Salz, 4) Brennbares, und 5) Arſenicalweſen. Die drey letztern Salz, Brennbares und Arſenicalweſen ſollen auch in allen vegetabiliſchen und animaliſchen Körpern wohnen. Wer fühlet hier nicht das widernatürliche und erzwungene in denen Begriffen ſogleich, und wo kann ein Salz ohne dem brennbaren Weſen in der Natur gefunden werden. Was ſoll das arſenicale principium, welches nicht einmal ein wahrer und reiner Anfang der Metalle, ſondern vielmehr ein Körper iſt, in welchem die Erde, das Salz und der Mercurius der Metalle zugleich ſind, und noch darzu in einer zerſtörenden Unvollkommenheit iſt, um ein Auflöſungsmittel vielmehr von dem wahren metalliſchen Saamen abzugeben, und wie kann man alſo dieſes Gift zu einem principio aller Körper machen. Ja wendet man ein, man müßte das Arſenicalweſen nicht ſo grob annehmen, ſondern recht fein, ſubtil und rein. Aber ich antworte, alles was man zum Beweiſe dieſes Principii vorbringet, zielet insgeſammt auf das gemeine, nur verſchiedentlich geänderte metalliſche Arſenicalſalz. Der Tartarus vegetabilis ſoll Arſenik haben, weil er das Kupfer weis machet. Aber wie machet er es weis? löſet er es wohl gar auf? Allerdings! ſo wirkt aber der Arſenik nicht. In vegetabilibus und beſonders in der Aſche der Erdgewächſe ſoll es ſeyn, weil der Magnet Eiſentheile darinne entdecket. Gehören dieſe zum Weſen der Aſche? ferner der erſtickende Kohlendampf ſoll vom Arſenik in Erdgewächſen zeugen. Im Blute ſoll auch ein Arſenikalweſen ſeyn, weil bisweilen Eiſentheilchen darinnen gefunden worden. Und der Phosphorus urinæ, weil er einen

Knoblauchsgeruch giebt, wie der gemeine Arſenik, und das Urinſalz die Metalle in Mercurios ſoll verwandelt haben, ſo ſcheinet es gewiſſen Gelehrten, als wenn was arſenikaliſches auch in Körpern der Thiere wohnte. Jedoch was halte ich mich bey ſolchen gar zu leichte zu widerlegenden Vorſtellungen auf, die endlich auf weiter nichts als lauter Widerſprüche hinaus laufen. Viel beſſer iſt es, die wahren und ächten Anfänge der Körper aus ihrer lebendigen Quelle nunmehro noch genauer zu erwägen, und zugleich die Körper zu beſtimmen, in welchen die erſten beſondern Anfänge mehr vollſtändig, und gleichſam in ihren eigenen Behältniſſen, mehr abgeſöndert erſcheinen; und endlich aus dieſen durch Erfahrung und Vernunft gefundenen Wahrheiten die allerwichtigſten und nützlichſten Fragen §. 18. practiſch aufzulöſen und zu beantworten.

§. 20.

So wie in thieriſchen Körpern und in Microcoſmo alle Säfte und Lebensgeiſter aus dem Blute abgeſetzet werden, ſo werden auch in der großen Welt alle Körper und Anfänge derſelben aus dem erſten ſulphuriſchen Grundweſen erzeuget. Wären **in dem Blute der Natur** nicht ſchon alle Kräfte des flüßigen und feſtmachenden Geiſtes, ſo könnten **Waſſer** und **Geiſt** nicht von dem Blute abgeſöndert werden. In dem erſten ſulphuriſchen Grundweſen liegt der Saame und die vermehrende Kraft aller Dinge. In ihm iſt die wahre Abbildungskraft des denen Körpern eignen, feſten, und auch eigenen flüßigen anzutreffen. Es ſind in dem erſten ſulphuriſchen Grundweſen geiſtige Kräfte eines Glanz und Farbe ertheilenden ſauren Salzes, Feuer, Luft und Licht; ja das belebende **Leben** wohnen in dieſem Blute der Natur. Der allerflüßigſte und flüchtigſte Theil deſſelben iſt ein gedoppelter Geiſt des Waſſers, theils **trocknend und feurig**, theils **feuchtend und leicht zu coaguliren**; wie bey Zergliederung beſonders des Blutes der Thiere, die geiſtige Natur des **feurigen Waſſers**, mehr ſinnlich und körperlich vor Augen geleget wird. Man könnte den Geiſt dieſes **feurigen Waſſers** den **allgemeinen Lebensgeiſt** (mercurium univerſalem) nennen. Der allerfeſteſte Theil dieſes Naturſchwefels iſt eine mit ſalzſaurem halbflüchtig gemachte und daher genau gemiſchte theils alkaliniſche, theils zarte ſandigte Erde; das feſte ſulphuriſche, unctuöſe zähe erdigte und erſte Grundweſen aller ſulphuriſchen Körper läſſet ſich gänzlich in einen weißen lichtreichen Rauch auflöſen. Feuer und Licht des Naturſchwefels können ohne Luft nicht vereiniget bleiben. Die Luft aber wohnet nächſtens in dem ſauren Salzweſen des Naturſchwefels ſelbſt; und dieſes muß von dem **Urſprünglichen** und von dem **Salzſauren**, wie ſchon §. 10. beſtimmt worden, ſeine Vermehrung wenigſtens erhalten haben, angeſehen ſich aus dem feſten erdigten Grundweſen ein ſolches gedoppeltes Salz ſcheiden läſſet.

§. 21.

Das ſulphuriſche erſte Grundweſen iſt in allen Körpern aller und jeder Naturreiche das Band von Erde und Waſſer, und das Leben aller Anfänge der Körper; daher iſt die mögliche Proportion des Waſſers und der Erde und des Sauren in dem erſten ſulphuriſchen Grundweſen ungemein mannigfaltig; daher Zuſammenhang, Schwere, Flüchtigkeit, Flüßigkeit, Feſtigkeit, Feuerbeſtändigkeit, als ſehr unähnliche Eigenſchaften dem ungeachtet von einem Weſen entſtehen können, wenn nur entweder der ſaure Theil, oder der wäſſerige und feurige Theil, oder auch bisweilen der erdigte Theil, oder der erdigte und ſaure zugleich die Oberhand hat, und den erſten Grund zum Anfange beſonderer Körper darreichet.

§. 22.

Beſondere Körper ſind zuförderſt diejenigen, welche aus einem weniger zuſammengeſetzten Weſen des Naturſchwefels ihren Urſprung haben. Ein Principium oder Anfang eines Körpers iſt allezeit ein beſondrer mit Kraft und Leben begabter Theil des Naturſchwefels. Ein ſolcher Theil kann zuförderſt der Geiſt der verbrennlichen Materie im Naturſchwefel ſelbſt mit ſeiner Erde ſeyn, in ſo weit vielweniger ſalzigte und wäſſerige Theile mit dem genau gemiſchten brennbaren und erdigten Weſen vereiniget ſind. Aus dieſem Anfange entſtehen ohne Zweifel alle Körper, ſo verbrennliches, riechendes, gefärbtes, erwärmendes, glänzendes, öligtes, unctuöſes, und viel Feuer und Licht enthalten; als **Oel, Balſam, Seife, Schwefel,** *alle Saamen der* **Erdgewächſe und Blumen.** Im Fette und in der Galle der Thiere, iſt derjenige Theil des Naturſalzes, den man den ſulphuriſchen weſentlichen nennen kann, am häufigſten. In einigen Metallen, in Eiſen, Kupfer, iſt von der verbrennlichen Materie und von der Erde am meiſten; des Waſſers und Salzes iſt allezeit in dieſen Körpern wenig. Daher ſie alle mehr trocknende Eigenſchaften haben; von dem Mangel des Waſſers und Salzes in der Erde des Eiſens, und alſo von der Reinigkeit und Menge der reinen Erde kömmt, z. E. die Härte dieſes Metalles. Daher der Herr Becher in ſeiner Phyſic. Subterran. Libr. I. Sect. III. Cap. III. die ſulphuriſche Erde von ſale acido gänzlich abgeſöndert wiſſen wollen; aber warum nicht auch von überflüßigen Waſſer, wie Fett und Oel, als Körper, in welchen die ſulphuriſche Erde am meiſten, ſattſam beweiſen. Es kann aber nicht alles ſal acidum von dem ſulphuriſchen Principio weg ſeyn. Es iſt nur des ſauren Salzes ſehr wenig, der Erde und des Brennbaren ſehr viel. Ein ſehr weniges und von Erde und Brennbaren auf das genaueſte gemiſchtes ſal acidum ertheilet Farbe und Glanz, und den ſtärkſten und faſt unzertrennlichen Zuſammenhang. Wie könnte das ſulphuriſche Grundweſen unter der Geſtalt des Waſſers, der Luft, wie der Herr **Becher** ſelbſt geſtehet, und gar des Salzes, als in nitro, tartaro, erſcheinen, wenn es überall in der Natur vom ſale acido gänzlich getrennet wäre; vielmehr muß man mit Grunde behaupten, das allerreifſte und alſo am ſtärkſten gemiſchte ſal acidum iſt allezeit in dem ſulphuriſchen Grundweſen, und denen daraus entſtandenen Körpern zu finden; z. E. in Traubenſafte und vielen andern Säften der Erdgewächſe. In ſo weit dieſe zu den ſulphuriſchen gehören, haben ſie freylich der Erde und des Brennbaren viel, aber das ſaure Salz, welches aus flüchtigen und fixen auf das genaueſte gemiſcht iſt, mangelt in denſelben deswegen nicht ganz.

§. 23.

Ganz eine andere Beſchaffenheit hingegen findet man in denjenigen Körpern, welche nicht aus den genau gemiſchten Salztheilen des Naturſchwefels, ſondern z. E. aus der glasachtigen Erde deſſelben, und aus dem figirenden Theile des Salzes, nämlich dem urſprünglichen Sauren, ihren Urſprung genommen haben, oder welche aus dem figirenden Theile des Lebens entſtanden ſind. In dem figirenden Theile iſt außer der glasachtigen Erde und dem urſprünglichen Sauren **allezeit ein mehr dunſtiges und leichte ſteigendes, als ſchweres und befeuchtendes Waſſer zu finden.** In durchſichtigen Steinen, Cryſtallen, Spath, Blenden, Katzenſilber, im Spiesglaſe, Bley, ſind lauter bindende Kräfte des ſulphuriſchen Weſens. In denen urſprünglichen Erden (terris primitivis) und zwar in denen meiſten, in der Sanderde, Kalkerde, Thonerde, ſind ſattſame Spuren des urſprünglichen Sauren, auch erhält man aus blauen Letten, ein dunſtiges, trocknes, feuriges Waſſer, ſo durch die bindende Kraft des Naturſchwefels figiret worden. Alle harte, knochichte Theile der Thiere, alle Hörner, Zähne haben ein Oel und Salz, und alſo ſulphuriſches Grundweſen, aber der bindende Theil der Erde hat dennoch die Oberhand. Die Rinden, Hölzer, harten Wurzeln der Erdgewächſe, haben zwar ſulphuriſche, oft viel färbende Theile, aber das bindende Saure und die alkaliniſche auch magere Erde iſt häufig in ihnen, z. E. lignum corgli, cortex ſima ruba, fungus melitenſis &c.

§. 24.

Die Erfahrung und chymiſche Zergliederung lehret auch ferner, daß in andern Reihen der natürlichen Körper vielmehr die alkaliniſche Erde vom Sulphure mit dem flüchtigmachenden Sauren gemiſcht ſey, und mit dieſer ſich das ſchwere Waſſer (aqua roris) vielmehr, als das dunſtige (aqua de die rarefacta) vereinige; ob es gleich wahr, was der Herr Becher behauptet, **daß die allerreinſte, er hätte auch ſetzen mögen, flüchtigſte Mercurialerde**, in einem brennenden Geiſte, von ſale acido geſchieden, ruhe; oder in dem **elementariſchen Feuer ſelbſt.** In allem Thau- Schnee- und Regenwaſſer iſt die terra ſalis marini dem nitröſiſchen ſulphuriſchen zugeſetzet. Im Arſenik, Salmiak, Zinn, Queckſilber, iſt die mit flüchtigmachenden Sauren gemiſchte alkaliniſche Erde, ſo man eigentlich Mercurialerde nennen ſollte, häufig anzutreffen; in ſale nativo urinæ, und jedem andern ſale, daraus ein Phosphorus bereitet wird. Die meiſten lymphatiſchen

Säfte der Thiere verbergen in ihrer Miſchung ein flüchtig gemachtes sal marinum, oder ammoniacaliſches Salz, ſo viele ſubtile, brennbare Theile und wäſſerige zugleich enthält. Wie groß iſt endlich die Menge der Körper im vegetabiliſchen Reiche, die eine dem flüchtigmachenden Sauren beygemiſchte terram antacidam haben. In Scordio, Dictamno, Allio, Rd. Selery, Acetos. prat., in Carduo Bened. Rd. Polypod., und ſehr vielen andern behält das mercurialiſche Weſen die herrſchende Miſchung. Ich könnte der Erdgewächſe, ſo durch eigene Experimente erforſchet, noch ungemein viele nennen, in denen der mercurialiſche Theil vom Sulphure die Obherhand hat. Jedoch es iſt meinem gegenwärtigen Zwecke weit gemäßer, zur Beantwortung der ſchweren Fragen fortzugehen, die bey einer wahren Einſicht in die erſten Anfänge der Körper, und in ihr inneres Weſen gar leichte mit Beſtimmung der nützlichſten practiſchen Wahrheiten können aufgelöſet werden.

§. 25.

Wer alſo Körper, beſonders im mineraliſchen Reiche, recht naturgemäß zergliedern will, der muß zuförderſt die flüchtige ſalzigte Erde, in welcher der Naturſchwefel wohnet, abſöndern, und hernach aus derſelben den **bindenden** und **weſentlichen**, den **flüchtigmachenden** und **weſentlichen** *Sulphur* in zweyen Subſtanzen trennen, in jeder von dieſen beyden iſt der **weſentliche** *Sulphur* als der **dritte** verborgen. Dieſe bey der Ausübung vorfallende Nothwendigkeit von einer bleibenden Vermiſchung hat die Araber eigentlich veranlaſſet, den bindenden Sulphur und Mercurium als wahre Grundweſen der Körper anzugeben, und des weſentlichen nicht zu gedenken, weil er ſowohl in bindenden Weſen, als Mercurio verborgen war. Das hierzu nöthige Verfahren habe §. 7. ausführlich und verſchiedentlich beſtimmet.

§. 26.

Wer die herrſchende Grundmiſchung in einem Körper durch angeſtellte Verſuche ſchon ausgeforſchet hat, oder von andern angegeben, aus Schriften, auch mündlichen Unterrichte erlernet hat, der kann mit einem recht ausgeſuchten Menſtruo, ein ſolches ſalſum volatile abſöndern, ſo zur neuen Gebährung der Körper ungemein fruchtbar iſt, und in dem die Abbildungskraft, entweder von flüchtigmachenden, oder bindenden, oder färbenden Sulphure am allerhäufigſten und am allerſtärkeſten wohnet; Nur muß er folgende practiſche Regeln in Acht nehmen.

1) **Ein bindendes und mercurialiſches** *Menſtruum* **löſet die beſte Kraft aus dem ſulphuriſchen färbenden auf.**

2) **Ein bindendes und öligtes** *Menſtruum* **dringt in das vollſtändigſte Leben des flüchtigmachenden** *Sulphuris* **ein.**

3) **Ein ſulphuriſches und mercurialiſches Auflöſungsmittel erhebet die beſte und vollkommenſte Kraft aus dem bindenden** *Sulphure.*

§. 27.

Die vollkommenen Kräfte der Körper, wenn ſie recht abgeſöndert werden, ſo äußern ſie wieder große und ſehr vortheilhafte Wirkung in andere Körper. Erſt überhaupt iſt denen vollkommenen und lebendigen Kräften die ſammelnde Kraft eigen, ſie wirken durch einen ſanften Zug in das, was ihre Kraft vergrößern, edler und feiner machen kann; indem ſie die Zwiſchenräume der feſten und flüßigen Theile mit ihrem Feuer ausdehnen, ſo ziehen ſie ſich ſelbſt durch ihr kaltes Luftweſen zuſammen, und dringen alſo mit einer elaſtiſchen Kraft in alle auch die engeſten Oefnungen ein. **Die ſich vermehrende, vervielfältigende und durchdringende Eigenſchaft**, nebſt der *Elaſticitæt* ſelbſt, iſt das vollſtändige Kennzeichen einer lebendigen Kraft. Die lebendige und vollkommene Kraft α) **des flüchtigmachenden** *Sulphuris*, befördert die aufſteigende Bewegung in allen Dingen, und erhält die natürliche Feuchtigkeit, und bewahret vor der Austrocknung, es läſſet nichts zähe werden, und durch Austrocknung gerinnen; es erhält alles in der natürlichen Flüßigkeit. Das flüchtigmachende Leben befördert die genaue Vermiſchung des bindenden und färbenden mit flüßigen und feſten. β) **Der weſentliche** *Sulphur* giebt Glanz, Farbe, Härte, und vermehret das vollkommene und reife Leben beſtändig, er erhält die natürliche Wärme, und den dichten mit Sammlung nach einem Centro verbundenen Zuſammenhang, und läſſet nichts durch innerliche Bewegung zerſtöret oder aufgelöſet werden, beſonders widerſtehet er der gährenden zerſtörenden Bewegung, und erhält das Beſtreben der Dinge nach allen Seiten gleich ſtark, und wenn die Kraft des belebenden Lebens (vitæ animantis) groß iſt, ſo befördert ſie die Bewegung der Dinge um ihre Axe, oder den Ausgang von dem Centro, und Rückgang nach denſelben, welche man zuſammen die Circulation nennet. γ) **Der bindende Lebensgeiſt** aber widerſtehet am mächtigſten der faulenden Auflöſung, er befördert das Niederſteigen der Miſchungen, daher wird alles flüchtige dadurch figiret, alles flüßige wird feſte, und ohne dieſes Leben wird alles verzehret; es ſchwinden alle Kräfte, mit dieſem Leben aber wird alles genährt und erhalten. Das niederſteigende Beſtreben der Körper mit der Dichtigkeit der zuſammenhängenden Theile, und ihrer Sammlung nach einem Centro, oder die natürliche Schwere der Körper, kömmt von weſentlichen und bindenden Sulphure zugleich.

§. 28.

Man kann die vollkommenen und lebendigen Kräfte §. 27. noch beſſer kennen lernen, wenn man ſie mit denen mehr leidenden oder gar zerſtörenden vergleicht.

I) Das Waſſer und Salz des flüchtigmachenden Sulphuris iſt allezeit mehr zerſtörend, aber nicht ſeine färbende Erde.

II) Des bindenden Sulphuris Erde iſt allezeit unvollkommen, aber der färbende Mercurius iſt belebend.

III) In dem weſentlichen Sulphure iſt alles wirkſam, daher ihn der Herr **Becher** mit Rechte animam reliquorum principiorum genennet hat. In dem urſprünglichen Schwefel iſt das Salz ungemein wirkſam. Die Erde und das Brennbare dieſes Salzes machen das Weſen des färbenden Sulphuris aus §. 22, 23. und alſo iſt in dem weſentlichen Sulphure lauter Kraft und Leben.

IV) In dem urſprünglichen Sulphure finden wir alles vereiniget, was in den übrigen Grundmiſchungen abgeſöndert iſt. Das mehr leidende iſt die Erde mit dem Waſſer, als das gelindeſte Weſen dieſes Schwefels, und erſcheint unter der Geſtalt einer fetten zähen Erde, oder ſchleimichten Waſſers, daher allezeit Brennbares bey dieſem Theile des urſprünglichen Sulphuris iſt. Das Salz in dieſem Sulphure iſt vollkommen, durchdringend, aber mäßig befeuchtend; hingegen das elementariſche Feuer aus dem Salze dieſes Sulphuris iſt nicht allein lebendig, ſondern auch ſehr wärmend und trocknend.

V) Licht und Feuer, auch Brennbares, ſind vollkommne, lebendige, ſulphuriſche Kräfte der bindenden und flüchtigmachenden Salze; die Luft aber iſt ein Mercurius des ſulphuriſchen Salzes.

VI) Das Waſſer iſt eine unvollkommene flüchtige Kraft des mercurialiſchen und ſulphuriſchen Salzes zugleich.

VII) Die Erde eine unvollkommene fixe Kraft des bindenden Salzes.

Und alſo ſind alle ſogenannte Elemente vollkommene oder unvollkommene, ſulphuriſche oder mercurialiſche, flüchtige oder fixe Kräfte der Salze §. 9.

Regiſter

der merkwürdigſten Sachen im fünften Bande der philoſophiſchen Abhandlungen.

Achteck (reguläres) wie es durch Parallellinien in gleiche Theile zu theilen. 170. 173.

Algebraiſche Rechnungen, nehmen allezeit die Einheit als poſitiv an. 12.

Æquator, wie ſeine Projection zu finden. 126.

Aerze, geringhaltige, wie ſie zu ſcheiden und aufzubereiten. 225. u. f.

Aerzſtuffe, reiche und arme, was ſie ſeyn. 228.

Aerzwäſchen ſind zweyerley Sieb- oder Setzwäſche, und Herdwäſche. 249.

Araber, ihre Grundſätze von den Anfangsgründen der Körper. 268.

Arſenicalweſen, was es ſey. 272.

Auflöſung des Zinks im Salzſauren. 257.

Balſamum Samech, was es ſey. 260.

Bechers Lehrſätze von den Anfangsgründen der Körper. 270.

Brennbare, findet ſich in dem ganzen Naturreiche 261. woraus es beſtehe. Ebend.

Durchlaßgräben bey Bergwerken. Siehe Schlemmgräben.

Eiſen, deſſen Härte wo ſie herkömmt. 275.

Erde, wie ihre Figur aus den Beobachtungen des Monds zu beſtimmen. 197. u. f.

Erde, halbflüchtige ſulphuriſche iſt die allgemeine anziehende. 264.
— — alcaliniſche. Sieh **Mercurialerde.**
Eulers (J. Albrecht) Aufloſung einiger geometriſchen Aufgaben. 165.
— — Verſuch die Figur der Erde durch Beobachtungen des Mondes zu beſtimmen. 197. u. f.
— — Nachricht von einer magnetiſchen Sonnenuhr. 215. u. f.
Exponenten der Verhältniſſe, Begriff davon. 25. u. f.

Flächen (geradlinichte) wie ſie durch Parallellinien in gleiche Theile zu theilen ſeyn. 167.
Fundamentalebene und **Fundamentallinie**, was ſie in der Projection der Kugel ſeyn. 114.

Geometrie, ihre Uebereinſtimmung mit der Analyſi. 49.
Gradirwaſſer zu Auflöſung der Metalle. 257. u. f.
Größe (unmögliche) was ſie ſey. 15.

Herdwäſche bey Sonderung der Aerze, wie ſie anzuſtellen. 250. u. f.
Hyberbel ſtellet ein Logarithmenſyſtem vor. 5. 50. u. f.
— — ihre Quadratur. 72.

Karſten (Johann Guſtavs) Abhandlung von Logarithmen verneinter Größen. 1. u. f. Theorie von den Projectionen der Kugel. 109. u. f.
Körper, ihre Anfangsgründe, Abhandlung davon. 253. u. f.
— — neun Arten derſelben. 265. ihre nächſten Anfänge 267. wie einzelne entſtehen. Ebendaſ.
Kugel, von ihren Projectionen. 109. u. f.

Logarithmen verneinter Größen, Abhandlung davon. 1. u. f. Eulers Tractat hierüber. 4. Alenberts Widerlegung. Ebendaſ.
— — drücken die Verhältniſſe aus. 19. haben eine nothwendige Verbindung mit ihren Zahlen. 20.
— — negativer Größen ſind unmöglich. 31. u. f.

Logarithmenſyſteme verſchiedene. 21. ihre Theorie. Ebendaſ. u. f. von möglichen Logarithmen negativer Zahlen. 38. u. f.

Magnetiſche Sonnenuhr, Beſchreibung davon. 215. u. f.

Materie, flüchtige und fixe der Körper. 257.

Mercurius, wie er aus den Metallen zu erhalten. 259.

Mercurialerde, woraus ſie beſteht. 277.

Mercurialiſches Waſſer. 258.

Meridian, wie deſſen Projection auf der Kugel zu finden. 127. 130. 147. 151.

Metalle enthalten ſalz= ölicht= und wäſſerichte Theile. 257.

Mond, wie aus deſſen Beobachtungen die Figur der Erde zu beſtimmen. 197. und ferners.

Multiplication (algebraiſche) Regeln davon. 12.

Paraboliſche Fläche, wie ſie durch Parallellinien in gleiche Theile zu theilen. 188. u. f.

Paracelſus (Theophraſtus) ſtatuiret andere Anfangsgründe der Körper als die Araber. 269.

Parallelkreis, wie deſſen Projection auf der Kugel zu finden. 135. 137. 153. 159.

Phosphorus, woraus er bereitet werde. 261.

Planen, was ſie bey Bergwerken bedeuten. 252.

Pochhaufwerke, wie ſie auszutragen. 238.

Pochgräben, was ſie ſeyn. 238.

— — ihre bisherige fehlerhafte Anlage. 239. Vorſchlag einer beſſern. 243. u. f.

Pochſteiger bey Sonderung der Aerze, wie er ſich zu verhalten. 251.

Pochwerke, wie dadurch die geringen Aerze aufzubereiten. 230. Beſchreibung derſelben. Ebend.

— — Maſchine dazu iſt fehlerhaft. 231. wie ſie zu verbeſſern. 232. u. f.

Projection der Kugel, Abhandlung davon. 109. u. f. hießen vor Alters Planiſphæria und Aſtrolabia. 112.

Projection, orthographiſche und ſtereographiſche, wie ſie von einander unterſchieden ſeyn. 112.
— — des Aequators, wie ſie zu finden. 126. 163.
— — eines Meridians, wie ſie zu finden. 127. 130. 147. 151.
— — eines Parallelkreiſes, wie ſie zu finden. 134. u. f. 137. 153. 159.
Proportionallinie, die aus zweyen mit ſich ſelbſt multiplicirten Linien beſteht, wie ſie geometriſch zu finden. 13. u. f.

Relatio quantitativa und qualitativa der Größen, Regel davon. 11. u. f.
Rüdigers (D. Anton.) Abhandlung von den Anfangsgründen der Körper. 253. u. f.

Sal falſum mercuriale. 258.
Salz, einfaches in Metallen. 258. findet ſich in allen Körpern. 260.
Salz und Oel, dadurch werden in allen Erdgewächſen und Thieren Waſſer und Erde miteinander vereiniget.
— — iſt der Sammlungspunct von Elementen. 261.
Scheidung geringhaltiger Aerze bey Bergwerken, Abhandlung davon. 225. u. f.
Salz des Urins, daraus wird der Phosphorus gemacht. 261.
Scheids (Karl Auguſt) Abhandlung von Scheidung und Ausbereitung geringhaltiger Aerze. 225. u. f.
Schlemmgräben bey Bergwerken, was ſie ſeyn. 240.
Schwefel des Naturſalzes was er ſey. 262.
— — figirender, wie er entſtehe. 263.
— — kann allein als ein Grundweſen der Körper nicht angenommen werden. 268.
Seifenhaftes Weſen, darinnen beſteht die allen Körpern eigene Kraft. 256.
Sezwäſche bey Aerzen. Sieh Siebwäſche.
Siebwäſche bey Aerzen, was ſie ſey. 249.
Sonnenuhr (magnetiſche) Beſchreibung davon. 215. u. f.
Stuffengerinne, eine neue Anlage davon. 244.

Tartarus vegetabilis enthält keinen Arſenik. 272.

Verhältniſſe, einfache und zuſammengeſetzte. 19. werden durch Logarithmen ausgedruckt. Ebendaſ.

— — ihre Ausmeſſung. 27. negative und poſitive ſind nicht einander entgegen geſetzt. 30.

Verneinte Größe, Begriff davon. 4. 7. u. f. ſind es in Anſehung ihrer Lage und Stellung. 9. u. f.

Viereck (reguläres) wie es durch Parallellinien in gleiche Theile zu theilen. 168.

— — (irreguläres) wie es durch Parallellinien in gleiche Theile zu theilen. 176.

Wäſſerichte Theile finden ſich in allen Erdgewächſen. 255.

Waſchherd bey Sonderung der Aerze, beweglicher, wie er beſchaffen ſeyn müſſe. 251.

Wurzeln gerader Exponenten aus negativen Größen, Begriff davon. 15. von Quadraten, die poſitiv und negativ ſind. 17. 35.

Zink, deſſen Auflöſung im Salzſauren. 257.

Zirkelfläche, wie ſie durch Parallellinien in gleiche Theilt zu theilen. 183. u. f.

Pet. von Oſterwald

Entwurf

einer neuen

Kalenderforme.

Eingang.

§. 1.

Ich wage es, eine neue Kalenderforme vorzuſchlagen; und ich wage eben darum nichts geringes, weil dieſer Gegenſtand die ganze Chriſtenheit angeht. Ich ſage deswegen nicht viel neues; denn vor mir haben ſchon andere auf eben den Vorſchlag gedacht, den ich machen werde. So viel ich aber weis; ſo iſt keiner davon dem Grunde der Sache nahe genug getretten: darum ſind auch ihre Vorſchläge nicht in die Betrachtung gezogen worden, welche ſie allerdings verdienet hätten. Unſere akademiſchen Geſetze wollen, daß ſich die Mitglieder entweder um Erfindung neuer, oder um neue Anwendungen bekannter Wahrheiten bekümmern ſollen. Sage ich hier nun nichts neues, ſo ſind doch ganz gewiß meine Sätze neue Anwendungen bekannter Wahrheiten, die ich wenigſtens mit ſolchen Gründen zu beſtärken verhoffe, welche in Anſehung ihrer Gewißheit nicht den geringſten Zweifel zurück laſſen werden.

§. 2.

Die Streitigkeiten, welche ſich bey Einführung des gregorianiſchen Kalenders ereignet haben, ſind aller Welt bekannt, und man weis, wie die proteſtantiſchen Stände des Reichs, nachdem ſie den julianiſchen Kalender von An. 1582 an bis 1700 beybehalten, endlich in dieſem letzten Jahre die gregorianiſche Jahresform zwar angenommen, in Beſtimmung der Frühlingsnachtgleiche, und des nächſt darauf folgenden öſterlichen Vollmonds aber alle cycliſche Rechnungen verworfen, und dafür die aſtronomiſche nach den rudolphiniſchen Tafeln, auf den Meridian zu Uranienburg gerichtet, eingeführet haben.

§. 3.

Die Gründe, worauf dieſe Kalenderrechnung gegründet iſt, ſind zwar richtig. Die Herren Proteſtanten wollten dem Schluß des erſten allgemeinen nicäniſchen Concilii genau nachleben, welches die Oſterfeyer auf den Sonntag nach dem erſten Frühlingsvollmond geſetzet hat.

Allein die aſtronomiſche Rechnung, welche ſie erwählet haben, iſt nicht jedermans Thun, der Kalender machet. Daher iſt es auch gekommen, daß die Kirche von allen Zeiten her ſo viel auf die cycliſchen Rechnungen gehalten hat, weil auch die Einfältigſten ſich leicht darein zu finden wiſſen. a)

---

a) Das allgemeine Concilium zu Nicea hat an nichts weniger als an den aſtronomiſchen Calcul, den öſterlichen Vollmond zu beſtimmen, gedacht. Die Väter nahmen vielmehr den metoniſchen Mondszirkel von 19 Jahren an, welcher auch hernach in der Kirche allezeit zur Berechnung des öſterlichen Vollmonds gedienet hat; ſo fehlerhaft er immer iſt, wie wir unten mit mehrerm ſehen werden.

§. 4.

Zudem ſind die aſtronomiſchen Tafeln verſchieden, weil eine jede das tropiſche Jahr bald größer bald kleiner annimmt, als die andere; und daher kömmt es auch, daß der Ort der Sonne, oder eines Planeten, den man z. E. nach den delahiriſchen Tabellen berechnet, um 6. 7. und mehr Minuten in der Zeit von derjenigen differiret, die man nach andern aſtronomiſchen Tabellen z. E. nach den caßiniſchen, lalandiſchen ꝛc. berechnet.

§. 5.

Hernach will der Schluß der proteſtantiſchen Reichsſtände vom 23ſten September 1699, daß der wahre Vollmond nach den rudolphiniſchen Tafeln zum Grund der Oſterfeyer genommen werden ſolle; wo hingegen der gregorianiſche Kalender ſich auf die mittleren Vollmonde gründet, die von den wahren um 5. 6. bis 12. Stunden, der Zeit nach, unterſchieden ſeyn können.

§. 6.

Hierinnen ſcheint der gregorianiſche Kalender den Vorzug zu haben; indem gewiß iſt, daß die Kirche von allen Zeiten her auf die mittleren Vollmonde, und nicht auf die wahren geſehen hat: da beſonders in den erſten Zeiten die heutigen Centergleichungen nicht bekannt wären; die Juden auch in Berechnung ihrer Oſterfeyer ſich nach den mittlern, und nicht nach den wahren Vollmonden zu richten pflegen, wie die Einrichtung ihres Kalenders offenbar zu erkennen giebt. a)

---

a) Das nicäniſche Concilium kann auch nicht auf die wahren Vollmonde geſehen haben, weil daſſelbe nach der obigen Anmerkung a zum 3. §. die neunzehnjährige cycliſche Rechnung erwählet hat, nach welcher gewißlich keine andere als die mittlern Vollmonde verſtanden werden konnten.

§. 7.

Und wozu ſollte es dienen, oder was wäre man dadurch gebeſſert, wenn nun der wahre Vollmond für öſterlich gehalten würde, da ſich derſelbe zwar freylich in dem nämlichen Zeitpunkt, aber nicht allenthalben in gleicher Stunde ereignen kann? Wer kann verhindern, daß in dem Augenblick, wenn man zu Paris 4 Uhr zählet, zu Rom nicht 4 Uhr 41'. und zu Peckin in China 11 Uhr 37' gezählet werden müſſen? Wenn demnach der wahre Vollmond zu Paris ſich um 8 Uhr Samſtag Abends nach dem Aequinoctio ereignete, ſo wäre der folgende Sonntag nach dem Schluß des Concilii Nicæni der Oſtertag. Weil aber zu Peckin eben der Vollmond erſt den Sonntag früh um 3. Uhr 37'. einfällt; ſo müßten die daſelbſtigen Chriſten, wenn ſie ſich genau an das nicäniſche Decret halten wollten, ihre Oſtern 8. Tage ſpäter feyern, als die zu Paris: und das iſt ganz gewiß die Abſicht der allgemeinen Kirche niemal geweſen, die das Oſterfeſt auf dem ganzen Erdboden an dem nämlichen Tage von allen Chriſten gefeyert wiſſen wollte.

Erſter Abſchnitt

Von den Fehlern des gregorianiſchen Kalenders.

§. 8.

Ich will darum die Fehler nicht rechtfertigen, die man bey der gregorianiſchen Kalendereinrichtung findet. Ueber dieſe Sache iſt ſo viel geſchrieben worden, daß es Eckel erwecken würde, wenn ich mich darüber umſtändlich herauslaſſen wollte. So viel iſt aber gewiß, daß ſelbſt die Urheber dieſer Einrichtung die Fehler davon nicht haben läugnen können. Man hat darinnen des Frühlings Aequinoctium auf den 21ten März feſt zu ſetzen gedacht, a) welches doch nach der gregorianiſchen Intercalation zuweilen auf den 19ten zurück tritt, und zuweilen bis auf den 22ten März weiter hinaus geht. Geſetzt nun, der Vollmond fiele den Tag nach dem 19ten, nämlich den 20ten März ein, ſo wäre er in der That öſterlich, und gleichwohl könnte man ihn nach dem gregorianiſchen Kalender nicht dafür halten, weil er ſich vor dem 21ten März ereignet, und das Oſterfeſt müßte in ſolchem Falle erſt vier Wochen hernach bey der folgenden Lunation gefeyert werden. Ein Exempel davon haben wir beym Jahre 1666. Da ereignete ſich das Aequinoctium zu Rom den 2ten März um 9. Uhr, 20'. in der Frühe, und der mittlere Vollmond eben den Tag um 2. Uhr 17' Nachmittag. Er war alſo ganz gewiß öſterlich b), und weil der Sonntagsbuchſtab in dieſem Jahre C. war, der 20ten März aber den Buchſtaben B. hat; ſo war dieſer ein Samſtag, folglich wäre der 21te März der wahre Oſtertag geweſen. Nach dem gregorianiſchen Kalender aber wurde Oſtern erſt den 25ten April gefeyert, weil die Epacte 24. den Neumond im Märzen auf den 6ten, und folglich den Vollmond auf den 20ten wies, der, weil er vor dem 21ten fiel, nach dem gregorianiſchen Syſtem für keinen Oſtervollmond

---

a) Die Urheber des gregorianiſchen Kalenders thaten dieſes darum, weil ſie meynten, das Aequinoctium wäre zu Zeiten des nicäniſchen Concilii am 21. März geſtanden. Der aſtronomiſche Calcul zeiget aber, daß es ſich im Jahre 325, wo dieſes Concilium gehalten wurde, ſchon den Tag vorher, nämlich den 20ten März etliche Stunden Nachmittag begeben hat.

b) Um ſo mehr, da ſich der wahre Vollmond 3. Stunde darnach ereignete.

mond gehalten wurde. Eben ſo iſt es beym Jahre 2095. Denn da begiebt ſich das Aequinoctium den 20ten März um 8. Uhr, 39′. Vormittag, und der mittlere Vollmond eben den Tag um 10. Uhr Nachmittag: und weil in dieſem Jahre der Sonntagsbuchſtab B. iſt, ſo dem 20ten März zukömmt, ſo müßte Oſtern 8. Tage darnach, nämlich den 27ten März, gefeyert werden. Nach den gregorianiſchen Kalender aber fällt der öſterliche Vollmond in dieſem Jahre auf den 19ten April, und Oſtern auf den 24ſten.

§. 9.

Noch ein anderer Fehler ſteckt in den gregorianiſchen Epakten, die den mittleren Vollmond zuweilen um einen Tag ſpäter weiſen, als er ſich wirklich zuträgt: fällt nun z. E. ſolcher Vollmond auf einen Samſtag, und die Epakte zeigt auf den Sonntag, ſo wird Oſtern um 8 Tage ſpäter gefeyert, als es ſeyn ſollte. Ein Beyſpiel hievon haben wir beym Jahre 1724. Denn da fiel das Aequinoctium zu Rom auf den 22ſten März um 10. Uhr, 38′. Vormittag, und der nächſt folgende mittlere Vollmond auf den 8ten April um 1. Uhr 26′. Nachmittag. Der Sonntagsbuchſtab in dieſem Jahre war nach den Schalttag A: und weil der 8te April G. hat; ſo war er dießmal ein Samſtag: folglich hätte Oſtern, dem nicäniſchen Kirchenſchluſſe zu Folge, den folgenden 9ten April gefeyert werden ſollen. Nun gehe man in den gregorianiſchen Kalender, ſo finden wir zu der goldnen Zahl 15. im Epaktenzirkel, die Epakte 4.; dieſe (nach der gregorianiſchen Epakteneinrichtung) von 30 abgezogen geben den Tag des Neumonds im Märzen nämlich den 26: wenn man hierzu 14 thut, ſo kömmt man mit dem Vollmonde auf den 9ten April: weil aber derſelbe ein Sonntag war, ſo mußten die Katholiſchen ihre Oſtern 8. Tage darnach halten.

An. 1744. fiel der öſterliche mittlere Vollmond den 28ten März um 2. Uhr, 44′. Nachmittag. Dieß war ein Samſtag, weil der 28te März C hat, der Sonntagsbuchſtab aber dießmal D. war; Oſtern hätte demnach den 29ten März ſeyn ſollen. Wir Katholiſchen feyerten ſie aber erſt 8. Tage darnach, weil unſere gregorianiſche Epakte 15. den Vollmond auf den 29ten ſelbſt zeigte, der nicht gelten konnte, weil er ein Sonntag war.

Jedoch genug von den ſichtbareſten Fehlern des gregorianiſchen Kalenders; wir wollen nun von unſerer neuen Kalenderforme reden.

Zweyter Abſchnitt.

Von der Einſchaltungsart des neuen corrigirten Kalenders.

§. 10.

Schon zu den Zeiten, da die Proteſtanten ihren Kalender einrichten wollten, ſchlugen einige aus ihnen die gelaleiſche Art einzuſchalten vor, da man nämlich ſechsmal nach einander im 4ten Jahr, und das ſiebente mal im 5ten Jahre einen Tag einſchalten ſollte; a) dieß hätte einen Zirkel von 29 Jahren abgegeben. Andere wollten, man ſollte ſiebenmal nach einander im 4ten, und das achte mal im 5ten Jahre einſchalten, wordurch ein Zirkel von 33. Jahren entſtehet. Wiederum andere meynten, man

---

a) Dieſe Einſchaltungsart hat ihren Namen vom perſiſchen Sultan Gelal. Die Perſianer haben im Jahre 1079 angefangen, ſich derſelben zu bedienen.

ſollte beyde Cylcos mit einander auf gewiſſe Art combiniren. Die proteſtantiſchen Reichsſtände verwarfen aber alle dieſe Vorſchläge, weil ſie meynten, daß ſie ſo lange impracticabel wären, als man die wahre und eigentliche Größe des tropiſchen Jahres nicht genau wußte. Sie erwählten die aſtronomiſche Rechnung, ohne zu bedenken, daß dieſe eben auch hypothetiſch iſt, und ſich auf eine voraus geſetzte Größe des tropiſchen Jahres gründet.

§. 11.

Wenn man aber den Sachen recht auf den Grund geſehen hätte, ſo würde man gefunden haben, daß diejenigen, welche den 33jährigen Zirkel vorſchlugen, dem Ziel ſehr nahe tratten. Ich werde im folgenden überzeugend darthun, daß es in der Welt keine bequemere Art einzuſchalten als dieſe giebt, welche nicht nur mit dem Himmel am beſten übereinſtimmt, das Aequinoctium an dem nämlichen bürgerlichen Tage erhält, und zugleich die Kalenderrechnung überaus bequem und leicht, und weit leichter als die gregorianiſche machet; man mag nun aus den verſchiedenen Syſtemen des tropiſchen Jahres erwählen, welches man immer will.

§. 12.

Denn nach dieſen verſchiedenen Syſtemen enthielte das größte tropiſche Jahr 365 Tage, 5 St. 49 Min. und 20 Secunden, das kleinere aber 365 Tage, 5 St. 48 Min. 45 Secund. a) nehmen wir zu erſt das größte von 365 Tagen, 5 St. 49 Min. 20 Sec. ſo machen dieſe in 33 Jahren ſo viel complete gemeine Jahre zu 365 Tagen, und darüber 8 Tage, und 8′. Und 33 corrigirte Jahre machen aus 33 gemeine Jahre, 8 Tage, folglich differiret

---

a) Sieh des Herrn Lalands Aſtronom. Lib. IV. §. 588.

feriret ein ſolcher 33jähriger Zirkel von eben ſo viel tropiſchen Jahren blos um 8. Minuten. Nehmen wir jetzt das kleinſte tropiſche Jahr von 365 Tagen, 5 St. 48'. 45". ſo machen 33 derſelben eben ſo viel gemeine Jahre, und 8 Tage weniger 11'. 15". um welche dieſelbe von 33. corrigirten bürgerlichen Jahren differiren. Man mag alſo aus den bisherigen Obſervationen eine Größe des tropiſchen Jahres annehmen, welche man immer wolle; ſo betraget der Unterſchied in 3 Jahren nicht über 1. Minute, folglich in 4000 Jahren nicht über einen ganzen Tag.

§. 13.

Berechnet man hingegen den Zirkel von 29 Jahren, worinnen 7 Tage eingeſchaltet würden; ſo ergiebt ſich ein Unterſchied von 50'. 40". um welche dieſelben kleiner ſind, als 29 tropiſche Jahre, wenn man das größte derſelben zu 365 Tagen, 5 Stunden, 19'. 20". annimmt. Nimmt man aber das kleinſte zu 365 Tagen, 5 Stunden, 18'. 45". ſo beträgt der Unterſchied doch noch 33'. 45". Bey einem noch kleineren Zirkel z. E. von 25 Jahren würde der Unterſchied noch größer werden.

§. 14.

Vergleichen wir nun auch einen größeren Zirkel z. E. von 37 Jahren, worinnen 9 Tage eingeſchaltet würden, mit 37 der größten tropiſchen Jahren, ſo ſind jene um 34'. 40". und gegen 37 der kleinſten tropiſchen Jahren gehalten um 56'. 15". zu groß: und um deſto größer würde der Unterſchied ausfallen, je größer man den Zirkel annehmen wollte. Es iſt demnach eine ausgemachte Wahrheit, das kein anderer einfacher Zirkel von bürgerlichen Jahren der aſtronomiſchen näher tretten könne, als der 33jährige, wenn auch die eigentliche und wahre Größe des tropiſchen

ſchen Jahres bis auf eine halbe Secunde nahe bekannt wäre, welches man erſt nach 5 biß 600 Jahren erleben wird.

§. 13.

Wir wollen einsweilen die Größe des tropiſchen Jahres zu 365 Tagen, 5 Stunden, 49 ′. annehmen, wie die Urheber des gregorianiſchen Kalenders gethan haben, ſo machen 33 ſolche Jahre, 33 gemeine Jahre zu 365 Tagen gerechnet, 7 Tage, 23 Stunden, und 57 Minuten; weil nun unſer corrigirter Jahreszirkel 33 gemeine Jahre und 8 Tage enthält, ſo iſt er um 3 Minuten größer als 33 tropiſche Jahre, folglich geht das Aequinoctium nach Verfluß eines Zirkels um 3 Minuten zurück, welches erſt in 15800 Jahren einen ganzen Tag ausmachen würde, wenn das tropiſche Jahr haargenau ſo viel austrüge, als wir angenommen haben.

Dritter Abſchnitt.

Wie im corrigirten Kalender die Sonntagsbuchſtaben für jedes gegebene Jahr zu finden.

§. 14.

In unſerm Zirkel ſind alſo das 4te, 8te, 12te, 16te, 20te, 24te, 28te und 33te Schaltjahre: wenn man alſo wiſſen will, ob ein vorgegebenes Jahr, vom Anfange des 1ten Zirkels angerechnet, ein Schaltjahr oder ein gemeines ſey, ſo dividiret man es mit 33, wenn ſich das, was nach der Diviſion übrig bleibt, geradeauf mit 4 dividiren läßt, ſo iſt das vorgegebene Jahr ein Schaltjahr, 32 allein ausgenommen, welches in unſerm Zirkel ein gemeines Jahr iſt.

§. 15.

Weil 33 Jahre unſers Zirkels 33 gemeine Jahre zu 365 Tagen, das iſt über die completen Wochen, noch 33 Tage, und 8 Schalttage, zuſammen 41 Tage, oder 5 complete Wochen und 6 Tage ausmachen, ſo geht der Jahresanfang nach 33 Jahren um um 1 Tag zurück, folglich der Sonntagsbuchſtab um einen weiter vor ſich, ſo daß, wenn das erſte Jahr im Zirkel den Sonntagsbuchſtab A. gehabt hätte, ſo würde das 1ſte im 2ten Zirkel den Sonntagsbuchſtaben B. haben. Dieß giebt nun eine überaus leichte Berechnung der Sonntagsbuchſtaben, welche die julianiſche ſowohl als die gregorianiſche gar weit übertrift, wie wir bald ſehen werden.

§. 16.

Wir wollen die Epoche unſerer Jahreszirkel auf das 1600te der gemeinen Zeitrechnung ſetzen, ſo daß das Jahr 1600 für das 0 Jahr derſelben gehalten werde. In dieſem Jahre war der Sonntagsbuchſtab nach dem Schalttage A. Wenn man demnach den Sonntagsbuchſtaben für ein gegebenes Jahr finden will, ſo zieht man erſtlich 1600 davon ab. 2) Was übrig verbleibt, dividiret man mit 33, ſo zeigt der Quotient an, wie viel Zirkel von An. 1600 verfloſſen ſind, folglich um wieviel der Sonntagsbuchſtab weiter vor ſich gegangen iſt. (§. 15.) 3) Was nach der Diviſion mit 33 übrig verbleibt, zeigt das laufende Jahr im Zirkel und zugleich an, wieviel Jahre über die completen Zirkeln von An. 1600 an bis auf das gegebene Jahr verfloſſen ſind: weil nun der Sonntagsbuchſtab nach einem gemeinen Jahr um 1, und nach einem Schaltjahre um 2 zurück geht; ſo ſehe man, wieviel Schaltjahre im Ueberreſte ſtecken, a) ſo viel addire man dazu; ſo zeigt die Summe an, um wieviel der Sonntagsbuchſtab zurück gegangen iſt. 4) Dieſe Zahl ziehe man von dem Quotienten, oder dieſen von jener ab, ſo zeigt der Reſt, um wie viel der Sonntagsbuchſtab entweder vor ſich, oder zurück gegangen. Iſt der Quotient größer, ſo iſt er um ſo viel vor ſich gegangen, als beyde Zahlen von einander differiren; iſt aber der Quotient kleiner, ſo iſt er um ſo viel zurück gegangen: man wirft demnach 7 ſo oft davon weg, als ſich thun läßt, ſo giebt die verbleibende Zahl den Rück- oder Vorgang der Sonntagsbuchſtaben.

§. 17.

Nun ordne man die Buchſtaben folgender Geſtalt:

0	6	5	4	3	2	1	0
A	B	C	D	E	F	G	A
0	1	2	3	4	5	6	0

wo die untern Zahlen den Vorgang, und die obern den Zurückgang der Sonntagsbuchſtaben anzeigen; ſo wird man gleich finden, welcher Sonntagsbuchſtab dem gegebenen Jahre zukomme. Wenn daſſelbe ein Schaltjahr iſt, ſo gilt der gefundene Buchſtab nach den Schalttage, das iſt vom 25ten Febr. an bis zu Ende des Jahres, und der nächſtfolgende Buchſtab gilt vor dem Schalttage, nämlich von dem erſten Jänner an bis auf den 24 Febr.

---

a) Wenn der Ueberreſt aus lauter gemeinen Jahren beſtünde, ſo würde der Sonntagsbuchſtab um ſo viel zurück gegangen ſeyn, als Einheiten darinen ſtecken. Bey jedem Schaltjahre aber geht er noch weiter um einen Tag zurück;

Febr. denn dieſer iſt der Schalttag, welcher mit dem folgenden 25ten Febr. einerley Buchſtaben führet.

§. 8.

Man fragt z. E. was das 1769ſte Jahr im corrigirten Kalender für einen Sonntagsbuchſtaben habe:

ſo zieht man von	1 7 6 9	
	1 6 0 0	ab. (§. 16. n. 1.)
Verbleiben	1 6 9	5 Quotient.
Dividiret mit 33.	1 6 5	§. 16. n. 1.
Iſt der Ueberreſt	4	ein Schaltjahr.
darinn ſind Schaltj.	1	(§. 16. n. 3.)
Thut	5	dieſe
Vom Quot.	5	abgezogen
Verbleibt	0	

Alſo iſt der Sonntagsbuchſtab A, welcher nach dem Schalttage und B. vor demſelben gilt.

Oder das Jahr		1 7 6 4	
		1 6 0 0	
		1 6 4	4 Quotient.
	3 3	1 3 2	
Verbleiben		3 2	ein gemein Jahr.

Ver=

---

rück; folglich iſt klar, daß man zu dem Ueberreſt ſo viel Einheiten hinzuthun müße, als Schaltjahre darinen ſtecken, um zu wiſſen, wieviel der Sonntags-Buchſtab von dem letzten Jahre an des nächſt vorher completirten Zirkels zurück gegangen iſt.

Verbleiben		32	ein gemein Jahr
darinn ſind Schaltj.		7	
Thut		39	Tage.
Den Quotient.		4	abgezogen,
Verbleiben		35	Tage zurück.
Weggeworfen			
7 fünfmal, oder		35	
Verbleibt		0	

Alſo iſt der Sonntagsbuchſtab A. das ganze Jahr hindurch.

wiederum das Jahr		1762	
		1600	
	33	162	4 Quotient.
		132	
Verbleibt		30	ein gemein Jahr.
darinn ſind Schaltj.		7	
Thut		37	
Den Quotient.		4	abgezogen.
Verbleiben		33	
Weggeworfen			
7 viermal thut		28	
Verbleibt		5	zurück C.
Oder das Jahr		1770	
		1600	
	33	170	5 Quotient.
		165	
Verbleibt		5	ein gemein Jahr

Sind

Sind verblieben	5	
Darunter Schaltj.	1	
Thut	6	Tage.
	5	Quotient.
	1	Zurück G.

§. 19.

Und dieſe Berechnung geht 1) auf ewige Zeiten fort, wo hingegen im gregorianiſchen Kalender alle hundert, bisweilen zwey hundert Jahre, eine neue Ordnung des Sonnenzirkels gemacht werden muß. Unſere Rechnung der Sonntagsbuchſtaben ſetzt 2) nichts vor aus, ſondern gründet ſich nur auf den 33jährigen Zirkel, die gregorianiſche hingegen nimmt das erſte Jahr der gemeinen Zeitrechnung für das 10te des Sonnenzirkels an: man muß alſo zum gegebenen Jahre 9 addiren, und die Summe mit 28 dividiren, alsdann zeigt der Ueberreſt an, was das vorgegebene für ein Jahr im Sonnenzirkel ſey, und dieß muß erſt in demjenigen Sonnenzirkel, der für das gegebene Jahrhundert gilt, aufgeſuchet werden, um den ihm zukommenden Sonntagsbuchſtaben zu finden. Selbſt im julianiſchen Kalender wird ein ſolcher Sonnenzirkel erfordert, wiewohl er da beſtändig iſt. In unſerm Syſtem aber braucht es gar keinen 28jährigen Zirkel, um die Sonntagsbuchſtaben zu finden, ſondern die bloſſe Stellung der 7 Buchſtaben.

◆

Vierter Abſchnitt.

Wie im corrigirten Kalender die Zeit des Frühlings-Æquinoctii für jedes gegebene Jahr zu finden.

§. 20.

Außer dem, daß man den Sonntagsbuchſtaben für ein jedes gegebenes Jahr, nach unſerer Wochenreyhe, finden muß, wird noch im chriſtlichen Kalender erfordert, daß man die Zeit der Frühlingsnachtgleiche, und des nächſt darauf folgenden Vollmondes genau beſtimme, weil, wie gedacht (§. 2.), der Schluß des allgemeinen Concilii zu Nicäa dahin geht, daß Oſtern allezeit an dem Sonntage nach dem Vollmond, welcher zu nächſt auf das Frühlings-Aequinoctium folget, gefeyert werden ſoll.

§. 21.

Der gregorianiſche Kalender ſetzet dieſes Æquinoctium beſtändig auf den 21ten März: wir haben aber ſchon oben gezeiget, (§. 8.) daß es zuweilen auf den 19ten und hingegen auch zuweilen auf den 22ten März fällt. Die gregorianiſche Epakte zeiget auch den Vollmond nur auf ganze Tage, und zwar öfters einen Tag ſpäter an, als er ſich wirklich ereignet. Nach unſerer Kalenderforme aber laſſen ſich beyde, das Frühlingsäquinoctium ſowohl, als der mittlere Oſtervollmond auf Stunden und Minuten beſtimmen, folglich kann nach ſolcher das wahre Oſterfeſt niemal verfehlet werden, und man hat gleichwohl dabey keine aſtronomiſche ſondern eine bloſſe cycliſche Rechnung nöthig. Wir wollen erſtlich ſehen, wie die wahre Zeit des Frühlings-Æquinoctii zu fingen ſey.

§. 21.

Im Jahre 1600 ereignete ſich daſſelbe zu Paris nach den delahiriſchen Tabellen den 20ten März um 8 Uhr, 44′ 40″ Vormittag; und weil der Unterſchied der Meridianen zwiſchen Rom und Paris 41′ 20″ beträgt; a) ſo hat das Frühlings Aequinoctium im Jahre 1600 zu Rom den 20ten März um 9 Uhr 26′ in der Frühe, oder, nach der aſtronomiſchen Zeit, den 19ten März um 21 Uhr 26′ ſich zugetragen.

§. 22.

Weil nun das tropiſche Jahr 365 Tage, 5 Stunden, 49′ enthält; (§. 13.) ſo ereignet ſich das Frühlings-Æquinoctium um 5 Stunden, 49 Min. ſpäter im folgenden, als im vorhergegangenen Jahre. Wenn es z. E. in einem Jahre den Nachmittag um 2 Uhr einfällt; ſo trägt es ſich im folgenden Jahre um 7 Uhr, 49′ Nachmittag zu, wohl verſtanden, wenn alle beyde gemeine Jahre ſind. Dieß thut in 5 gemeinen Jahren einen Tag, 5 Stunden, 5′; in 9 Jahren 2 Tage, 4 Stunde, 21′; in 13 Jahren 3 Tage, 3 Stunde, 37′ ꝛc. wenn man voraus ſetzet, daß alle dieſe Jahre zu 365 Tagen wären. Gleichwie aber in 5 Jahren ein Tag, in 9 Jahren zween Tage, in 13 Jahren drey Tage ꝛc. eingeſchaltet werden; ſo iſt klar, daß, wenn man die Schalttage wegwirft, allezeit das Aequinoctium auf den nämlichen Tag fallen müſſe, an welchem es im Anfange unſerer Æræ geſtanden,

und

---

a) Sieh des Herin Caſſini aſtronomiſche Tabelle. p. 6.

und daß nur die Stunden und Minuten übrig bleiben, die durch die Multiplication heraus kommen.

§. 23.

Wenn man demnach für ein jedes gegebenes Jahr die Zeit des Frühlings-Æquinoctii beſtimmen will; ſo zieht man 1600 wie oben (§. 16.) davon ab; den Ueberreſt dividiret man mit 33. Was nach der Diviſion übrig verbleibt, multipliciret man mit 5 Stunden, 49 Min. oder 349 Min. Das Produkt giebt ſo viel Minuten, die man zu Stunden, und dieſe zu Tagen machet: das iſt, man dividiret das Produkt mit 60, und den heraus kommenden Quotienten mit 24. Was an Stunden und Minuten über die weggeworfenen ganzen Tage übrig bleibt, das addiret man zu 19 Tagen, 21 Stunden, 26 Minuten, ſo zeigt die Summa den Tag, die Stunde und Minute im Märzen an, an welchem ſich das Aequinoctium im vorgegebenen Jahre ereignet.

§. 24.

Man fraget z. E. an welchem Tage, Stunde und Min. das Frühlingsäquinoctium im Jahre 1762 ſich zu Rom begiebt:

ſo zieht man von	1762	
das 0 Jahr der Æræ	1600	ab.
Verbleiben	162	4 Quotient.
Dividiret mit 33 —	139	
Verbleiben	30	

Minuten	349	
Multipliciret	30	
Geben ein Produkt	10470	Minuten.
Man dividire	10470	174 Stunden.
mit 60.	42(30	
mit 24	174 168	7 Tage.
	6	Stunden.

Hier haben wir alſo über 7 Tage noch 6 Stunden und 30 Minuten. Man addire alſo

zu 19 Tagen	21 St.	26 Min.
	6 St.	30 Min.

ſo kommen heraus 20 T. 3. St. 56 Min. folglich ergiebt ſich das Aequinoctium den 20ten März um 3 Uhr, 56 '. Nachm.

§. 25.

Wenn das vorgegebene Jahr ein Schaltjahr iſt; ſo nimmt man von der gefundenen Zeit 1 hinweg.

Wir wollen z. E. das 1760 Jahr nehmen: ſo haben wir folgenden Calcul.

	1760	
	1600	
33	160 132	4 Quot.
Verbleiben	28	

Min.	3 4 9	
Multipliciret mit	2 8	
	2 7 9 2	
	6 9 8	Min.
Summa	9 7 7 2	162 Stunden.
Dividiret mit 6 0	3 1 (5 2	
	1 6 2	6 Tage.
mit 2 4	1 4 4	
	1 8	Stunden.

19 T.	21 St.	26′.
—	18	52′.
20 T.	16 St.	18
1		
19	16	18

Alſo ergiebt ſich in dieſem Jahre das Aequinoctium zu Rom den 19ten März um 16 Uhr 18′. aſtronomiſcher Zeit, das iſt, den 20ten März um 4 Uhr 18′. Frühe.

§. 26.

Will man aller Rechnung überhoben ſeyn: ſo darf man ſich nur folgender Tabelle bedienen, welche durch die bloſſe Addition entſpringt; da man immer zu der vorhergehenden Zeit Stunden addiret, und bey jedem Schaltjahre einen Tag hinweg wirft.

Laufen-

Laufendes Jahr im Zirkel.		Tag des Æquinoctii im Märzen.		Uhr	M.
Schaltj.	0	20	Vormit.	9	26
	1	—	Nachmit.	3	15
	2	—	Nachmit.	9	4
	3	21	Vormit.	2	53
Schaltj.	4	20	Vormit.	8	42
	5	—	Nachmit.	2	31
	6	—	Nachmit.	8	20
	7	21	Vormit.	2	9
Schaltj.	8	20	Vormit.	7	58
	9	—	Nachmit.	1	47
	10	—	Nachmit.	7	36
	11	21	Vormit.	1	25
Schaltj.	12	20	Vormit.	7	14
	13	—	Nachmit.	1	3
	14	—	Nachmit.	6	52
	15	21	Vormit.	12	41
Schaltj.	16	20	Vormit.	6	30
	17	—	Nachmit.	12	19
	18	—	Nachmit.	6	8
	19	—	Nachmit.	11	57
Schaltj.	20	—	Vormit.	5	46
	21	—	Vormit.	11	35
	22	—	Nachmit.	5	24
	23	—	Nachmit.	11	13

Laufendes Jahr im Zirkel.		Tag des Æquinoctii im Märzen.		Uhr	M.
Schaltj.	24	20	Vormit.	5	2
	25	—	Vormit.	10	51
	26	—	Nachmit.	4	40
	27	—	Nachmit.	10	29
Schaltj.	28	—	Vormit.	4	18
	29	—	Vormit.	10	7
	30	—	Nachmit.	3	56
	31	—	Nachmit.	9	45
	32	21	Vormit.	3	34
Schaltj.	33	20	Vormit.	9	23

§. 27.

Z, E, Man woll; geſchwind in der Tabelle den Tag, die Stund und Minute des Frühlingäquinoctii für das Jahr 1760 finden, ſo ſucht man den Ueberreſt nach der Diviſion (§. 23.) unter den laufenden Jahrrn des Zirkels; dieſer Ueberreſt, welcher das laufende Jahr andeutet, iſt 28, daneben ſteht der 20te März Vormittags, 4 U. und 18 Min. Dieß iſt alſo die Zeit des Frühlingsäquinoctii im Jahre 1790 zu Rom, eben wie wir ſie hieoben heraus gebracht haben.

§. 28.

Sie iſt es aber doch nicht ganz genau; denn weil wir oben (§. 13.) geſehen haben, daß der 33jährige Zirkel um 3 Minuten größer iſt, als 33 tropiſche Jahre, folglich das Aequinoctium nach

Verfluß eines jeden Zirkels um 3 Minuten zurück geht; ſo muß man, um die Zeit des Aequinoctii ganz genau zu haben, den Quotienten mit 3 multipliciren, und das Product von der vermög der Rechnung, oder in der Tabelle gefundenen Zeit abziehen, da dann der Reſt die wahre Zeit des Aequinoctii auf das genaueſte zeiget.

§. 29.

Z. E. Wir haben die Zeit des Aequinoctii Ao. 1760 heraus gebracht auf den 20ten März Vormit. um 4 U. 18 Min. (§. 27.) Nun iſt der Quotient 4: dieſe mit 3 multipliciret, geben 12. Dieſe von 4 U. 18 Min. abgezogen, verbleiben 4 U. 6 Min. Vormit. zur wahren und genauen Zeit des Aequinoctii zu Rom den 20ten März im Jahre 1760. Zieht man hiervon die differentiam Meridianorum zwiſchen Rom und Paris ab mit 41 Min. 20 Sec.; ſo ergiebt ſich die Zeit des Aequinoctii zu Paris um 3 U. 24′. 40″ und dieß trift mit der in den Ephemeriden des Herrn De la Caille, p. 137 angegebenen Zeit, bis auf 1′ 40″ nahe, genau zuſammen. Unſere cykliſche Rechnung zeiget alſo die Zeit des Aequinoctii oben ſo genau und ſcharf an, als die aſtronomiſche immer thun kann.

§. 30

Wenn man unſere Tabelle genau betrachtet; ſo wird man finden, daß das Aequinoctium darinnen allezeit zwiſchen dem 20ten März 4 U. 18′. und dem 21ten 3 U. 34′. fällt, folglich in dem Zeitraume einer aſtronomiſchen Tagszeit erhalten wird. Und hieraus veroffenbaret ſich ebenfalls der Vorzug unſerer Einſchaltungsart gegen der gregorianiſchen, wo das Aequinoctium zwiſchen einem

Zeitraume von 3 Tagen fallen kann, wie wir ſchon oben geſehen haben. (§. 8.) Denn es kann geſchehen, daß eben der Tag, welcher in unſerm corrigirten Kalender der 20te März heißt, im gregorianiſchen der 19te iſt, und alsdann kann das Aequinoctium auf dieſen Tag um 4 U. 18′ in der Frühe fallen. Zuweilen wird aus dem 21ten März in unſerm corrigirten Kalender der 22te im gregorianiſchen, und da kann das Aequinoctium auf den 22ten März um 3 U. 34′. in der Frühe fallen. Zwiſchen 4 U. 18′. den 19ten in der Frühe, und 3 U. 34′ den 22ten in der Frühe ſind bis auf etliche Minuten nahe 72 Stunden, das iſt 3 ganze aſtronomiſche Tage.

§. 31.

Aber weiter hinaus kann es auch nicht fallen, weil der gregorianiſche Kalender von dem unſrigen in ganzen 8448 Jahren niemal um mehr als einen Tag differiren kann, wie wir unten mit mehrerm ſehen werden. Der Freyh. v. Wolf thut alſo dem gregorianiſchen Kalender groß Unrecht, da er in ſeinen Anfangsgründen der Chronologie §. 313. vorglebt: es könnte nach der gregorianiſchen Intercalation das Aequinoetium zuweilen auf den 23ten März hinaustreten. Der Jeſuit Clavius, der vornehmſte Mitarbeiter am gregorianiſchen Kalender, iſt ſelbſt in dieſen Irrthum gefallen, der ſich einbildete, das Aequinoctium könnte zuweilen gar auf den 24ten März fallen.

§. 32.

Es iſt zwar wahr, daß in 8448 Jahren, von 1600 an gerechnet, nach dem gregorianiſchen Kalender um einen Tag mehr eingeſchaltet wird, als nach dem unſrigen. Denn nach dieſem werden in 8448 Jahren 2048 Tage eingeſchaltet, nach dem gregorianilianiſchen aber 2049. Und ſo werden in 25344 Jahren um 2 Tage, in 42240 Jahren um 3 Tage, in 59136 Jahren um 4 Tage ꝛc. mehr eingeſchaltet nach dem gregorianiſchen Kalender, als nach dem unſrigen: denn 8448 Jahre, mit 33 dividiret, geben geradeauf 256 Zirkeln; in jedem Zirkel werden 8 Tage eingeſchaltet, folglich in 256 Zirkeln 2048 Tage.

Nach dem gregorianiſchen Kalender werden in 400 Jahren dreymal 24, das iſt 72, und einmal 25, zuſammen alſo 97 Tage eingeſchaltet. Wenn man alſo folgende Analogie machet: 400 geben 97, wieviel geben 8400; ſo kommen heraus 2937 Tage. Setzet man hierzu die 12 Tage, welche in 48 Jahren intercaliret werden; ſo bekommen wir zur ganzen Einſchaltung in 8448 Jahren nach dem gregorianiſchen Kalender 2049 Tage, folglich um einen Tag mehr, als nach unſerm corrigirten Kalender. Und ſo ergiebt ſichs von ſelbſten, daß in 25344 Jahren 2 Tage, und in 42240 Jahren 3 Tage ꝛc. mehr eingeſchaltet werden, nach dem gregorianiſchen Kalender, als nach dem unſrigen.

§. 33.

Eben ſo wirft es ſich auch aus der Sonntagsbuchſtabenrechnung der beyderſeitigen Kalender heraus. Nehmen wir das Jahr Chriſti 10048, ſo iſt dieſes das 5te im gregorianiſchen der erſten Ordnung.

Denn man ziehe von 100 Sæculis 16 ab, ſo verbleiben 84: Man dividire 84 mit 28, a) ſo bleibt nichts übrig; folglich gehöret

---

a) Um die Ordnung der Sonntagsbuchſtaben zu finden, welche einem jeden gegebenen Jahrhundert nach dem gregorianiſchen Stylo zukömmt, kann folgende Regel dienen: 1) Man ziehe von dem gegebenen Jahrhundert 15 ab, dieſes Säculum unter die erſte Ordnung der Sonntagsbuchſtaben, worunter auch das 17te Säculum gehöret.

Nun

---

wenn es ein gemeines iſt, und 16, wenn es ein Schaltjahrhundert iſt, welches ſich nämlich durch 4 geradeauf dividiren läßt. 2) Den Ueberreſt dividiret man mit 28. 3) Wenn nach der Diviſion nichts übrig bleibt, ſo gilt die erſte Ordnung, und wenn 18 übrig bleiben, die ſiebente. 4) Wenn aber 5. 6. 7. 8. 14. 15. 16. 17. 22. 24. 25. übrig bleiben; ſo wirſt man 1 hinweg; bleiben aber 26 oder 27 übrig: ſo nimmt man 2 davon weg. 5) Vom verbleibenden zieht man 9 oder 18 ab; ſo zeigt die überreſtige Zahl die Ordnung der Sonntagsbuchſtaben, welche für das gegebene Säculum gilt.

Es fragt ſich z. E. was für eine Ordnung der Sonntagsbuchſtaben dem Jahrehundert 2300 zukomme?

23
15

28   8 } 0
1 }

7 Die ſiebente.

Für das Jahr 5600 Ein Schaltjahrhundert
16

28   40 } 1
28 }

12
9

3 Die dritte.

Wenn

Nun ſetzen wir 9 zu dem gegebenen 10048ten Jahr, und dividiren die Summe mit 28, ſo zeiget der Ueberreſt 5 das laufende Jahr im Sonnenzirkel an.

Dieſes

Wenn man nun weis, zu was für einer Ordnung das vorgegebene Jahrhundert gehöret, ſo läßt ſich der Sonntagsbuchſtab für ein jedes Jahr im Sonnenzirkel leicht finden. Man ſetzet vom Sonntagsbuchſtaben der erſten Ordnung in gerader Reyhe ſo viel Buchſtaben fort, als die gefundene Ordnung von der erſten differiret. Setzen wir die erſte Ordnung hieher, die für die Sácula 1500 und 1600 im gregorianiſchen Stylo gegolten hat.

1	CB	5	ED	9	GF	13	BA	17	DC	21	FE	25	AG
2	A	6	C	10	E	14	G	18	B	22	D	26	F
3	G	7	B	11	D	15	F	19	A	23	C	27	E
4	F	8	A	12	C	16	E	20	G	24	B	28	D

Fragt man nnn z. E. was das Jahr 2246 für einen Sonntagsbuchſtaben habe? ſo ſucht man vorher nach den oben gegebenen Regeln, die Ordnung der Sonntagsbuchſtaben, welche von An. 2200 bis 2300 gilt.

$$\begin{array}{r} 2\;2 \\ 1\;5 \\ \hline 28)\quad \left.\begin{array}{r}7\\1\end{array}\right\}0 \\ \hline 6 \end{array}$$

Wir haben alſo hier die 6te Ordnung.

Nun ſuche man, das wievielte Jahr 2246 im Sonnenzirkel iſt.

2246

Dieſes fünfte Jahr, weil es ein Schaltjahr iſt, hat die Sonntagsbuchſtaben E D.

Nach

2246
9

28) 2255 } 80
224

15

Wir haben demnach das 15te Jahr im Sonnenzirkel, welches in der erſten Ordnung den Buchſtaben F giebt. Man ſetze itzt die Buchſtaben von F angefangen in einer geraden Reyhe fort, bis man auf den 6ten kömmt.

F	G	A	B	C	D
1	2	3	4	5	6

Alſo iſt der Sonntagsbuchſtab fürs Jahr 2246, nach dem gregorianiſchen Stylo D.

Wir wiſſen unſers Behalts nicht, daß jemand auf dieſe leichte und allgemeine Methode gefallen wäre, die Sonntagsbuchſtaben für ein jedes gegebenes Jahr, ohne Tabellen, aus der bloßen erſten Ordnung zu finden. Wer Luſt hat, den Grund unſerer Regeln einzuſehen, der darf ſich nur die 7 Ordnungen der Sonntagsbuchſtaben vorſtellen, und die Jahre bis auf weit entfernte Jahrhunderte darunter bringen. Wir entübrigen uns um ſo mehr, hierinnen weitläuftiger zu ſeyn, da wir unten §. 68. eine weit leichtere und kürzere Methode angeben werden, wonach die gregorianiſchen Sonntagsbuchſtaben für ein jedes gegebenes Jahr ohne alle Sonnenzirkel und Buchſtabenordnungen gefunden werden können.

Nach unſerer Sonntagsbuchſtaben-Rechnung haben wir folgenden Calcul. (§. 17.)

```
        10048
         1600
     ─────────
         8448            7) 256 ⎫ 36
  33)    66                 21  ⎭
     ─────────             ──────
         184                46
         165                42
     ─────────             ──────
          198               4 Vorwärts. E.
          198
          —    Ein Schaltjahr.
```

Die Sonntagsbuchſtaben ſind alſo F E. Der 24te März nach unſerm Kalender wäre demnach der 23te nach dem gregorianiſchen.

§. 34.

Allein dieſes beweiſt ſonnenklar, daß das Aequinoctium niemal über den 22ten März nach dem gregorianiſchen Stylo hinaustretten könne; ſondern vielmehr nach 8448 Jahren um einen Tag, nach 25344 Jahren um zween Tage zurück gehen müſſe, um ſo mehr, da es noch überhin auch nach unſerm corrigirten Kalender alle 33 Jahre um 1 Min. zurück tritt. (§. 13.) a)

Fünf-

---

a) Und was iſt dann am Ende daran gelegen, ob das Aequinoctium auf den 18ten, 19ten, oder 20ten März fällt, wenn man nur die Zeit, wann es, fällt, genau weis. Wir haben ſchon bewieſen, (§. 11.) daß keine bürgerliche Einſchaltungsart von der Welt dem aſtronomiſchen Sonnenjahres-Syſteme näher

Fünfter Abſchnitt.

Von der Art, die Zeit des öſterlichen Vollmondes im corrigirten Kalender zu beſtimmen.

§. 35.

Das dritte weſentliche Stück im chriſtlichen Kalender iſt die Beſtimmung des Vollmondes, welcher unmittelbar auf das Frühlings-Aequinoctium folget; weil nach dem Schluß der allmeinen nicäniſchen Kirchenverſammlung der nächſte Sonntag nach dieſem Vollmond der Oſtertag iſt, von welchem alle übrige bewegliche Feſttage abhangen. (§. 20.)

36. §. Wir

---

näher tritt, als die unſrige, die Größe des tropiſchen Jahres mag heraus gebracht werden, wie ſie immer will. Geſetzt, man fände nach vielhundertjährigen Obſervationen, daß ſie die kleinſte von denjenigen wäre, die wir hieoben (§. 12.) angeſetzt haben, nämlich von 365 Tagen, 5 Stunden, 48 Min. 45 Secunden; ſo würde die Differenz in 33 Jahren 11 Minuten betragen: man müßte demnach an Statt der Berechnung im 29ten §. den Quotienten mit $11\frac{1}{4}$ multipliciren, und das Product von der in der Tabelle gefundenen Zeit des Aequinoctii abziehn, um die wahre auf das allergenaueſte zu haben. Z. E. In dem §. 29. gegebenen Exempel vom Jahre 1760 war der Quotient 4, dieſer mit $11\frac{1}{4}$ multiplicireb giebt 45. So viel mußte man von 4 U. 18 Min. abziehen, da dann zur wahren Zeit des Aequinoctii fürs Jahr 1760 heraus kommen würde der 20te März um 3 U. 33 Min. Vormittag.

§. 36.

Wir haben ſchon oben erinnert, (§. 1.) daß es rathſamer ſey, den mittlern als den wahren Vollmond zu gebrauchen, weil es doch unmöglich iſt, daß man in der ganzen Chriſtenheit zur Zeit des wahren Vollmondes allenthalben die nämliche Stunde zählen könne; woraus folget, daß, wenn an einem Orte zu einer gewiſſen Stunde ſich der wahre Vollmond ereignet, an einem andern Orte in gleicher Stunde der mittlere Vollmond eintreffen müſſe, und daß alſo unumgänglich nothwendig ſey, die Zeit des Vollmondes auf einen beſtimmten Meridian anzuheften, wenn anderſt das Oſterfeſt in der ganzen Chriſtenheit an en einem und dem nämlichen Tage gefeyert werden ſoll. Dieß haben auch ſelbſt die proteſtantiſchen Stände erkannt, da ſie den Meridian von Uranienburg, welcher von dem römiſchen nur um 50 Secunden differiret, angenommen haben.

§. 37.

Was iſt nun daran gelegen, ob man auf den wahren oder mittlern Vollmond ſieht? Den wahren zu beſtimmen, braucht man mühſame aſtronomiſche Rechnungen, die ſehr wenig Kalendermacher verſtehen; und auch dieſe aſtronomiſchen Rechnungen differiren nach Verſchiedenheit der Tabellen um 8, 10 und 12 Minuten von einander.

§. 38.

Zu dem gehöret zu Beſtimmung der Zeiten und Feſttage ein allgemeines Geſetz, welches eben darum, weil es allgemein iſt, einförmig, kurz, leicht und zuverläßig ſeyn muß, folglich an keine aſtronomiſche Tabellen gebunden werden ſollte, die ein Werk von Privatleuten ſind, und allzu weitläuftige Calculn erfordern, worinnen man ſich leicht verſtoßen kann.

§. 39.

Die mittleren Vollmonde hingegen laſſen ſich durch die Epaktenrechnung, welche durchgehends einförmig und ganz kurz und leicht iſt, geſchwind beſtimmen. Man iſt auch dadurch geſichert, in Feyerung des Oſterfeſtes mit den Juden nicht überein zu kommen, weil dieſe ſich ebenfalls der mittleren Vollmonde bedienen; wiewohl dieſe Sorge ſehr überflüßig iſt, indem der jüdiſche Kalender ſo eingerichtet iſt, daß der 15te des Monats Niſan, an welchem ſie ihr Oſterfeſt begehen, niemal auf einen Sonntag fallen kann. Zu dem Ende machen ſie ihre Jahre bald um einen Tag größer bald kleiner, damit ſie niemal mit dem Oſterfeſte auf den Sonntag oder Freytag treffen können.

§. 40.

Wir ſchlagen aber eine ganz andere cycliſche Epaktenrechnung vor, als die gregorianiſche iſt. Denn wiewohl dieſe der goldenen Zahlenrechnung, die man ehmals im julianiſchen Kalender gebraucht hat, und die ſich auf den 19jährigen Mondszirkel gründet, weit vorzuziehen iſt, weil man darinnen auf die Anticipationen des Mondes, ſo in 312 Jahren einen ganzen Tag ausmachen, mit Acht hat; ſo iſt ſie doch darinnen fehlerhaft und nicht zuverläßig, weil ſie nur die Tage der mittleren Vollmonde, nicht aber die Stunden und Minuten zeiget. Wenn nun das Æquinoctium und der Vollmond auf den nämlichen Tag fallen, ſo kann man noch nicht wiſſen, ob der mittlere Vollmond vor oder nach dem Æquinoctio eintrift, folglich ob er öſterlich ſey oder nicht. Hernach zeigen auch die gregorianiſchen Epakten den mittleren Vollmond zuweilen um einen ganzen Tag ſpäter an, als er ſich wirklich ereignet.

§. 41.

Mit unſerer Eipaktenrechnung hingegen laſſen ſich die Tage, Stunden und Minuten des mittleren Vollmonds eben ſo leicht und geſchwind, ja noch leichter beſtimmen, als die bloßen Tage im gregorianiſchen Kalender. Denn wenn man nach dem gregorianiſchen Styl den Tag des öſterlichen mittleren Vollmondes finden will; ſo muß man zuerſt die goldene Zahl ſuchen; alsdenn muß man in der Epakten-Gleichungstafel ſehen, was für ein Epaktenzirkel dem gegebenen Jahrhundert zukömmt; hernach geht man in die ausgedehnte Epaktentafel, und ſuchet die Zahl im gefundenen Epaktenzirkel auf, welche mit der gefundenen goldenen Zahl correſpondiret. Dieſe zieht man von 30 ab, und thut zu dem Ueberreſt 14, ſo zeigt die Summe den Tag des mittleren Vollmondes im Märzen an; fällt dieſer vor dem 21ten, ſo thut man noch 30 hinzu, und zieht von der Summe 31 ab; alsdann zeigt der Ueberreſt den Tag des mittleren öſterlichen Vollmondes im April an.

§. 42.

In unſerer Epaktentafel hingegen hat man nichts anders zu thun, als den Quotienten und Ueberreſt, ſo ſich in der erſten Diviſion ergeben haben, aufzuſuchen, und die damit correſpondirenden Zahlen von einander abzuziehen, (die zweyte nämlich von der erſten) wo ſodann die Differenz den Tag, die Stunde und Minuten des mittleren Vollmondes im Märzen anzeigt.

Wir müſſen, ehe wir unſere Epaktentafel vorlegen, und ihren Gebrauch zeigen, von dem Grunde und der Art ihrer Einrichtung etwas ſagen.

§. 43.

Wir nehmen abermal das Jahr 1600 für das 0 Jahr unſerer Kalender-Æræ an. In dieſem Jahre ereignete ſich der mittlere

Vollmond, nach den delahiriſchen Tabellen zu Paris, den 29ten März um 2 Uhr 27′ 40″ Nachmitt. folglich zu Rom um 3 Uhr 9′. weil nun die Epakte von 33 Jahren, 4 Tage, 12 St. 27′ ausmachet, um welche der mittlere Vollmond in ſo viel Jahren zurücke geht, die einen ganzen Zirkel in unſerer Zeitrechnung ausmachen; ſo muß man, wenn man die Zeit des mittleren Märzvollmondes im Jahre 1633 wiſſen will, 4 Tage, 12 St. 27′ von 29 Tagen, 3 St. und 9′ abziehen, da dann übrig verbleiben 24 Tage, 14 St. 42′: das iſt, der mittlere Vollmond hat ſich dieſes 1633ſte Jahr zu Rom den 24ten März um 14 U. 42′ oder den 25ten um 2 Uhr, 42′ in der Frühe ereignet. Eben ſo erhellet, daß, wenn man nach Verlauf weiterer 33 Jahren, nämlich für das Jahr 1666 die Zeit des mittleren Vollmondes zu Rom im Märzen wiſſen will, eine doppelte 33jährige Epakte, nämlich 9 Tage — St. 54′ von 29 Tagen, 3 St. 9′ abgezogen werden müſſen, da ſich dann zum Unterſchied ergeben 20 Tage, 2 St. 15′. der mittlere Vollmond traf alſo in dieſem Jahre zu Rom auf den 20ten März um 2 Uhr, 15′ Nachmittag ein.

§. 44.

Wir haben demnach in unſerer Tabelle No. 1. beym Quotienten 1, ſo das letzte Jahr im 1ſten Zirkel andeutet, eine 33jährige, beym Quotienten 2 eine 66jährige oder doppelte, beym Quot. 3 eine dreyfache Zirkelepakte ꝛc. von 29 T. 3 St. 9′ abgezogen, und dadurch die Tage im Märzen beſtimmet, an welchen ſich der mittlere Vollmond im letzten Jahre eines jeden Zirkels ereignet; wir haben zugleich die Zirkel-Epakten darneben geſetzet. Die Tafel No. 2. enthält die Epakten für einzelne Jahre von 1 bis 33, welche von der No. 1. gefundenen Zeit des Vollmondes abgezogen werden müſſen, weil derſelbe in ſo viel Jahren, als der Ueberreſt zeiget, um die Anzahl Tage, Stunden und Minuten der darneben befindlichen Epakte weiter zurücke geht. Hier ſind beyde Tafeln.

No. 1.

No. 1. Zirkel-Epaktentafel.

quotient	Tag des Vollm. im März			Epakten der Zirkel.			quotient	Tag des Vollm. im März.			Epakten der Zirkel.			quotient	Tag des Vollm. im März.			Epakten der Zirkel.		
	T	U	M	T	ſt.	M		T	U	M	T	ſt.	M		T	U	M	T	ſt.	M
0	29	3	9	—	—	—	35	18	15	11	10	11	58	70	8	3	13	20	23	56
1	24	14	42	4	12	27	36	14	2	44	15	—	25	71	3	14	47	25	12	22
2	20	2	15	9	—	54	37	9	14	17	19	12	52	72	28	15	3	—	12	6
3	15	13	49	13	13	20	38	5	1	50	24	1	19	73	24	2	37	5	—	32
4	11	1	22	18	1	47	39	30	2	7	28	13	46	74	19	14	9	9	13	—
5	6	12	55	22	14	14	40	25	13	41	3	13	28	75	15	1	44	14	1	25
6	2	—	28	27	2	41	41	21	1	15	8	1	54	76	10	13	16	18	13	53
7	27	—	46	2	2	23	42	16	12	47	12	14	22	77	6	—	50	23	2	19
8	22	12	19	6	14	50	43	12	—	21	17	2	48	78	1	12	22	27	14	47
9	17	23	52	11	3	17	44	7	11	53	21	15	16	79	26	12	40	2	14	29
10	13	11	25	15	15	44	45	2	23	27	26	3	42	80	22	—	13	7	2	56
11	8	22	58	20	4	11	46	27	23	43	1	3	26	81	17	11	47	11	15	22
12	4	10	31	24	16	38	47	23	11	17	5	15	52	82	12	23	19	16	3	50
13	29	10	49	29	5	4	48	18	22	49	10	4	20	83	8	10	52	20	16	16
14	24	22	22	4	4	47	49	14	10	23	14	16	46	84	3	22	25	25	4	44
15	20	9	55	8	17	14	50	9	21	57	19	5	12	85	28	22	44	—	4	25
16	15	21	28	13	5	41	51	5	9	31	23	17	38	86	24	10	16	4	16	53
17	11	9	1	17	18	8	52	30	9	47	28	6	6	87	19	21	50	9	5	19
18	6	20	35	22	6	34	53	25	21	21	3	5	48	88	15	9	22	13	17	47
19	2	8	8	26	13	1	54	21	8	53	7	18	16	89	10	20	56	18	6	13
20	27	8	25	1	18	44	55	16	20	28	12	6	41	90	6	8	29	22	18	40
21	22	19	58	6	7	11	56	12	8	—	16	19	9	91	1	20	3	27	7	6
22	18	7	31	10	19	38	57	7	19	34	21	7	35	92	26	20	19	2	6	50
23	13	19	5	15	8	4	58	3	7	6	25	20	3	93	22	7	53	6	19	16
24	9	6	38	19	20	31	59	28	7	24	—	19	45	94	17	19	25	11	7	44
25	4	18	11	24	8	58	60	23	18	57	5	8	12	95	13	7	—	15	20	9
26	29	18	28	28	21	25	61	19	6	31	9	20	38	96	8	18	32	20	8	37
27	25	6	2	3	21	7	62	14	18	3	14	9	6	97	4	6	6	24	21	3
28	20	17	35	8	9	34	63	10	5	37	18	21	32	98	29	6	22	29	9	31
29	16	5	8	12	22	1	64	5	17	9	23	10	—	99	24	17	56	4	9	13
30	11	16	41	17	10	28	65	1	4	44	27	22	25	100	20	5	29	8	21	40
31	7	4	14	21	22	55	66	26	5	—	2	22	9	200	11	7	53	17	19	16
32	2	15	47	26	11	22	67	21	16	34	7	10	35	300	2	10	15	26	16	54
33	27	16	5	1	11	4	68	17	4	6	11	23	3	400	23	1	21	6	1	48
34	23	3	38	5	23	31	69	12	15	40	16	11	29	500	14	3	42	14	23	27

No. 2. Jahr-Epaktentafel.

Ueberreſt.	Epakten.		
	Tage	St.	M.
1	10	15	11
2	21	6	23
3	2	8	50
4	14	—	1
5	24	15	13
6	5	17	40
7	16	8	51
8	28	—	3
9	9	2	30
10	19	17	42
11	—	20	9
12	12	11	20
13	23	2	32
14	4	4	59
15	14	20	11
16	26	11	22
17	7	13	49
18	18	5	—
19	28	20	12
20	10	22	39
21	21	13	50
22	2	16	18
23	13	7	29
24	24	22	41
25	6	1	8
26	16	16	19
27	27	7	31
28	9	9	58
29	20	1	9
30	1	3	37
31	11	18	48
32	22	9	59
33	4	12	27

Monds-Revolutionen			
Rev.	Tag.	St.	Min.
I.	29	12	44
II.	59	1	28
III.	88	14	12
IV.	118	2	56
V.	147	15	40
VI.	177	4	24

§. 45.

Die Zirkel in dieſen Tabellen gehen bis auf 100, folglich bis aufs Jahr Chriſti 4900. Wäre der Quotient zwiſchen 100 und 200, oder zwiſchen 200 und 300; ſo thut man die Zirkel-Epacte für die Zwiſchen-Zirkel zu der Jahrs-Epacte des laufenden Jahrs Nro. 2, und zieht hernach die Summe von derjenigen Epacte ab, welche dem 100ten, 200ten ꝛc. Zirkel zukömmt.

Zum Exempel der Quotient wäre 465, und der Ueberreſt 3; ſo thut man die Zirkel-Epacte von 65 mit 1 Tag 4 St. 44 M. Nro. 1 zu der Jahrs-Epacte des Uebereſts 3, welche 2 Tag 8 St. 50 Min. ausmacht; die Summe thut 3 Tage 13 St. 34 Min. Dieſe zieht man von der Epacte der 400 Zirkel, nämlich von 23 Tagen 1 St. 21 Min. ab, und verfährt im übrigen, wie hernach mit mehrerm zu ſehen.

§. 46.

§. 46.

Wenn man die Zirkel Epacte zu dem nebenfindigen Tag des Vollmonds im Märzen addiret; und von der Summe eine ganze Revolution abzieht, ſo müſſen allemal 29 Tage 3 St. 9 Min. heraus kommen; und dieß iſt ein Mittel, die Zuverläſſigkeit unſerer Tabelle zu prüfen.

§. 47.

Will man für ein jedes gegebenes Jahr die Zeit des mittlern Vollmonds im Märzen finden; ſo zieht man wie oben (§. 16) 1600 davon ab, den Ueberreſt dividiret man mit 33: alsdann ſuchet man den Quotienten in der Tafel Nro. 1 auf, und nimmt die daneben ſtehenden Tage, Stunden, und Minuten. Hernach ſuchet man auch in der Tafel Nro. 2 den Ueberreſt auf, und excerpiret die daneben ſtehenden Tage, Stunden, und Minuten; dieſe ziehet man von jenen ab; ſo zeiget der Ueberreſt den Tag die Stunde und Minute im Märzen, wo ſich der mittlere Vollmond ereignet.

§. 48.

Man will zum Exempel wiſſen, wann der mittlere Vollmond im Märzen Anno 1834 eintrift; ſo zieht man 1) 1600 davon ab

1843
1600
verbleiben 234

2) dieſe dividiret man mit 33 33) 234 ⟩ 7 Quot.
231
3 Ueberreſt

ſo iſt der Quotient 7 und der Ueberreſt 3.

3) Der Quotient 7 zeigt in der Tafel N. 1, 27 T. — St. 46 M.
Und der Ueberreſt 3 in der Tafel N. 2, 2 T. 8 St. 50 M.
Dieſe letztern 2 Tage 8 Stunden 50 Minuten zieht man von den erſtern 27 Tagen — Stunden 46 Minuten ab; ſo verbleiben im Reſt 24 Tage 15 Stunden 56 Minuten.

27 Tage — St. 46 Min.
2 Tage 8 St. 50 Min.
24 Tage 15 St. 56 Min.

alſo ereignet ſich der Vollmond in dieſem Jahr zu Rom den 24ten März, um 15 U. 56 Min. aſtronomiſcher Zeit, oder den 25ten März um 3 Uhr 56 Minuten in der Frühe, nach der Europäiſchen Stundenrechnung. (a)

§. 49.

Wenn die in der Tafel Nro. 1 gefundenen Tage weniger ſind, als diejenigen, welche die Tafel Nro. 2 giebt. So thut man zu jenen eine ganze Monds-Revolution von 29 Tagen, 12 Stunden 44 Minuten, und zieht alsdann von der Summe die Nro. 2 gefundenen Tage ab.

Nehmen wir zum Exempel das Jahr 1769

1769
1600
169 | 5 Quotient
33) 165 }
4 Ueberreſt

(a) Nach dem Gregorianiſchen Kalender fällt er auf den 24ten März, der Sonntags-Buchſtab iſt in dieſem Jahr E, im Gregorianiſchen ſowohl als in unſerm Kalender.

Hier giebt der Quotient 5 in der Tafel Nro. 1. 6 Tage 12 St. 55 Minuten, nnd der Ueberreſt 4 zeigt in der Tafel Nro 2. 14 Tage — St. 1 Min. Man addirt alſo zu den 6 Tagen 12 St. 55 Min. eine ganze Revolution von 29 Tagen 12 Stunden 44 Minuten, kommen heraus, 36 Tage 1 St. 39 Minuten, hievon 14 Tage — St 1 Minute abgezogen, verbleiben 22 Tage 1 Stunde 38 Minuten; alſo fällt der mittlere Vollmond anno 1769 auf den 22ten März um 1 Uhr 38 Minuten nachmittag (a).

6	Tage	12	St.	55	Min.
29	—	12	—	44	—
36	Tage	1	St.	39	Min.
14	Tage	—	St.	1	Min.
22	Tage	1	St.	38	Min.

§. 50.

Wenn die ſolchergeſtalten gefundene Zeit des mittlern Vollmonds vor dem Æquinoctio fällt, ſo iſt er nicht Oeſterlich, und man muß den nächſt darauf folgenden mittlern Vollmond dafür annehmen, das iſt, man thut eine ganze Monds-Revolution hinzu, und zieht von der Summe, wenn die ganzen Tage mehr machen als 31, den ganzen Märzen mit 31 Tagen ab; ſo zeigt der Ueberreſt den Tag im April, die Stunde und Minute an, wo ſolcher mittlere Vollmond eintritt.

(a) Der Gregorianiſche Kalender giebt ihn ebenfalls auf den 22ten Märzen an. Die aſtronomiſche Rechnung aber gibt den wahren Vollmond um 3 Stunde 48 Min. früher an: der Sonntagsbuchſtaben iſt in dieſem Jahr A, und nach dem Febr. hat unſer Kalender ebenfalls A.

§. 51.

Wir wollen die beyden Jahre 1776 und 1779 zu Exempeln unſrer Berechnung nehmen:

$$\begin{array}{rl} 1776 & \\ 1600 & \\ \hline 176 & \rbrace\ 5 \\ 33)\ 165 & \\ \hline 11 & \end{array}$$

Hier zeiget der Quotient 5 Nro. 1. 6 Tage 12 St. 55 Min.
der Ueberreſt 11 Nro. 2. — T. 20 St. 9 Min.

Alſo fällt Vollmond im März den 5ten um 16 U. 46 Min.
weil aber das Æquinoctium erſt den 21ten um 1 U. 9′ Vormittag eintrifft, ſo thut man zu obigen
eine Revolution von 29 Tagen 12 St. 44 Min.
Kommen heraus 35 Tage 5 St. 30 Min.
Hiervon abgezogen 31 " — —
Verbleiben . . 4 Tage 5 St. 30 Min.

Alſo begiebt ſich der mittlere öſterliche Vollmond in dieſem Jahr zu Rom den 4ten April um 5 Uhr 30 Minuten nachmittag (a)

$$\begin{array}{rl} 1779 & \\ 1600 & \\ \hline 179 & \rbrace\ 5 \\ 33)\ 165 & \\ \hline 14 & \end{array}$$

(a) Eben dieſen Tag giebt auch die Gregorianiſche Epacte an. Unſer Kalender hat den Sonntagsbuchſtaben G durchgehends; der Gregoriani-

der Quotient 5 zeiget . . 6 Tage 12 St. 55 Min.
und der Ueberreſt 14 . . 4 = 4 = 59 =

Alſo der Vollm. im März den 2ten um 7 U. 56 Min.
Folglich vor dem Æquinoctio
Man thut alſo hinzu . . 29 Tage 12 St. 44 Min.

Kommen heraus . . . 31 Tage 20 St. 40 Min.
Alſo fällt derſelbe auf den 31ten März um 20 Uhr 40 Minuten, das iſt den 1ten April um 8 Uhr 40 Minuten in der Frühe (b).

§. 52.

Wir wollen noch ein Exempel ſetzen, worinnen die in den vorgehenden zween §§. bemerkten beyden Fälle vorkommen. Wir wollen zu dem Ende das Jahr 1775 vor uns nehmen.

$$\begin{array}{rrl} & 1775 & \\ & 1600 & \\ \hline & 175 & \rbrace\ 5 \\ 33) & 165 & \\ \hline & 10 & \end{array}$$

---

rianiſche Kalender aber G F; folglich wird darinnen der Vollmond um einen Tag ſpäter angezeiget, als er wirklich eintrift

(b) Und auf eben dieſen Tag fällt er auch nach dem Gregorianiſchen Kalender. Der Sonntagsbuchſtab iſt in unſerm ſowohl als in Gregorianiſchen Kalender C hier zeigt der Ueberreſt mehr als der Quotient; denn dieſer

giebt .	6 Tage	12 St.	55 Min.
Man thue dazu eine Revolution zu	29 T.	12 St.	44 Min.
ſo thut die Summa . .	36 Tage	1 St.	39 Min.
der Ueberreſt giebt . .	19 Tage	17 St.	42 Min.
alſo der Vollmond im März den	16ten	um 7 U.	57 Min.
folglich vor dem Æquinoctio. Man addire demnach eine Revolut. mit	29 Tagen	12 St.	44 Min.
thut die Summa . . .	45 Tage	20 St.	41 Min.
hiervon abgezogen . . .	31 T.	—	—
Eben derſelbe im April den	14ten	um 20 U.	41 Min.

oder den 15ten April um 8 Uhr 41 Minuten in der Frühe. (a)

§. 53.

Man kann dieſe Berechnung auch noch kürzer anſtellen: denn man ſieht gleich, ob die Jahrs Epacten Num. 2, wenn ſie von denen mit einer Revolution vermehrten Zirkel Epacten abgezogen werden, einen Tag vor dem 21ten Märzen geben. In dieſem Fall thut man lieber gleich eine doppelte revolution zu der Zirkel Epacte Num. 1 und zieht die Jahrs Epacte Num. 2 mit 31 Tagen vermehret davon ab, ſo giebt der Ueberreſt den Tag des mittlern Vollmonds im April. So bekömmt die Rechnung im nächſt vorigen Exempel folgende Geſtalt.

6 Ta-

(a) Eben dieſen 15ten April giebt auch der Gregorianiſche Kalender an, der Sonntagsbuchſtab iſt in beyden Kalendern durch das ganze Jahr A.

	6 Tage	12 St.	55 Min.
eine doppelte revolution . .	59	1	28
	65 Tage	14 St.	23 Min.
	50	17	42
Vollmond in April den . .	14ten um	20 U.	41 Min.

§. 54.

Das iſt nun die Einrichtung unſerer corrigirten Jahrsforme, welche, was die leichte Berechnungsart, Genauigkeit, und Zuverläßigkeit anbetrift, die Gregorianiſche gar weit übertrift; Vermittelſt einer einzigen Diviſion beſtimmet man nicht nur den Sonntagsbuchſtaben für jedes gegebene Jahr, ſondern auch die Zeit des Frühlings-Aequinoctii und des nächſt darauf folgenden mittlern Vollmonds mit der äußerſten präciſion, ſo daß man die wahre Oſterfeyer niemal verfehlen kann.

§. 55.

Wir wollen ein Jahr vor uns nehmen, und die Berechnung damit erſtlich nach der Gregorianiſchen Methode, und hernach auch nach der unſrigen Anſtellen. Es ſey dieſes das 1770ſte Jahr:

Berechnung nach der Gregorianiſchen Methode.

1) Deu Sonntagsbuchſtaben zu finden:

$$\begin{array}{rrl} & 1770 & \\ & 9 & \\ \hline & 1779 & \rceil\ 63 \\ 28) & 168 & \rfloor \\ \hline & 99 & \\ & 84 & \\ \hline & 15 & \end{array}$$

Es iſt alſo dieſes das 15te Jahr im Sonnenzirkel: dieß muß nun in der Tabelle und zwar von der zweyten Ordnung der Sonntagsbuchſtaben aufgeſchlagen werden, wo man den Buchſtaben G findet. (Bey unſerer Berechnungsart hat man hierzu weder Tabellen noch Sonnenzirkel nöthig)

2) Die Epacte zu finden.

1770
1
1771 ⎫ 93
19) 171 ⎭
61
57
4

Die goldene Zahl iſt alſo 4.

3) Jetzt ſucht man in der Epacten-Gleichungstafel das Jahr 1700 auf, und ſieht was für ein Epacten-Zirkel dieſem Jahrhundert zukömmt, da findet man die Epactenreyhe C aus dieſen Epacten correſpondiret die 3te mit der goldenen Zahl 4.

4) Man zieht demnach 3 von 30 ab, verbleiben 27: dieß iſt der Tag des Neumonds im Märzen, dazu addirt man 14 thut 41 hiervon den ganzen März mit 31 abgezogen verbleibt der 10te April für den Tag des öſterlichen Vollmonds.

Von der Zeit des Æquinoctii iſt nicht einmal die Frage, denn das wird auf den 21ten März für beſtändig ſupponiret; ſo grundlos auch das Suppoſitum immer iſt. Bey dieſem Jahr hat es zwar nichts zu bedeuten, weil der Oſtervollmond weiz gung davon entfernet iſt, Es würde aber viel daran gelegen ſeyn, wenn er zwiſchen dem 20ten und 21ten März fiele, denn da würde man in Gefahr ſeyn, das wahre Oſterfeſt zu verfehlen, wenn man nicht die Zeit des Æquinoctii, ſowohl als des Vollmonds, genau wüßte, wie wir ſchon hieroben (§§. 8 u. 9) geſehen haben.

§. 56.

Nun wollen wir auch unſere Berechnung anwenden.

1770
1600

170 } 5 Quotient
33) 165 }

Ueberreſt 5
hierunter Schaltjahr 1

6 rückwärts
5 Quotient Vorwärts

1 zurück G wie im Gregorianiſchen.

0	6	5	4	3	2	1	0
A	B	C	D	E	F	G	A
0	1	2	3	4	5	6	0

Nun braucht man keine weitere Diviſion: der Ueberreſt 5 zeigt in der Aequinoctial-Tafel das Æquinoctium auf den 20ten März um 2 U. 31′ Nachmittag: der Quotient multipliciret mit 3 giebt 15; dieſe zieht man (§. 28.) von 31 Minuten ab, bleiben 16 M. alſo iſt die genaue Zeit des Æquinoctii zu Rom den 20ten März um 2 Uhr 16 Minuten Nachmittag.

Der Quotient 5 giebt in der Epacten-Tafel Num. 1 .	6 Tage	12 St.	55 M.
dazu eine doppelte revolution .	59	1	23 M.
	65 Tage	14 St.	23 M.
die Jahrs Epacten addirt zu 31 Tagen	55	15	13
Vollmond im April den . .	9ten um	23 U.	10 M.

das iſt den 10ten April um 11 Uhr 10 Minuten Vormittag.

§. 57.

Wer ſieht nun nicht, daß dieſe Berechnung weit leichter iſt als die Gregorianiſche?

Sie ruhet hiernächſt auf ganz einfachen und ſichern Gründen: da hingegen die Art der gregorianiſchen Epacten- und Sonnenzirkel-Einrichtung viele intricante Notionen voraus ſezet, um ſie deutlich und zuverläßig genug einzuſehen.

§. 58.

Noch ein beſonderer Vortheil bey unſerer Kalenderforme iſt dieſer, daß ſie, wenn man immer will, eingeführet werden kann, ohne das geringſte Aufſehen zu erwecken, ohne einige Tage auszumärzen, noch die Commercien zu verwirren: wenn nur die Vorſicht gebraucht wird, daß man den Anfang damit nicht in einem corrigirten Schaltjahr, oder in den unmittelbar vorhergehenden, auf ein Gregorianiſches Schaltjahr folgenden Jahre mache. In einem Gregorianiſchen Schaltjahr aber, und in denen unmittelbar vorhergehenden auf das nächſte corrigirte Schaltjahr folgenden Jahren, kann man allemal den Anfang damit machen. So könnte dieſe neue Jahrsforme zum Exempel Ao. 1770

1771 und 1772 eingeführet werden; denn die zwey erſten haben im Gregorianiſchen Kalender den nämlichen Sonntagsbuchſtaben wie in unſerm Kalender, und im dritten ebenfalls bis auf den Schalttag, welchen man nur auslaſſen darf. Ao. 1773 aber kann man nicht damit anfangen, denn dieß iſt in unſerm Kalender ein Schaltjahr, welches vor dem Schalttage den Buchſtaben D, im Gregorianiſchen aber den Buchſtaben C hat.

§. 59.

Doch iſt die Regel umgekehrt in denen Jahren, welche nach einem gemeinen Säculahrjahre bis auf den nächſten completen vierfachen Zirkel von 132 Jahren folgen. Z. E. Von An. 1703 bis 1732, von An. 1802 bis 1864, von 1903 bis 1996 ꝛc.

§. 60.

Mit einem Worte, wenn man wiſſen will, ob mit einem vorgegebenen Jahre unſere neue Kalenderforme eingeführet werden könne; ſo berechnet man den Sonntagsbuchſtaben, ſowohl nach unſerer, als nach der gregorianiſchen Methode. Sind beyde Buchſtaben entweder das ganze Jahr hindurch, oder doch wenigſtens vom Anfange bis auf den Schalttag einerley; ſo kann ſie mit dem vorgegebenen Jahre angefangen werden, andrergeſtalt nicht.

§. 61.

Man fraget z. E. ob mit dem Jahre 1805, welches das erſte nach dem gregorianiſchen Schaltjahre iſt, unſer Kalender anfangen könne?

Nach der gregorianiſchen Methode.

1805
9
———
28) 1814 } 64
168 }
———
134
112
———
22 In der 3ten Ordnung F.

Nach unſerer Methode.

1805
1600
———
205 } 6 Vorwärts
33) 198 }
———
7
1
———
8 zurück
6 Vorwärts.
———
2 Zurück F

Weil nun beyde Sonntagsbuchſtaben gleich ſind, ſo kann in dieſem Jahre unſer Kalender eingeführet werden.

Nehmen wir hingegen das 1807te Jahr, welches das erſte nach dem corrigirten Schaltjahre, und im Zirkel das neunte iſt, nach der gregorianiſchen Methode:

1807

$$\begin{array}{rrl} & 1807 & \\ & 9 & \\ \hline & 1816\,\} & 64 \\ 28) & 168\,\} & \\ \hline & 136 & \\ & 112 & \\ \hline & 24 & \text{in der 3ten Ordn. D.} \end{array}$$

Nach unſerer Methode:

$$\begin{array}{rrl} & 1807 & \\ & 1600 & \\ \hline & 207\,\} & \\ 33 & 198\,\} & 6 \text{ Vorwärts} \\ \hline & 9 & \\ & 2 & \\ \hline & 11 & \text{rückwärts} \\ & 6 & \text{Vorwärts} \\ \hline & 5 & \text{rückwärts C} \end{array}$$

Hier hat der gregorianiſche Kalender den Sonntagsbuchſtaben D, der unſrige aber C; folglich kann mit dieſem Jahre unſer Kalender nicht anfangen.

Beyde Exempel zeigen auch die Ausnahm von der (§. 58.) gegebenen Regel.

§. 62.

Wir ſehen demnach nicht, was unſere katholiſche Kirche ſowohl, als die Proteſtantiſchen hinderen ſollte, dieſe Einſchaltungsart anzunehmen und einzuführen. Eine beſſere und bequemere iſt doch in Ewigkeit nicht zu hoffen, wie wir oben (§. 12.) u. f. demonſtrativiſch gezeiget haben. Wenigſtens würde dadurch ſo viel gewonnen, daß die Spaltungen wegen des Oſterfeſtes unter den Chriſten aufhöreten, die den Feinden des Chriſtlichen Namens nur zum Geſpötte und Aergerniß dienen, da ein Theil der Chriſtenheit das Denkmal unſerer Erlöſung mit Freuden feyert, der andere aber zu gleicher Zeit trauret und faſtet.

§. 63.

Würde endlich einer oder anderer = oder vieleicht beyderſeits für unumgänglich nöthig erachtet, daß anſtatt des mittleren der wahre Frühlingsvollmond zum Grunde der Oſterfeyer genommen werden ſollte; ſo würde der Sache gar leicht durch eine allgemeine Verordnung abzuhelfen ſeyn, vermöge deren, wenn der mittlere Vollmond 12 Stunde entweder vor oder nach dem Æquinoctio, oder auf einen Samſtag nachmittag fiele, die aſtronomiſche Berechnung nach gewiſſen Tabellen, über die man ſich beyderſeits vergleichen könnte, angeſtellet werden müßte, um die eigentliche Zeit des wahren Vollmondes aufs genaueſte zu beſtimmen. Aber auch da muß doch ein gewiſſer Meridian zur allgemeinen Baſi genommen werden.

§. 64.

Geſetzt aber, man könnte und wollte ſich nicht über die zu erwählen kommende aſtronomiſche Tabellen vergleichen; geſetzt, man bliebe katholiſcher Seits bey dem Meridian vor Rom, und

prote=

proteſtantiſcher Seits bey dem zu Uranienburg; ſo wird ſich doch kaum in etlichen tauſend Jahren unter beyderley Berechnungen ein ſolcher Unterſchied heraus werfen, der in Feyerung des Oſterfeſtes eine Ungleichförmigkeit verurſachen könnte.

Sechſter Abſchnitt.

Von Reduction der Tage des corrigirten Kalenders auf den gregorianiſchen und julianiſchen.

§. 65.

Nur eine Schwierigkeit ſcheint im Wege zu ſtehen: und dieſe betrift die bisherigen aſtronomiſchen Tafeln. Solche ſind bis auf das Jahr 1582 auf die julianiſchen, und für die nachfolgenden Jahre auf die gregorianiſche Jahresforme calculiret. Soll man dieſe umgießen? Nein, es iſt nicht nothwendig. Man darf nur den vorgegebenen Tag auf den gregorianiſchen reduciren, und für dieſen den aſtronomiſchen Calcul nach den Tafeln anſtellen. Nichts iſt leichter, als dieſe Reduction. Man ſuchet für das vorgegebene Jahr den gregorianiſchen Sonntagsbuchſtaben, und vergleicht ihn mit dem unſrigen. Sind ſie beyde einerley, ſo braucht es keine Reduction; ſind ſie aber verſchieden, ſo läßt ſich leicht ermeſſen, ob zu dem vorgegebenen Tage 1 oder mehr hinzu gethan, oder abgezogen werden müſſe. Man ſucht nämlich im Kalender einen Tag auf, welcher unſern Sonntagsbuchſtaben führet, und ſieht, was ihm für ein Monatstag zukömmt: alsdenn ſieht man, was der gregorianiſche Sonntagsbuchſtab, der zu nächſt bey dem unſrigen ſteht, für einen Monatstag andeutet, dieß iſt der nämliche Tag im gregorianiſchen Kalender; der in dem unſrigen der ſo und ſovielte des Monats heißt.

§. 66.

Z. E. In dieſem angefangenen 1769ſten Jahre, welches nach unſerer Jahresforme ein Schaltjahr iſt, haben wir die beyden Sonntagsbuchſtaben B und A, wovon B vom erſten Jänner bis auf den Schalttag, A aber nach dem Schalttage das übrige Jahr hindurch gilt. Im gregorianiſchen Kalender haben wir das ganze Jahr hindurch den Buchſtaben A. Wenn demnach der vorgegebene Tag nach dem Schalttage fällt; ſo braucht es keine Reduction. Eben der Sonntag, der in unſerm Kalender der 19te März heißt, iſt auch im gregorianiſchen der 19te März. Wenn aber ein Tag vor dem Schalttage gegeben wird, z. E. der 14te Febr. ſo ſuchet man um dieſen Tag herum unſern Sonntagsbuchſtaben B, wo ſich der 13te Febr. zeiget. Der gregorianiſche Sonntagsbuchſtab A ſtehet beym 12ten Febr. Der Sonntag alſo, welcher in unſerm Kalender der 13te Febr. iſt, heißt im gregorianiſchen der 12te; folglich iſt der 14te Febr. unſers Styli der 13te Febr. nach dem gregorianiſchen.

§. 67.

Wie übrigens die Ordnung der Sonntagsbuchſtaben nach dem gregorianiſchen Styl in einem jeden vorgegebenen Jahrhundert ohne Tabellen geſchwind zu finden ſey, das haben wir ſchon oben in der Anmerkung (a zum 33ſten §.) angegeben.

§. 68.

Man kann auch die gregorianiſchen Sonntagsbuchſtaben noch kürzer finden, ohne aus ſelbigem Kalender einige Elementa, Tabellen, Sonnenzirkel, oder Ordnung der Sonntagsbuchſtaben ſondern nur ſeine bloße Einrichtung zu gebrauchen, und zwar folgender Geſtalt:

1)

1) Weil 400 Gregorianiſche Jahre genau 20871 complete Wochen ausmachen, ſo kömmt auch nach deren Verfluß die nämliche Reyhe von Buchſtaben zurück: und der Sonntagsbuchſtab A, den das Jahr 1600 nach dem Schalttage hat, kömmt auch den Jahren 2000, 2400, 2800, 3200 ꝛc. und eben ſo den Jahren 1200, 800, 400, 0 zu, wenn dieſes Kalender-Syſtem zurück fortgeſetzt würde. Man dividiret demnach das vorgegebene Jahr mit 400, das iſt, man zieht ſo oft 400 davon ab, als ſichs thun läßt; nämlich 1600, 2000, 2400. ꝛc.

2) Der Ueberreſt, welcher die Jahre anzeiget, die nach den 400 mehrfach completierten Jahren verfloſſen ſind, dividiret man mit 4, und thut den Quotienten zum Ueberreſt; ſo zeigt die Summa die Tage an, welche vom nächſt vorhergehenden 400ten Jahre an bis auf das vorgegebene, über die completen Wochen, verfloſſen wären, wenn man genau alle 4 Jahre einen Tag eingeſchaltet hätte.

3) Weil aber nach dem Gregorianiſchen Styl in jedem gemeinen Säcular-Jahr der Schalttag weggelaſſen, und erſt im 4ten Säcular-Jahr wiederum eingeſchaltet wird; ſo muß von der Summa Nro. 2 die erſte Ziffer des Ueberreſts abgezogen werden.

4) Was alsdann übrig bleibt, das dividiret man mit 7; ſo zeigt der neue Ueberreſt, wieviel Buchſtaben von A zurückgezählet werden müſſen um den Sonntagsbuchſtaben des vorgegebenen Jahrs zu haben.

Es ſey z. E. das vorgegebne Jahr
1 7 6 9
hievon abgezogen 1 6 0 0
verbleiben in Ueberreſt 1 6 9 Jahre, dieſe
mit 4 dividiret geben 4 2 zum Quotienten
Summa 2 1 1 hiervon die erſte
Ziffer des Ueberreſts 1 abgezogen.
Verbleiben 2 1 0 dieſe mit
7 dividiret bleibt übrig 0 folglich iſt der Sonntagsbuchſtab im Jahr 1600 A, und eben dieſen Buchſtaben, haben auch die Jahre 0, 400, 800, 1200, 2000, 2400 ꝛc.

Nehmen wir das Jahr 2 3 4 5
hiervon abgezogen 2 0 0 0
Verbleiben im Ueberreſt 3 4 5 dieſe mit
4 dividiret geben 8 6 zum Quotienten
Summa 4 3 1 hiervon die erſte
Ziffer des Ueberreſts 3 abgezogen
Verbleiben 4 2 8 dieſe mit
7 dividiret bleibt übrig 1. Folglich wird der Sonntagsbuchſtab in dieſem Jahre G ſeyn.

Noch ein Exempel vom Jahr 1 8 6 7
hiervon abgezogen . 1 6 0 0
Verbleiben im Ueberreſt 2 6 7 dieſe mit 4 dividiret
geben . . 6 6 zum Quotienten
Summa 3 3 3 hiervon die erſte
Ziffer des Ueberreſts 2 abgezogen.
Verbleiben 3 3 1 dieſe mit 7 dividiret
bleiben übrig 2 alſo iſt der Sonntagsbuchſtab im Jahr 1867 F.

Wenn das vorgegebene Jahr ein Schaltjahr iſt, ſo gilt der gefundene Sonntagsbuchſtab nach dem Schalttage das übrige Jahr hindurch, und der nächſtfolgende vom 1ten Jenner bis auf den Schalttag. Wenn demnach der gefundene Sonntagsbuchſtab A iſt; ſo gilt B vor dem Schalttage

§. 69.

Eben ſo leicht läßt ſich der Sonntagsbuchſtab im Julianiſchen Kalender ohne Sonnenzirkel beſtimmen. Denn weil 700 Julianiſche Jahre 36525 complete Wochen ausmachen; folglich nach deren Verfluß die vorige Reyhe der Buchſtaben zurückkehret; ſo darf man nur 1) das vorgegebene Jahr mit 700 dividiren, das iſt 700 ſo oft davon abziehen, als ſichs thun läßt, nämlich 700, 1400, 2100, 2800, ꝛc. 2) Den Ueberreſt dividiret man, wie im vorigen §. mit 4, und thut den Quotienten hinzu. 3) Von der Summa zieht man beſtändig 2 ab, weil die Sonntagsbuchſtaben im 0 Jahr um 2 differiren, da der Gregorianiſche Kalender nach dem Schalttage A, der Julianiſche aber C hat. 4) Was übrig verbleibt, dividiret man mit 7; ſo zeigt der neue Ueberreſt, wieviel Buchſtaben von A zurückgezählet werden müſſen, um den Sonntagsbuchſtaben für das gegebene Jahr im Julianiſchen Kalender zu haben.

Wir wollen die nämlichen Exempel gebrauchen, die wir im vorigen §. 68 angewendet haben.

	1769	
hiervon abgezogen	1400	
Verbleiben	369	Jahre, dieſe mit
4 dividiret geben	92	zum Quotienten
Summa	461	
hiervon abgezogen	2	
Verbleiben	459	dieſe mit
7 dividirt, bleibt übrig	4	Alſo iſt der Julianiſche

Sonntagsbuchſtab in dieſem Jahre D.

2345
hiervon abgezogen 2100
Verbleiben 245 Jahre, dieſe mit
4 dividiret geben 61 zum Quotienten
Summa 306
hiervon abgezogen 2
Verbleiben 304, dieſe mit 7 dividiret
bleiben übrig 3 Alſo iſt der Julianiſche
Sonntagsbuchſtab in dieſem Jahr E

1867
hiervon abgezogen 1400
Verbleiben 467 Jahre; dieſe mit
4 dividiret geben 116 zum Quotienten
Summa 583
hiervon abgezogen 2
Verbleiben 581, dieſe mit 7 dividiret
bleibt übrig . . 0 folglich iſt der Julianiſche Sonntagsbuchſtab in dieſem Jahre A.

§. 70.

Wenn man wiſſen will, um wieviel Tage der Julianiſche Kalender von dem Gregorianiſchen in einem jeden vorgegebenen Jahre differiret; ſo wirft man 1) von der gegebenen Jahrzahl 2 Ziffer rechter Hand hinweg, wo ſodann die bloßen Säcular-Jahre ſtehen bleiben. Wenn nun in dem gregorianiſchen

ſchen Syſtem alle Säcular-Jahre ohne Unterſchied der Schalttag ausgelaſſen würde; ſo würden beyde Kalender um eben ſoviel Tage differiren, als die Säcular-Jahre ausmachen. Da aber nach dem Gregorianiſchen Stylo im 4ten Säcular-Jahr ein Tag eingeſchaltet wird; ſo dividiret man 2) die Säcular-Jahre mit 4, und zieht den Quotienten davon ab. Und gleichwie im 0 Jahr der gemeinen Zeitrechnung, das iſt im erſten Jahr vor der Æra vulgari der Sonntagsbuchſtab vor dem Schalttage D war, folglich das Jahr mit einem Donnerstage anfieng; nach dem Gregorianiſchen Syſtem aber, wenn man daſſelbe bis auf den Anfang der Æræ vulgaris fortſetzte, das 0 Jahr den Sonntagsbuchſtaben B vor dem Schalttage gehabt, folglich mit einem Samſtage angefangen haben würde; ſo muß man 3) Von der Nro. 2 gefundenen Zahl abermal 2 abziehen; da ſodann der Ueberreſt anzeiget, um wieviel Tage von dem Gregorianiſchen zurückgezählet werden müſſen, um den nämlichen Tag im Julianiſchen Kalender zu haben.

Nehmen wir z. E. das Jahr 1769 hiervon wirft man die
zwey Ziffer rechter Hand 69 hinweg,
die ſtehen verbleibenden 17 dividiret man mit 4,
ſo iſt der Quotient 4 dieſe von 17 abgezogen

verbleiben 13 hiervon
weiter abgezogen 2

Verbleiben 11

folglich differiret der Julianiſche Kalender in dieſem Säculo von dem Gregorianiſchen um 11 Tage. Der 12te März im Gregorianiſchen Kalender iſt alſo der 1te März im Julianiſchen.

§. 71.

Hieraus ergiebt ſich, daß beyde Kalender im Jahr 1200, um eine ganze Woche, im Jahr 2100, um zwo, im Jahr 3000 um 3, im Jahr 3900 um 4, im Jahr 4900 um 5, im Jahr 5800 um 6, im Jahr 6700 um 7. im Jahr 7700 um 8, im Jahr 8600 um 9, im Jahr 9500 um 10 ganze Wochen ꝛc. differiren. Weil nun unſer corrigirter Kalender in allen obigen Jahren eben die Sonntagsbuchſtaben führet, wie der Gregorianiſche; ſo differiret er auch von dem Julianiſchen um die nämliche Anzahl Tage, wie der Gregorianiſche.

§. 72.

Wenn man demnach die Tage unſers corrigirten Kalenders auf den Julianiſchen reduciren will; ſo nimmt man die Differenz der Sonntagsbuchſtaben: das iſt, man zählet, von dem Julianiſchen Sonntagsbuchſtaben angefangen, in gerader Reyhe fort, bis man auf unſern Sonntagsbuchſtaben kömmt, und thut hernach in den Jahren, die zwiſchen 1200 und 2100 fallen, 1 Woche oder 7 Tage, zwiſchen 2100 bis 3000 2 Wochen ꝛc. hinzu. Die Summa zieht man von dem gegebnen Tag unſers Kalenders ab; ſo zeiget der Ueberreſt den nämlichen Tag im Julianiſchen Kalender an.

Man fragt z. E., was der 23ſte März 1769 für ein Tag im Julianiſchen Kalender ſey? In dieſem iſt der Sonntagsbuchſtab D, und in dem unſrigen A, von D bis auf A fortgezählet, ſind 4 Buchſtaben; hierzu 7 addiret, geben 11: dieſe von 23 abgezogen verbleiben 12: folglich iſt der 23te März unſers Kalenders der 12te März im Julianiſchen.

§. 73.

§. 73.

Unſer Kalender-Syſtem iſt ſo beſchaffen, daß man auch die Sonntagsbuchſtaben, das Frühlings-Aequinoctium, und den öſterlichen Vollmond für die Jahre vor Ao. 1600 damit beſtimmen kann. Denn weil 50 ganze Zirkel 1650 Jahre geben, ſo kann man das 50te Jahr vor der Æra vulgari für das 0 Jahr der Epoche annehmen. Man addiret alſo zu dem vorgegebenen Jahre 50 und verfähret im übrigen wie oben §. 16. n. 1. 2. und ſo ferner. Weil aber in 50 Zirkeln, zurück gerechnet, der Sonntagsbuchſtab um 50 Tage, oder um 7 Wochen und 1 Tag das iſt um 1 zurück geht; ſo muß man, um den Sonntagsbuchſtab zu haben, den Quotienten um 1 vermindern, und im übrigen wie oben §. 16. und ferner verfahren.

Man fragt z. E., was das Jahr 325 in unſerm Kalender für einen Sonntngsbuchſtaben habe?

ſo addiret man zu 325
die Zahl . . 50
375 (11 Quotient
dividiret mit 33) 33
45
33
Ueberreſt 12 ein Schaltjahr
darunter ſind 3 Schaltjahre
15 zurück
der Quotient um 1 vermindert 10 Vorwärts
5 zurück C.

Alſo iſt der Sonntagsbuchſtab in dieſem Jahr C. Dieſen giebt auch der Julianiſche Kalender.

§. 74.

Das Frühlings-Aequinoctium zu finden, verfährt man wie oben im 4ten Abſchnitt: das iſt man ſuchet den Ueberreſt in der Aquinoctialtafel, und addiret zu der danebenſtehenden Zeit 2 Stunden und 30 Minuten; weil das Aequinoctium in 50 Zirkeln, zurück gerechnet, um 150 Minuten vor ſich geht (§. 12). Von der Summa zieht man den Quotienten 3mal genommen ab; ſo zeigt der Uberreſt den Tag, die Stunde und Minuten des Aequinoctii im Märzen.

In obigem Exempel iſt der Ueberreſt 12; dieſer giebt in der Aequinoctialtafel den 20ten März, 7. Uhr 14. Minuten Vormittag: dazu addiret man 2 Stunden 30 Minuten, thut 9 U. 44 M. Hiervon den Quotienten 3mal, das iſt 33 Minuten abgezogen, verbleiben 9 Uhr 11 Minuten zur Zeit des Aequinoctii zu Rom den 20ten März Ao. 325.

§. 75.

Den öſterlichen mittlern Vollmond zu beſtimmen verfährt man wie oben (§. 47. und ferner.) Man thut aber zu der gefundenen Zeit eine Epacte von 50 Zirkeln, mit 19 Tagen, 5 Stunden und 12 Minuten hinzu; weil der mittlere Vollmond in ſolcher Zeit, zurückgerechnet, um ſoviel vor ſich geht.

Im obigen Exempel giebt der Quotient 11 in der Epactentafel

Nro. 1	8 Tage	22 Stunden	58 Minuten.
dazu . . .	19	5	12
thut	28 Tage	4 Stunden	10 Minuten.
Der Ueberreſt 12 giebt in der Epactentafel Nro. 2,	12 Tage	11 Stunden	20 Minuten.
Vollmond im März den	15ten um	16 Uhr	50 Minuten.

Weil aber dieſer vor dem Aequinoctio fällt: ſo iſt er nicht öſterlich: man muß alſo noch eine Monds-Revolution darzu thun

mit 29 Tagen 12 Stunden 44 Minuten.

thut 45 Tage 5 Stunden 34 Minuten

Den Märzen mit 31 Tagen abgezogen, fällt der öſterliche Vollmond auf den 14ten April um 5 Uhr 44 Minuten Nachmittag. Dieſer hat den Buchſtaben F; folglich war er ein Mittwoch: alſo fiel Oſtern auf den 18ten April.

Wir wollen es auch mit einem Jahr verſuchen, welches in der Hiſtorie ſehr berühmt iſt, weil es darinnen Zweifel wegen des Oſterfeſts abſetzte: und das iſt das Jahr 387, worinnen der Heil. Auguſtinus am Charſamſtage, den 24ten April, getauft wurde.

387
50

437 } 13 Quotient
33) 33 }

107
99

8 ein Schaltjahr
darunter 2 Schaltjahre

10 Zurück
Quotient corrigirt 12 Vorwärts

2 Vorwärts C

Der Sonntagsbuchſtab war alſo nach dem Schalttage C; und dieſen giebt auch der Julianiſche Kalender (§. 69.)

Der Ueberreſt 8 giebt in der Aequinoctialtafel am 20ten März das Aequinoctium um 7 Uhr 58′ frühe. Dazu 2 St. 30′, das thut 10 Uhr 28′. Davon abgezogen den Quotienten dreymal, das iſt 39′, verbleibt zur wahren Zeit des Aequinoctii der 20te März um 9 Uhr 49′ früh.

Eine 50fache Zirkel Epacte thut	19 Tage	5 St.	12 Min.
der Quotient 13 giebt in der Epacten-Tafel Nro. 1,	29 Tage	10 St.	49 Min.
Zuſammen	48 T.	16 St.	1 Min.
der Ueberreſt 8 giebt Nro. 2,	28 T.	—	3 Min.
alſo der Vollmond im Märzen den	20ten	um 15 U.	58 Min.

das iſt den 21ten um 2 Minuten vor 4 Uhr in der Frühe. Nach den Caſſiniſchen Tafeln begab ſich der wahre Vollmond den 21ten etliche Minuten nach 11 Uhr vormittag; er war alſo ganz gewiß öſterlich. Weil aber dieſer Tag den Buchſtaben C hat, ſo war er dießmal ein Sonntag, folglich hätte Oſtern 8 Tage darnach das iſt am 28ten März gefeyert werden ſollen. Der Heil. Ambroſius entſchied aber, auf die Anfrage der Biſchöffe von Aemilien, daß der 25te April der wahre Oſtertag wäre, welches unrecht war. Der Mondszirkel hatte ihn verführet; denn dieſer zeigt wirklich den öſterlichen Vollmond auf den 18ten April. Hieraus ſieht man abermal, wie gegründet unſere obige Anmerkung (§. 8.) iſt.

§. 76.

Wenn man will; ſo kann man auch dieſe Methode fü die Jahre, die auf 1600 folgen, gebrauchen.

Nehmen

Nehmen wir zum Exempel das Jahr	1769	
thun wir hiezu die Zahl von	50	
thut	1819 }	55 Quotient
dieſe mit 33 dividiret	33) 165 }	
	169	
	165	
der Ueberreſt ein Schaltjahr	4	
darunter ſtecken Schaltjahre	1	
	thut 5	Zuück
der Quotient um 1 vermindert	54	Vorwärts
	49	Vorwärts
dieſe 49 mit 7 dividiret bleibt übrig	0	—

Alſo iſt in dieſem Jahr der Sonntagsbuchſtab A, wie hieroben (§. 8.)

Der Ueberreſt 4 zeigt in der Aquinoctialtafel den 20ten März um 8 Uhr 43 Minuten: dazu addiret 2 Stunden 30 Minuten, thut 11 Stunden 12 Minuten: davon abgezogen den Quotienten 3mal mit 165 Minuten, oder 2 Stunden 45 Minuten, verbleiben 8 Uhr 27 Minuten zur Zeit des Aquinoctii zu Rom den 20ten März.

Eben ſo kömmt die Zeit des mittlern Vollmonds heraus. Denn der Quotient 55 giebt in der Epactentafel Nro. 1,

	16 Tage	20 St.	28 Min.
dazu	19	5	12
thut	36 Tage	1 St.	40 Min.

das iſt: 36 Tage 1 St. 40 Min.
Der Ueberreſt 4 giebt in der Epactentafel Nro. 2, 14 Tage — St. 1 Min.

Alſo fällt der mittlere Vollmond im März auf den 22ten um 1 Uhr 39 Min.
und dieß trift mit der Berechnung (§. 49.) bis auf eine einzige Minute nahe genau zuſammen.

§. 77.

Wenn man alſo auch die Gregorianiſche Einſchaltungsart beybehalten wollte; ſo würde doch noch unſer Syſtem dazu dienen, daß man die weſentlichen Stücke des Kalenders für das vorgegebene Jahr daraus beſtimmte, und die gefundenen Tage ſofort auf den Gregorianiſchen Kalender reducirte (§. 68.)

Nehmen wir z. E. das Jahr 1768. Dieß iſt in unſerm Kalender das 3te im 6ten Zirkel von Ao. 1600 angefangen, und hat den Sonntagsbuchſtaben C. Das Aequinoctium fällt auf den 21ten März um 2 Uhr 38 Minuten frühe: und der öſterliche Vollmond den 3ten April um 4 Uhr 50 Minuten früh. Weil nun der Gregorianiſche Kalender dieſes Jahr nach dem Schalttage den Sonntagsbuchſtaben B hat, folglich um einen Buchſtaben weniger zählet als der unſrige; ſo fällt das Frühlings-Aequinoctium nach dem Gregorianiſchen Stylo den 20ten März, um 2 Uhr 38 Minuten frühe, und der öſterliche Vollmond den 2ten April um 4 Uhr 50 Minuten frühe. Der 2te April hat den Buchſtaben A; folglich fällt Oſtern in dieſem Jahr nach dem Gregorianiſchen Styl auf den 3ten April.

Zweyter Theil.

Erſter Abſchnitt.

Eingang.

§. 78.

Bis hieher habe ich immer den einfachen Zirkel von 33 Jahren für den beſten gehalten, und bewieſen, daß er unter allen anderen Zirkeln, wegen der Einſchaltungsart, der beſte iſt. (§. 14.) Die Combination zweyer oder mehrerer verſchiedener Zirkel hat mir immer etwas perplexes zu ſeyn geſchienen. Nach einem reifen Nachdenken aber habe ich gefunden, daß es in der Berechnung eben ſo wenig, oder doch nicht viel mehr Mühe braucht, zween verſchiedene Zirkel mit einander zu combiniren, als ſich eines einfachen zu bedienen.

§. 79.

Es iſt beynahe ſo gut als demonſtriret, daß die wahre Größe des tropiſchen Jahres geringer als 365 Tage, 5 Stunden, 48 Min. und 49 Sec. und näher bey 44 Sec. als 49 iſt. Der Herr de la Laude in ſeiner Aſtronomie 1. Buch §. 127. giebt die Größe des tropiſchen Jahres von 365 Tagen, 5 Stunden, 48 Min. und 45 Sec. als aus der Erfahrung richtig beſtimmet an. Wir haben ſchon oben (§. 12) gezeiget, daß in dieſer Vorausſetzung ein Zirkel von 33 bürgerlichen Jahren, in welchem 8 Tage eingeſchaltet werden, um 11 Min. 15 Sec. kleiner, als 33 tropiſche Jahre; und daß hingegen 29 tropiſche Jahre um 33 Min. 45

Sec. größer ſind als ein Zirkel von 29 bürgerlichen Jahren, worinnen 7 Tage eingeſchaltet werden. Drey Zirkel von 33 Jahren (das iſt 99 Jahre, worinnen 24 Tage eingeſchaltet werden) ſind demnach um 33 Min. 45 Sec. kleiner als 99 tropiſche Jahre; und 29 tropiſche Jahre ſind um 33 Min. 45 Sec. größer als ein Zirkel von 29 Jahren, worinnen 7 Tage eingeſchaltet werden. Wenn man alſo 3 Zirkel von 33 Jahren, und hernach einen von 29 Jahren gebrauchet, die zuſammen 128 Jahre ausmachen; ſo werden die Fehler gegen einander vollkommen compenſiret: wenn man nämlich voraus ſetzet, daß das tropiſche Jahr auf das allergenaueſte 365 Tage, 5 Stunden, 48 Min. und 45 Sec. beträgt, wie man faſt ſicher vermuthen darf. Nach 128 Jahren gienge folglich das Æquinoctium nicht einmal um eine Secunde zurück oder vor ſich, welches in einem einfachen Zirkel von 33 Jahren um 3 Minuten zurücke tretten würde, wenn das tropiſche Jahr auf das genaueſte 365 Tage, 5 Stunden, 49 Min. ausmachte (§. 12.)

§. 80.

Ein ſolcher zuſammen geſetzter Zirkel von 128 Jahren iſt demnach in allem Betracht dem einfachen von 33 Jahren weit vorzuziehen. Nun ſollte man meynen, es würde hierzu eine ſehr perplexe Rechnung erfordert. Es iſt aber dem nicht alſo, wie wir bald hernach ſehen werden. Ich werde hier viel kürzer ſeyn, als im erſten Theile, weil die allda weitläufiger angebrachten Gründe darzu dienen, das, was ich nunmehr im Kurzen ſagen werde, vollſtändig zu erläutern.

* * *

Zweyter Abſchnitt.

Wie im combinirten Zirkel von 128 Jahren die Eigenſchaft der Jahre, und für ein jedes gegebenes Jahr der Sonntagsbuchſtab zu beſtimmen.

§. 81.

Wir ſetzen 3 Zirkel von 33 Jahren, in deren jedem das 4te, 8te, 12te, 16te, 20te, 24te, 28te und 33te Jahr Schaltjahre von 366 Tagen ſind. Auf dieſe 3 Zirkel, die 99 Jahre ausmachen, laſſen wir einen einzigen Zirkel von 29 Jahren folgen; worinnen das 4te, 8te, 12te, 16te, 20te, 24te und 29te Schaltjahre ſind. Beyde zuſammen machen alſo einen groſſen Zirkel von 128 Jahren aus, worinnen über die 365 Tage, die für ein gemeines Jahr gelten, 3mal 8, (das iſt 24) und 1mal 7, zuſammen alſo 31 Tage eingeſchaltet werden. Ein ſolcher Zirkel von 128 Jahren enthält demnach über die completen Wochen noch 128 und 31, zuſammen aber 159 Tage; das iſt 22 Wochen und 5 Tage.

§. 82.

Wenn alſo z. E. das erſte Jahr im erſten Zirkel von 128 Jahren mit einem Sonntage angefangen hat, ſo fängt das erſte im 2ten Zirkel mit einem Freytage an. Folglich gehen die Sonntagsbuchſtaben nach Verfluſſe eines 128jährigen Zirkels um 2 vor ſich. Wenn demnach das Jahr 1600 den Sonntagsbuchſtaben A hat; ſo hat das Jahr 1728 C.

§. 83.

Wir haben ſchon oben (§. 15) erwieſen, daß nach einem 33jährigen Zirkel der Sonntagsbuchſtab um 1 weiter vor ſich geht.

Und jedermann weis, daß nach einem gemeinen Jahre der Sonntagsbuchſtab um 1, und nach einem Schaltjahre um 2 zurücke geht. Dieß alles voraus geſetzet, wird es nicht ſchwer fallen, zu beſtimmen, ob ein vorgegebenes Jahr der gemeinen Zeitrechnung ein gemeines oder ein Schaltjahr nach unſerm Stylo iſt, und ob es zum größern Zirkel von 33, oder zum kleinern von 29 Jahren gehöret, und was ihm für ein Sonntagsbuchſtab zukömmt.

§. 84.

1) Man reduciret nämlich das vorgegebene Jahr Chriſti auf unſre Æram, das iſt, man zieht 1600 davon ab.

2) Den Ueberreſt, welcher das Jahr unſrer Æræ andeutet, dividiret man mit 128; was heraus kömmt, nennet man den **erſten Quotienten**

3) Was nach der Diviſion übrig bleibt, dividiret man ferner mit 33, und nennet das, was heraus kömmt, den **zweyten Quotienten**

4) Wenn dieſer zweyte Quotient geringer iſt, als 3; ſo zeiget der Ueberreſt nach der zweyten Diviſion das laufende Jahr im größern Zirkel von 33 Jahren an, worinnen 32 ein gemeines Jahr iſt. Wäre aber der zweyte Quotient 3 (größer kann er niemal ſeyn) ſo deutet der Ueberreſt nach der zweyten Diviſion das laufende Jahr im kleinern Zirkel von 29 Jahren an, worinnen das 28te ein gemeines Jahr iſt.

5) Wenn ſich der zweyte Ueberreſt gerade auf mit 4 dividiren läßt; ſo iſt das vorgegebene Jahr ein Schaltjahr, ausgenommen 32 im größern und 28 in kleinern Zirkel (N. 4)

6) Wenn nach der erſten, oder zweyten Diviſion nichts das iſt 0 übrig bleibt, ſo iſt das vorgegebene Jahr ein Schaltjahr.

Z. E. 1) 1769 der gemeinen Zeitrechnung
1600
169⎤
128) 128⎦ 1 Erſter Quotient
41⎤
33) 33⎦ 1 Zweyter Quotient
8 ein Schaltjahr im 2ten größern Zirkel von 33 Jahren.

2) 1836 der gemeinen Zeitrechnung
1600
236⎤
128) 128⎦ 1 Erſter Quotient
108⎦ 3 Zweyter Quotient
33) 99
9 ein gemeines Jahr im kleinen Zirkel von 29 Jahren.

3) 1826
1600
226⎤
128) 128⎦ 1 Erſter Quotient
98⎤
33) 66⎦ 2 Zweyter Quotient
32 ein gemeines Jahr im 3ten größern Zirkel von 33 Jahren.

4) 1855
1600
255 ⌉
128) 128 | 1 Erſter Quotient
127 |
33) 99 ⌋ 3 Zweyter Quotient
28 ein gemeines Jahr im kleinern Zirkel von 29 Jahren.

5) 1856
1600
256 ⌉
128) 256 ⌋ 2 Erſter Quotient
— 0 Ein Schaltjahr das letzte im zweyten größten Zirkel.

6) 1889
1600
289 ⌉
128) 256 | 2 Erſter Quotient
33 |
33) 33 ⌋ 1 Zweyter Quotient
— 0 ein Schaltjahr das letzte im erſten größern Zirkel

7) 1922
1600
322 ⌉
128) 256 | 2 Erſter Quotient
66 |
33) 66 | 2 Zweyter Quotient
— 0 Ein Schaltjahr das letzte im zweyten großen Zirkel

8)

8) 1955
1600

355
128) 256 | 2 Erſter Quotient

99 | 3 Zweyter Quotient
33) 99

0 Ein Schaltjahr das letzte im dritten größern Zirkel.

§. 87.

Um nun den Sonntagsbuchſtaben zu finden; 1) Multipliciret man den erſten Quotienten mit 2. 2) Zum Product thut man den zweyten Quotienten, und nennt die Summe V. welche anzeiget, um wieviel der Sonntagsbuchſtab von Ao. 1600 an bis auf das vorgegebene Jahr nach dem Schalttage vorwärts gegangen iſt (§. 17.). 3) Zum Ueberreſt nach der zweyten Diviſion thut man ſoviel Einheiten, als Schaltjahre (das iſt die Zahl 4) darinnen ſtecken, (§. 16.) und nennet die Summe R. dieſe deutet an, um wieviel der Sonntagsbuchſtab rückwärts gegangen iſt. 4) Man zieht V. vor R, oder R. von V. ab, und wirft von der differenz 7 ſo oft weg, als ſichs thun läßt, ſo zeigt der Ueberreſt an, um wieviel der Sonntagsbuchſtab von A entweder vor oder- rückwärts gegangen iſt. Iſt V größer als R, ſo iſt er um ſo viel von A vor ſich gegangen, als ſie differiren. Iſt aber V kleiner als R, ſo iſt er um ſo viel von A zurücke gegangen. Die Diſpoſition der Buchſtaben bleibt wie §. 17.

Im erſten Exempel (§. 86.) war der erſte Quot. 1
mit 2 multipl.
giebt 2
Dazu den zweyten Quot. 1
giebt 3 V

Der Ueberreſt nach der zweyten Diviſion war 8
Darinnen ſteckt 4 2 mal.
1 0 R.
3 B.
7) 7 (1
7
0 A B

Im 2ten Exempel iſt der erſte Quotient 1
mit 2 multipl.
giebt 2
Dazu den zweyten Quotienten 3
5 B.
Der Ueberreſt nach der zweyten Diviſion war 9
Darinnen ſteckt 4 2 mal
1 1 R.
5 B.
6 rückw. B.

Im dritten Exempel iſt der erſte Quotient 1
mit 2 multipl.
giebt 2
Dazu den zweyten Quotienten 2
4 B
Der Ueberreſt nach der zweyten Diviſion war 3 2
Darinnen ſtecken Schaltjahre 7 (§. 84.)
3 9 R
4 B
3 9

7 fünf-

das iſt 39
7 fönfmal abgezogen, oder 35
Verbleibt 0 A

Im vierten Exempel iſt der erſte Quotient 1
mit 2 multipl.
giebt 2
Dazu den zweyten Quotienten 3
5 B
Der Ueberreſt nach der zweyten Diviſion iſt 28
Darinnen ſtecken Schaltjahre 7
35 R
5 B
30
7 viermal abgezogen, oder 28
2 rückw. F

Im fünften Exempel iſt der erſte Quotient 2
mit 2 multipl.
giebt 4 B. vorw. E

Im ſechſten Exempel iſt der erſte Quotient 2
mit 2 multipl.
giebt 4
Dazu den zweyten Quotienten 1
5 B. F

Man muß demnach von A 5 weiter vor ſich zählen, ſo kömmt man auf F.

Im ſiebenten Exempel iſt der erſte Quotient 2
mit 2 multipl.
giebt 4
Dazu der zweyte Quotient 2
6 V. vorwärts G.

Im achten Exempel endlich iſt der erſte Quotient 2
mit 2
giebt 4
Dazu den zweyten Quotienten 3
7
7 einmal weggeworfen 7
Verbleibt 0 A

Dritter Abſchnitt.

Wie die Zeit des Frühlings-Æquinoctii für ein jedes gegebenes Jahr in dieſer Jahrseinrichtung zu finden.

§. 86.

Weil wir das tropiſche Jahr (§ 79.) zu 365 Tagen, 5 Stunden, 48 Min. 45 Sec. angenommen haben; ſo bekömmt auch unſere folgende Aequinoctialtafel eine andere Geſtalt, als die obige (§ 26.)

Laufendes Jahr im Zirkel.		Tag des Æquinoctii im Märzen.		Uhr	M.	Sec.
Schaltj.	0	20	Vormit.	9	26	—
	1	—	Nachmit.	3	14	45
	2	—	Nachmit.	9	3	30
	3	21	Vormit.	2	52	15
Schaltj.	4	20	Vormit.	8	41	—
	5	—	Nachmit.	2	29	45
	6	—	Nachmit.	8	18	30
	7	21	Vormit.	2	7	15
Schaltj.	8	20	Vormit.	7	56	—
	9	—	Nachmit.	1	44	45
	10	—	Nachmit.	7	35	30
	11	21	Vormit.	1	22	15
Schaltj.	12	20	Vormit.	7	11	—
	13	—	Nachmit.	0	59	45
	14	—	Nachmit.	6	48	30
	15	21	Vormit.	0	37	15
Schaltj.	16	20	Vormit.	6	26	—
	17	—	Nachmit.	0	14	45
	18	—	Nachmit.	6	3	30
	19	—	Nachmit.	11	52	15
Schaltj.	20	—	Vormit.	5	41	—
	21	—	Vormit.	11	29	45
	22	—	Nachmit.	5	18	30
	23	—	Nachmit.	11	7	15

Laufen-

	Laufendes Jahr im Zirkel.	Tag des Æquinoctii im Märzen.		Uhr	M.	Sec.
Schaltj.	24	20	Vormit.	4	56	—
	25	—	Vormit.	10	44	45
	26	—	Nachmit.	4	33	30
	27	—	Nachmit.	10	22	15
Schaltj.	28	—	Vormit.	4	11	—
	In einem kleineren Zirkel von 29 Jahren.					
	28	21	Vormit.	4	11	—
	29	20	Vormit.	9	59	45
	30	—	Nachmit.	3	48	30
	31	—	Nachmit.	9	37	15
	32	21	Vormit.	3	26	—
Schaltj.	33	20	Vormit.	9	14	45

§. 87.

Vergleicht man nun das 0 Jahr im größern Zirkel mit dem 33ten, ſo zeiget ſich, daß das Aequinoctium nach einem größeren Zirkel um 11 Min. 15 Sec. folglich nach dreyen Zirkeln um 33 Min. 45 Sec. zurücktritt. Und wenn man eben dieſes 0 Jahr mit dem 29ten im kleineren Zirkel von 29 Jahren vergleichet; ſo ergiebt ſich, daß nach Verfluß eines ſolchen kleinen Zirkels das Aequinoctium um 33 Min. 45 Sec. weiter fortrücket. Wenn man demnach 3 größere und einen kleineren Zirkel mit einander verbindet; ſo iſt klar, daß das Aequinoctium nach Verfluß eines ſolchen größten Zirkels von 128 Jahren um eben ſo viel zurücke tritt, als es weiter vor ſich geht; folgſam daß ſich beyde, der Zurück- und

Vorgang des Aequinoctii, gegen einander genau compenſiren. a) Und dieß beſtättiget dasjenige vollkommen, was wir hieoben (§. 79.) geſaget haben.

§. 88.

Will man demnach die eigentliche wahre Zeit des Aequinoctii für ein gegebenes Jahr auf das genaueſte wiſſen; ſo multipliciret man den zweyten Quotienten (§ 79.) mit 11 Min. 15 Sec. ſo zeiget das Product, wie viele Min. von der in der Tabelle gefundenen Zeit abgezogen werden müſſen, um die wahre Zeit des Aequinoctii auf das genaueſte zu beſtimmen.

Wir geben hiervon folgendes Beyſpiel.

Im 2ten Exempel (§. 86.) iſt der zweyte Quotient 3; dieſer mit 11 Min. 15 Sec. multipliciret, giebt 33 Minuten, 45 Sec. Der Ueberreſt 9 zeiget in der Aequinoctialtabell den 20ten März um 1 Uhr, 44 Min. 45 Sec. Nachmittag. Hiervon zieht man die oben gefundenen 33 Min. 45 Sec. ab; ſo verbleibt zur wahren Zeit des Æquinoctii im Jahre Chriſti 1836 der 20te März um 1 Uhr, 11 Min. Nachmittag; wenn nämlich das tropiſche Jahr auf das allergenaueſte 365 Tage, 5 Stunden, 48 Min. und 45 Sec. ausmachet, wie wir angenommen haben.

---

a) Man multiplicire den Unterſchied eines tropiſchen Jahres von einem gemeinen, ſo 5 St. 48 Min. 45 Sec. ausmachet, mit 128, ſo kommen gerade 31 Tage heraus, ſo viel wir nämlich in dieſer Zeit einſchalten.

§. 89.

Die proteſtantiſchen Stände des Reichs haben deswegen den 33jährigen und alle übrige combinirte Zirkel verworfen, weil ſie dafür hielten, daß, um eine richtige Einſchaltung zu erhalten, die Kenntniß der eigentlichen Größe des tropiſchen Jahres unumgänglich nöthig wäre. Wir getrauen uns aber zu zeigen, daß ſie gar nicht dazu nöthig iſt. Wir haben ſchon oben (§. 12.) bewieſen, das, wenn man einen einfachen Zirkel gebrauchen will, keiner als der von 33 Jahren der Sache am nächſten tritt. Wir haben weiters gezeiget, (§. 79.) daß das tropiſche Jahr nicht größer als 365 Tage, 5 St. 48 Min. 49 Sec., und nicht kleiner als 365 Tage, 5 St. 48 Min. 45 Sec., nach den bewährteſten Obſervationen ſeyn könne. Wir haben hiernächſt die letztere Quantität des tropiſchen Jahres, welche Mr. de la Lande für die richtigſte angiebt, darum erwählet, weil ſie ſich für einen combinirten großen Zirkel von dreyen größern Zirkeln zu 33 Jahren, und einen kleinern zu 29 Jahren, die zuſammen 128 Jahre ausmachen, am beſten ſchickt.

§. 90.

Wollte man mit Beybehaltung dieſer Größe des tropiſchen Jahres 4 größere Zirkel zu 33 Jahren, und einen kleinern zu 29 Jahren mit einander combiniren, und einen zuſammen geſetzten Zirkel daraus machen; ſo würde ſich ein Unterſchied von 11 Min. 15 Sec. ergeben; und dieſer Unterſchied würde deſto beträchtlicher werden, je öfter man den größern Zirkel gebrauchete. Noch größer aber würden dieſe Differenzen anwachſen, wenn das tropiſche Jahr größer wäre, als wir es angenommen haben.

§. 91.

§. 91.

Man verſuche es auch mit andern Zirkeln. Man combinire z. E. einen 37jährigen 2- oder 3mal mit einem 25- oder 29jährigen ꝛc. Man nehme das tropiſche Jahr nach verſchiedenen möglichen Größen an; ſo wird man allemal finden, daß keine einzige Zirkel-Combination der Sache ſo nahe tritt, als die unſrige; und daß folglich keine einzige Einſchaltungsart in der Welt bequemer ſey, als die 33jährige im erſten Theile, wenn man einfache Zirkel haben will: und keine andere, als die 128jährige in dieſem zweyten Theile, wenn man zuſammen geſetzte Zirkel verlanget.

§. 92.

Sollte endlich einmal die Größe des tropiſchen Jahres bis auf Tertzen genau ausfindig gemacht werden; ſo darf man darum unſere Zirkel nicht ändern: ſondern man machet ſich eine neue Aequinoctialtafel, welche auf die wahre Größe des tropiſchen Jahres eingerichtet iſt. Dieß hat nicht die geringſte Schwürigkeit; weil ſolche Tafel aus der bloßen Addition des Unterſchieds eines gemeinen Jahres zu 365 Tagen von einem tropiſchen entſpringt, wie wir ſchon oben gezeiget haben. §. 26.) Man wird alsdann gleich ſehen, wie viel nach einem jeden Zirkel das Æquinoctium entweder zurücke oder vor ſich gehet: und hienach kan man die (§. 28.) an Hand gegegene Correction vornehmen. Hieraus veroffenbaret ſich abermal, wie wenig man ſich in Erwählung einer aus den von uns vorgeſchlagenen Einſchaltungs-Arten an der Größe des tropiſchen Jahres aufzuhalten habe.

Vierter Abſchnitt.

Von der Art und Weiſe den öſterlichen mittleren Vollmond im combinirten Kalender zu finden.

§. 93.

Wir beziehen uns vor allen auf den 4ten Abſchnitt unſers erſten Theils. Unſere Epaktentafel bekömmt aber, weil wir hier zweyerley Quotienten und verſchiedene Zirkel haben, eine andere Geſtalt, als die hieroben (§.44.) Die Epakte für einen ganzen Zirkel zu 33 Jahren thut 4 Tage, 12 Stunden, 26 Min. 28 Sec. genau: und dieſe 3mal genommen, (das iſt für 3 Zirkel oder 99 Jahre), 13 T. 13 St. 19 M. 24 Sec. Thut man zu der Epakte von einem kleinern Zirkel zu 29 Jahren, 20 T. 1 St. 9 M. 6″ 20‴. hinzu, und zieht von der Summe eine ganze Mondsrevolution zu 29 T. 12 St. 44 M. 3″. 10‴ ab; ſo giebt der Ueberreſt die Epakte für den zuſammen geſetzten Zirkel von 128 Jahren, zu 4 T. 1 St. 44 M. 27 Sec. und 10‴. Aus dieſen Gründen iſt nun unſere folgende Epaktentafel durch die bloße Addition entſprungen.

* * *

Epaktentafel. Epoche An. 1600 den 29. März, 3 U. 9 Min.

No. 1. Combinirte Zirkelepakten.

1ter Quot.	Epakten. Tage.	St.	M.	Sec.
1	4	1	44	27
2	8	3	28	54
3	12	5	13	21
4	16	6	57	48
5	20	8	42	15
6	24	10	27	43
7	28	12	12	10
8	3	1	12	34
9	7	2	56	1
10	11	4	40	28
11	15	6	24	55
12	19	8	9	22
13	23	9	53	49
14	27	11	38	16
15	2	—	38	40
20	22	9	20	56
30	4	1	17	21
40	15	5	57	49
50	26	10	38	17
60	8	2	34	42
70	19	7	15	10
80	—	23	11	35
90	12	3	52	3
100	23	8	32	31

No. 2. Einfache Zirkel-Epakten.

2ter Quot.	Epakten. Tage	St.	M.	Sec.
1	4	12	26	28
2	9	—	52	56
3	13	13	19	24

No. 3. Jahres-Epakten.

Ueberreſt.	Epakten. Tage	St.	M.	Sec.	
1	10	15	11	22	
2	21	6	22	44	
3	2	8	50	3	
4	14	0	1	25	
5	24	15	12	47	
6	5	17	40	6	
7	16	8	51	28	
8	28	—	2	50	
9	9	2	30	9	
10	19	17	41	31	
11	—	20	8	50	
12	12	11	20	12	
13	23	2	31	34	
14	4	4	58	53	
15	14	20	10	15	
16	26	11	21	37	
17	7	13	48	55	
18	18	5	—	17	
19	28	20	11	39	
20	10	22	38	59	
21	21	13	50	20	
22	2	16	17	39	
23	13	7	29	1	
24	24	22	40	23	
25	6	1	7	42	
26	16	16	19	4	
27	27	7	30	26	
28	9	9	57	45	im gröſs. Zirk.
	8	9	57	45	im klein. Zirk
29	20	1	9	7	
30	1	3	36	26	
31	11	18	47	48	
32	22	9	59	9	
33	4	12	26	28	

Die Monds-Revolutionen findet man ſchon oben in der Tabelle (§ 44.)

Weil 13 groſe Zirkel 1664 Jahre ausmachen, ſo darf man nur eine 13fache combinirte Zirkel-Epakte mit 23 T: 9 St. 53 Min. 49 Sec. zur obigen Epoche der 29 T. 3 St. 9 Min. hinzuthun; und von der Summa eine ganze Revolution von 29 T. 12 St: 44 Min. 3 Sec. hinweg nehmen; ſo verbleibt der 23te März. — St. 18 M. 46 Sec zur Epoche des mittl Vollm. im 64ten Jahre vor der gemeinen Zeitrechnung.

§. 94.

Wenn man demnach die Zeit des mittlern Vollmonds im Märzen für jedes vorgegebene Jahr wiſſen will; ſo ſucht man 1) den erſten Quotienten in der Tafel Nro 1 auf, und nimmt die damit correſpondirende Epacte; 2) Eben ſo excerpiret man die mit dem zweyten Quotienten correſpondirende Epacte Nro. 2, und 3) diejenige Epacte Nro. 3, welche dem Ueberreſt zukömmt. 4) Man bringt alle drey Epacten in eine Summa, und zieht 5) ſoviel Revolutionen davon ab, als ſichs thun läßt; ſo zeigt die verbleibende Zahl, um wieviel Tage, Stunden, Minuten ꝛc. der mittlere Vollmond im Märzen ſeit Ao. 1600 bis auf das vorgegebene Jahr zurückgegangen iſt. Man zieht alſo 6) dieſe verbleibende Zahl vom 29ten Märzen 3 Uhr und 9 Minuten ab, (an welchem Tage ſich im Jahr 1600 der mittlere Vollmond zu Rom ereignet hat; (§. 43.):) ſo zeigt der Ueberreſt den Tag, die Stunde, Minute ꝛc. des mittleren Vollmonds im Märzen für das vorgegebene Jahr.

Nehmen wir das erſte Exempel (§. 86.) vom Jahr 1769 da iſt der erſte Quotient 1, hiemit correſpondiret Nro. 1 die

Epacte	4 T.	1 St.	44 M.	27 Sec.
Der zweyte Quotient iſt auch 1, dieſer hat zur Epacte Nrò. 2,	4 T.	12 St.	26 M.	28 Sec.
Der Ueberreſt 8 hat zur Epacte N. 3,	28 T.	0 St.	2 M.	50 Sec.
thut zuſammen	36 T.	14 St.	13 M.	45 Sec.
Eine ganze Rev. davon abgez. mit	29 T.	12 St.	44 M.	3 Sec.
Verbleiben	7 T.	1 St	29 M.	42 Sec.
abgezogen von	29	3	9	—
Vollmond im Märzen den	22 um	1 U.	39 M.	18 Sec.

Dieß trift mit der obigen Berechnung (§. 49.) vollkommen überein und eben den Tag weißt auch der Gregorianiſche Kalender.

§. 95.

Wenn der ſolchergeſtalt gefundene Tag des Vollmonds vor dem Aequinoctio fällt; ſo iſt er nicht öſterlich: man muß alſo noch eine Revolution dazu thun, und von der Summe den ganzen März mit 31 Tagen abziehen; ſo zeigt der Ueberreſt den Tag, und die Stunde ꝛc. des mittlern öſterlichen Vollmonds im April.

Nehmen wir das zweyte Exempel (§. 86.) vom Jahr 1836 da iſt der erſte Quotient 1. Hiemit correſpondiret Nro. 1, die

Epacte	4 T.	1 St.	44 M.	27 Sec.
Der zweyte Quotient 3 hat die Epacte Nro. 2,	13 T.	13 St.	19 M.	24 Sec.
Der Ueberreſt 9 Nro. 3	9 T.	2 St.	30 M.	9 Sec.
thut zuſammen	26 T.	17 St.	34 M.	— Sec.
abgezogen von	29 T.	3 St.	9 M.	— Sec.
Vollmond im Märzen den	2 um	9 U.	35 M.	— Sec.
dazu eine Revolution Nro. 4,	29	12	44	3
	31 T.	22 St.	19 M.	3 Sec.

Alſo fällt der mittlere Vollmond Ao. 1836 auf den 1ten April um 10 Uhr 19 Minuten 3 Secunden Vormittag (a).

(a) Dieſen Tag zeigt auch der Gregorianiſche Kalender, welcher nach ſeinem Schalttage eben den Sonntagsbuchſtaben, wie der unſrige, nämlich B hat.

Im 8ten Exempel (§. 86.) vom Jahr 1955 iſt der erſte Quotient 2, dieſer hat Nro. 1, die Epacte

	8 T.	3 St.	28 M.	54 Sec.
Der zweyte Quotient 3,	13 T.	13 St.	19 M.	24 Sec.
Der Ueberreſt 0 . .	—	—	—	—
thut zuſammen	21 T.	16 St.	48 M.	18 Sec.
abgezogen von	29 T.	3 St.	9 M.	—
Vollmond im Märzen den	7 um	10 U.	20 M.	42 Sec.
dazu eine ganze Revolution	29 T.	12 St.	44 M.	3 Sec.
	36	23	4	45
abgezogen den Märzen mit	31	—	—	—
Vollmond im April den	5 um	23 U.	4 M.	45 Sec.

das iſt den 6ten April um 11 Uhr 4 Minute 45 Secunden Vormittag (a)

Dieſe Exempel mögen gnug ſeyn, unſre Regel vom Vollmond zu erläutern. Nun iſt uns nichts mehr übrig als der

Fünfte

(a) Der Gregorianiſche Kalender zeigt den 5ten April, welches der nämliche Freytag iſt, der in unſerm Kalender der 6te heißt. Denn der gregorianiſche hat das ganze Jahr hindurch B: der unſrige aber nach dem Schalttage A.

Fünfter Abſchnitt.

Von Reduction der Tage unſers Kalenders auf den gregorianiſchen und julianiſchen, in einem jeden vorgegebenen Jahre, und wie unſer Kalender-Syſtem auch auf die Jahre vor An. 1600 angewendet werden könne.

§. 96.

Was die Reductiou unſers Kalenders auf den gregorianiſchen und julianiſchen anbelanget; ſo geht es eben ſo damit zu, wie wir oben (§§. 68. u. f.) an Hand gegeben haben. Man ſucht nämlich die Sonntagsbuchſtaben für jeden Kalender, und vergleicht ſie mit einander, wenn der gregorianiſche Kalender, vorwärts gezählet um einen, zween oder mehr Buchſtaben mehr hat als der unſerige, ſo thut man zu unſern Tagen ſo viel Einheiten hinzu, als dieſe Differenz betragt, um den nämlichen Tag im gregorianiſchen Kalender zu haben, und umgekehrt. Z. E. Unſer Kalender hätte den Buchſtaben A, der gregorianiſche aber B; ſo wäre der 20te März in unſerm Stylo der 21te im gregorianiſchen. Wenn hingegen unſer Kalender D, und der gregorianiſche C hätte, ſo wäre der 20te März unſers Kalenders der 19te im gregorianiſchen.

Will man aber wiſſen, was der vorgegebene Tag unſers Kalenders für ein Tag im julianiſchen ſey; ſo reduciret man ihn zuerſt beſagter maſſen auf den gregorianiſchen (§. 70.) und dieſen hernach auf den julianiſchen.

Man fragt znm Exempel was der 20te März 1768 unſers Kalenders für ein Tag im Julianiſchen ſey? Hier haben wir den Sonntagsbuchſtaben nach dem Schalttage C. Der Gregorianiſche aber B; folglich iſt der 20te März unſers Kalenders der 19te im Gregorianiſchen. Dieſer differiret um 11 Tage von Julianiſchen (§. 70); der 8te März nach Julianiſchen Styl iſt demnach der 19te im gregorianiſchen, und der 20te in unſerm Kalender.

§. 97.

Will man aber unſer Kalender-Syſtem auf die Jahre vor Ao. 1600 anwenden; ſo darf man nur, weil 13 combinirte große Zirkel 1664 Jahre ausmachen, zu dem vorgegebenen Jahre 64 addiren, und im übrigen mit der doppelten Diviſion verfahren, wie oben (§. 84.). Und gleichwie der Sonntagsbuchſtab nach Verfluß eines großen combinirten Zirkels um 2 Buchſtaben vorwärts geht (§. 82.); ſo geht er um ſoviel rückwärts, wenn man zurück zählet. Dieß macht nach Verfluß von 13 Zir?eln 26, das iſt über 3 complete Wochen noch 5 Buchſtaben. Man darf alſo 2) nur den doppelten erſten Quotienten zu dem zweyten addiren, wie hieroben (§. 84.) und von der Summa 5 abziehen, ſo zeigt der Ueberreſt (nachdem 7 ſo oft davon weggeworfen worden) als ſichs thun läßt, um wieviel der Sonntagsbuchſtab vorwärts geht (a). 3) Zum Ueberreſt nach der zweyten Diviſion thut man ſoviel Einheiten: als Schaltjahre darinnen ſind, und wirft von der Summa ſo oft 7 hinweg als ſichs thun läßt;

(a) Wäre die Summa des doppelten erſten und des zweyten Quotienten weniger als der Ueberreſt ſamt ſeinen Schaltjahren, ſo thut man 7 dazu, und zieht hernach dieſen Ueberreſt ſamt ſeinen Schaltjahren davon ab. Zum Exempel der erſte Quotient wäre 1 der zweyte auch 1; und der Ueberreſt ſamt den Schaltjahren 5; ſo wäre die Summa von doppelten erſten und einfachen zweyten Quotienten 3. Hierzu thut man 7 geben 10. Hiervon 5 abgezogen, verbleiben 5: um ſoviel geht der Sonntagsbuchſtab vorwärts.

ſo zeigt die verbleibende Zahl, um wieviel der Sonntagsbuchſtab zurückgegangen iſt. 4) Dieſe Zahl zieht man von der Nro. 2. gefundenen ab; ſo zeigt der Ueberreſt, um wieviel der Sonntagsbuchſtab vorwärts geht. (a)

Man fragt zum Exempel was das Jahr 325 für einen Sonntagsbuchſtaben habe?

	325	
ſo thut man hinzu . . .	64	
Summa	389	3 Erſter Quotient
Dividiret mit 128)	384	
dieſe weiter dividiret mit 33)	5	0 Zweyter Quotient
	0	
Ueberreſt nach der 2ten Diviſion	5	
darunter iſt	1	Schaltjahr
	6	
Der erſte Quot. zweymal genommen iſt	6	
den zweyten dazu	0	
Summa	6	
Davon abgezogen	5	
bleibt	1	
Dazu	7	
	8	
Hiervon abgezogen	6	Nro. 3.
Verbleiben	2	Vorwärts

Alſo iſt der Sonntagsbuchſtab in dieſem Jahr E.

(a) Wenn die Nro, 2 gefundene Zahl kleiner iſt, als die Nro. 3; ſo thut man 7 hinzu, und verfährt hernach mit der Subtraction, wie hiervor gemeldet wird. Auf dieſe Art darf man die Buchſtaben niemal rückwärts zählen.

	387	
	64	
	451	3 Erſter Quotient
128)	384	
	67	2 Zweyter Quotient
33)	66	
Ueberreſt	1	
Erſter Quotient 2mal	6	
Dazu den zweyten	2	
	8	
Davon abgezogen . .	5	
Verbleiben	3	
weiter abgezogen	1	Nro. 3
Verbleiben	2	Vorwärts;

folglich iſt der Sonntagsbuchſtab auch in dieſem Jahr **C.**

§. 98.

Das Frühlings-Aequinoctium wird eben ſo, wie oben (§§. 24. 87.) gefunden: weil daſſelbe nach Verfluß von 128 Jahren weder vor ſich noch zurückgeht. Und ſo wird man finden, daß es im Jahr 325 auf den 20ten Märzen, um 2 Uhr 29 Min. 45 Secunden Nachmittag, und im Jahr 387 auf den 20ten Märzen, um 2 Uhr 52 Minuten 15 Secunden fällt; wenn nämlich bey dieſen letztern der zweyte Quotient 2, mit $11\frac{1}{4}$ Minuten multipliciret, von der in der Aequinoctial-Tafel gefundenen Zeit abgezogen wird.

§. 99.

Eben ſo verfähret man wie oben (§ §. 47.) um den öſterlichen mittlern Vollmond zu finden, nur mit dem Unterſchied, daß man, an ſtatt der Epoche vom Jahr 1600, ſo auf den 29ten Märzen, 3 Uhr 9 Minuten geſtellet iſt, die Epoche von Ao 64 vor der Æra vulgari annimmt, welche wir oben (§. 93.) bey der Epactentafel) auf den 23ten Märzen — Uhr 18 Minuten heraus gebracht haben. Von dieſer (allenfalls mit einer ganzen Revolution vermehret) wird die Summe der drey Epacten die dem erſten und zweyten Quotienten, und dem Ueberreſt zukommen, abgezogen, ſo zeigt das Reſiduum den Tag, Stunde und Minute im Märzen, wo ſich der öſterliche mittlere Vollmond zu Rom im vorgegebenen Jahre ereignet

Beym Jahr 325 war der erſte Quotient 3, dieſer giebt

in der Epactentafel Nro. 1,	12 T.	5 St.	13 M.	21 Sec.
Der zweyte Quotient 0	—	—	—	—
Der Ueberreſt 5, Nro 3	24 T.	15 St.	12 M.	47 Sec.
thut zuſammen . .	36 T.	20 St.	26 M.	8 Sec.
eine Revolution abgezogen	29 T.	12 St.	44 M.	3 Sec.
Verbleiben . . .	7 T.	7 St.	42 M.	5 Sec.
Dieſe von der Epoche abgezogen nämlich von . .	23 T.	— St.	18 M.	— Sec
Vollmond im März den	15 um	16 U.	35 M.	55 Sec.

Weil er aber vor dem Aquinoctio fällt, ſo iſt er nicht öſterlich; man muß demnach eine Revolution dazu thun, und den Märzen mit 31 Tagen abziehen, ſo kömmt heraus der 14te April 5 Uhr 19 Minuten 58 Secunden Nachmittag zur Zeit des öſterlichen mittlern Vollmonds im Jahr 325

Beym Jahr 387 war der erſte Quotient 3, dieſer giebt

in der Epactentafel Nro. 1,	12 T.	5 St.	13 M.	21 Sec.
Der zweyte Quot. 2 giebt Nro. 2	9 T.	—	52 M.	56 Sec.
Der Ueberreſt 1 Nro. 3;	10 T.	15 St.	11 M.	22 Sec.
Zuſammen . . .	31 T.	21 St.	17 M.	39 Sec.
Hiervon abgezogen eine ganze Revolution mit .	29 T.	12 St.	44 M.	3 Sec.
Verbleiben	2 T.	8 St.	33 M.	36 Sec.
Dieſe abgezogen von der Epoche nämlich von . .	22 T.	— St.	18 M.	—
Vollmond im Märzen den	20 um	15 U.	44 M.	24 Sec.

Dieß trift auf 13 Minuten nahe mit obiger Berechnung (§. 75.) zuſammen. Der Unterſchied liegt in den Epacten, weil unſere letztere Epacten-Tafel viel genauer und zuverläßiger berechnet iſt, als die erſtere; (§. 44.) wo die Secunden nicht in Betrachtung genommen worden ſind.

Oſtern wurde demnach in dieſem Jahr irrig den 25ten April in menſe Impurorum celebriret, wie wir ſchon hieroben (§. 75.) geſehen haben.

§. 100.

Will man beſtändig das 64ſte Jahr vor der gemeinen Zeitrechnung für das 0 Jahr unſrer Kalender-Epoche annehmen; ſo gilt es gleichviel, und die Regel bleibt durchaus einerley.

Zum Exempel ſey das laufende Jahr
1769
64

128) 1833 } 14 Erſter Quotient
128

553
512

33) 41 } 1 zweyter Quotient
33

Ueberreſt 8 ein Schaltj. im 2. größ. Zirkel
darunter ſind 2 Schaltjahre

10
7 weg 3 rückwärts
Erſter Quotient zweymal 28
davon abgezogen 5

23
Zweyter Quotient . . 1

21 davon weg 24
Verbleiben 3 vorwärts

0

Alſo iſt der Sonntagsbuchſtab A

Der Ueberreſt 8 iſt dem obigen (§. 94.) gleich, folglich zeigt er auch in der Aequinoctial-Tafel den nämlichen Tag des Aequinoctii.

Der erſte Quotient 14 giebt in der Epacten-Tafel Nro. 1 . . .	27 T.	11 St.	38 M.	16 Sec
Der zweyte Quot. 1 Nro. 2,	4 T.	12 St.	26 M.	28 Sec.
Der Ueberreſt 8 Nro. 3,	28 T.	0 —	2 M.	50 Sec.
Zuſammen	60 T.	— St.	7 M.	34 Sec.
zwey Revolutionen abgezogen	59 T.	1 St.	28 M.	6 Sec.
Verbleiben	— T.	22 St.	39 M.	28 Sec.
dieſe abgezogen von der Epoche Ao. 64 vor der Æra vulgari.	23 T.	— St.	18 M.	— Sec.
Vollmond im Märzen den wie hieroben (§. 94.).	22 um	1 U.	38 M.	32 Sec.

§. 101.

Noch beſſer würde man fahren, wenn man eine Anzahl combinirter Zirkel die ſich mit 7 dividiren läßt, zum Exempel 14, oder 1792 Jahre, vor dem Jahr 1600 vorausgehen ließe. Denn da würde man auf das Jahr 192 vor der Æræ vulgari kommen, welches eben ſowohl ein Schaltjahr iſt, und nach dem Schalttage den nämlichen Sonntagsbuchſtaben A hat, wie das Jahr 1600. Man dörfte demnach zum gegebenen Jahre nur 192 hinzuthun, und alsdann durchgehends nach der Regel (§. 87.) verfahren, ohne an dem doppelten Quotienten etwas zu ändern.

Die Zeit des Märzen-Vollmonds zu finden, thut man eine Epacte von 14 combinirten Zirkeln (anſtatt der 13 oben §. 93) zu 29 Tagen 3 Stunden 9 Minuten, welches die Epoche Ao. 1600 war (§. 43.). Auf ſolche Weiſe bekömmt man

die

Zeit des mittlern März-Vollmonds im Jahr der neuen Epoche nämlich Ao. 192 vor der gemeinen Zeitrechnung auf den 27 März um 2 Uhr 3 Minuten 13 Sec.

§. 102.

Man begreift leicht, daß man ſolchergeſtalt die Sonntagsbuchſtaben für die Jahre der Epochen aus einem jeden Jahre worinnen man ſich befindet, beſtimmen könne. Ich ſehe zum Exempel in dem 1769ſten Kalender, den ich vor mit habe, daß ſich dieſes Jahr mit einem Sonntage endiget, und daß alſo das folgende 1770te Jahr mit einem Montage anfängt; folglich kann daſſelbe keinen andern Sonntagsbuchſtaben als G haben.

Nun thut man zu 1770 die Zahl 192, und verfährt durchgehends wie oben (§. 87.) wo ſich dann zeiget, daß in dieſer Zeit der Sonntagsbuchſtab um 6 vor ſich gegangen iſt. Da er nun Ao. 1770 G iſt; ſo muß er nothwendig Ao. 192 vor der Æra vulgari A geweſen ſeyn; denn von A auf G gezählet ſind 6 Buchſtaben.

Nach dem Gregorianiſchen Styl iſt es eben ſo. Man nimmt das geringere von dem vorgegebenen Jahr für die Epoche an, und zieht ſo oft 400 ab, als ſichs thun läßt, und verfährt weiter wie oben (§. 68.); ſo zeigt die zuletzt verbleibende Zahl, um wieviel der Sonntagsbuchſtab in der Zwiſchen-Zeit rückwärts gegangen iſt. Zum Exempel; man wollte aus dem bekannten Sonntagsbuchſtaben von Ao. 1770 den fürs Jahr 1600 wiſſen; ſo zieht man von 1770 das

Jahr 1600 ab; verbleiben 170 Jahre; hierzu den 4ten Theil davon mit 42 Jahren, thut 212, hiervon abgezogen die erſte Ziffer vom Reſt, nämlich 1. Verbleiben 211. Dieſe mit 7 dividiret, bleibt im Reſt, 1 folglich iſt der Sonntagsbuchſtab von 1600 bis 1770 um 1 zurückgegangen. Da er nun Ao. 1770 G iſt, ſo muß er nothwendig Ao. 1600 A geweſen ſeyn.

§. 103.

Was den Julianiſchen Kalender anbelangt; ſo muß man aus dem gegebenen Jahr den Sonntagsbuchſtaben für das 0 Jahr der Æræ vulgaris zu beſtimmen ſuchen. Wir haben im nächſtvorhergehenden §. aus dem Jahr 1770 den Gregorianiſchen-Sonntagsbuchſtaben A für das Jahr 1600 nach dem Schalttage herausgebracht. Dieß war eben ſo, wie im Julianiſchen Kalender ein Schaltjahr. Weil nun Gregorius XIII Ao. 1582 aus dem Kalender 10 Tage ausgemärzet hatte, ſo differirten beyde Kalender Ao. 1600 noch um 10 Tage; (das iſt 1 Woche 3 Tage) folglich konnte der Sonntagsbuchſtab im Julianiſchen Kalender nach dem Schalttage kein anderer als E ſeyn. Nun ſind von dem 0 Jahr bis auf 1600 eben ſoviel Jahre verfloſſen. Hiervon 1400 abgezogen (§. 69.) Verbleiben 200. Dieß Jahr hatte alſo den nämlichen Buchſtaben E. In 200 Jahren ſind 50 Schaltjahre, thut zuſammen 250 Jahre; dieſe mit 7 dividiret verbleiben übrig 5: um ſoviel iſt der Sonntagsbuchſtab von 0 Jahr bis 200 zurückgegangen. Man zählet demnach von E 5 vorwärts; ſo kömmt man auf C. Dieß war der Sonntagsbuchſtab für das 0 Jahr der Æræ vulgaris nach dem Schalttage, im Julianiſchen Kalender.

Man darf alſo nur 1). Von einem jeden gegebenen Jahre 700 ſo oft wegziehen als ſichs thun läßt; 2) den Ueberreſt mit 4 dividiren und den Quotienten hinzuthun, und 3) die Summe mit 7 dividiren: was nach der Diviſion übrig verbleibt, zeigt um wieviel man von C zurück zählen müſſe, um den Sonntagsbuchſtaben für das gegebene Jahr zu haben.

§. 104.

Will man lieber von A anſtatt E zurückzählen; ſo iſt klar, daß man die Summa Nro. 2 um 2 vermindern müſſe; und dieß beſtättiget abermal unſre oben (§. 69.) gegebene Regel, wo wir den Unterſchied beyder Kalender im 0 Jahr aus den chronologiſchen datis des Julianiſchen Kalenders beſtimmet, hier aber nichts anders als 1) beyde Jahrsformen 2) die Känntniß des Sonntagsbuchſtaben vom Jahr 1770. Und 3) den Unterſchied der Tage in beyden Kalendern vom Jahre 1600 vorausgeſetzet haben.

Wenn ein Jahr vor der gemeinen Zeitrechnung gegeben wird; ſo zieht man daſſelbe von 700 1400 ꝛc. ab, und verfährt hernach mit dem Ueberreſt durchgehends, wie oben (§. 69.)

Man fragt z. E. was das Jahr 522 vor der gemeinen Zeitrechnung für einen Sonntagsbuchſtaben habe? (welches die Chronologi, die das Jahr vor der Æra vulgari für 1 annehmen, das 523te nennen) ſo zieht man 522 von 700 ab, da verbleiben

178 dieſe mit 4 dividiret
geben zum Quotienten 44
222
hiervon abgezogen 2
Verbleiben 220 dieſe mit 7 dividiret,
bleiben übrig 3

Alſo zählet man von A 3 rückwärts; ſo kommt man auf E. Dieß iſt der Julianiſche Sonntagsbuchſtab im Jahr 522 vor der Æra vulgari.

§. 105.

Hieraus veroffenbaret ſich Sonnenklar, wie unrecht diejenigen daran ſeyn, die da meynen, man könnte ſich nicht auf die Sonnenzirkel verlaſſen, folglich auch die Wochentage, worauf die entfernten Jahre des Julianiſchen Kalenders anfangen, nicht ſicher beſtimmen. Die Leute bedenken nicht, daß dieſe Zirkel, ihre Erfindung mag ſich herſchreiben, von welcher Zeit ſie immer wolle, allemal auf ganz gewiſſe gegenwärtige data gegründet, und eben ſo, wie wir hier gethan haben, nach der bekannten Julianiſchen Jahrsforme eingerichtet worden, folglich, ſo lang dieſe Jahrform zum Grunde genommen wird, ſowohl vor- als rückwärts ſicher einſchlagen müſſen. Ein anders wäre es, wenn mehr oder weniger Tage eingeſchaltet worden wären, als die Julianiſche Jahrsform erfordert; denn da würde nicht von dem Julianiſchen, ſondern von einem andern Kalender die Frage ſeyn. Jedoch wir werden hiervon in der Folge etwas mehrers ſagen.

§. 106.

Nun wollen wir das Jahr 44 vor der Æra vulgari nach unſerer neueſten Methode (§. 101.) berechnen.

	192	
	44	
	148	1 Erſter Quotient
128)	128	
Ueberreſt	20	ein Schaltjahr
darunter	5	Schaltjahre
	25	N.
der doppelte Erſte Quotient	2	V.
	23	N.
7 dreymal weggeworfen	21	
Verbleiben	2	N. F G.

Alſo war der Sonntagsbuchſtab in dieſem Jahr vor dem Schalttage G und nach dem Schalttage F.

Suchen wir jetzt den Tag des mittlern Vollmonds im Märzen auf.

Der erſte Quotient giebt in der

Epacten-Tafel Nro. 1,	4 T.	1 St.	44 M.	27 Sec.
der Ueberreſt 20 Nro. 3,	10 T.	22 St.	38 M.	59 Sec.
Summa .	15 T.	— St.	23 M.	26 Sec.
abgez. von der Epoche (§. 101.)	27 T.	2 St.	3 M.	13 Sec.
Vollmond im März den	12 um	1 U.	39 M.	47 Sec.
dazu den Februar. mit	29 T.			
Summa	41 T.	1 St.	39 M.	47 Sec
abgezogen eine halbe Revol. mit	14 T.	18 St.	22 M.	1 Sec.
Neumond im Februar. den	26 um	7 U.	17 M.	46 Sec.
dazu den Jan. und December des vorgehenden Jahrs mit	62 T.	—	—	—
Summa . .	88 T.	7 St.	17 M.	46 Sec.
abgezogen zwey Revolut.	59 T.	1 St.	28 M.	6 Sec.
Neumond Ao. 45 vor der Æra vulg. im December den	29 um	5 U.	49 M.	40 Sec.

Der 29ſte December hat den Buchſtaben F, und weil dieſem Jahr der Sonntagsbuchſtab A zukömmt; ſo war der 29te December, als der Tag des Neumonds, ein Freytag.

Nun iſt aus der Geſchichte bekannt, daß **Julius Cäſar** das erſte Jahr ſeiner Kalender-Verbeſſerung mit dem Tage des Neumonds angefangen hat. Dieſer konnte 3 Jahre vor- und darnach nicht auf 3 Tage nahe zum 1ten Jänner fallen, folglich mußte dieſes Jahr das 44te vor der Æra vulgari ſeyn. Da nun der Neumond auf einen Freytag fiel, ſo war dieſer der 1te Jänner im neuen Julianiſchen Kalender; folglich konnte der Sonntagsbuchſtab in dieſem Jahr nach Julianiſchem Styl im Jänner und Hornung kein anderer als C ſeyn. Man bringt aber nach der Julianiſchen Berechnung (§. 104.) den Buchſtaben B heraus; folglich konnte dieſer nur vom Märzen an das übrige Jahr hindurch gelten. Alſo war dieſes Jahr ganz unſtreitig auch im Julianiſchen Kalender ein Schaltjahr: wiewohl einige daran zweifeln, denen es ſeltſam vorkömmt, wie **Cäſar** habe das erſte Jahr ſeines Kalenders zum Schaltjahr machen, und doch dabey verordnen können, daß das vierte Jahr allemal ein Schaltjahr ſeyn ſollte. Allein man bedenkt nicht, daß **Cäſar** hier unter dem 0 Jahr das erſte ſeiner Kalender Epoche verſtanden hat.

In der That mag dieſes die Prieſter irre gemacht haben, die der Verordnung zu Folge im 4ten Jahr das erſtemal einſchalteten. Und weil ſie wahrnahmen, daß unter dem erſten Jahr, wo **Cäſar** die Einſchaltung befohlen hatte, und unter den 4ten 3 Jahre Unterſchied waren; ſo meynten ſie, aus einem groben Irrthum, es müßte immer ſo fortgehen, und ſchalteten im 7ten 10ten 13ten u. f. das iſt, in 3 Jahren jedesmal einen Tag ein. Und ſo hatten ſie bis zu Ende des 37ten Jahres wirklich 12 Tage eingeſchaltet, da es nur hätten 9 ſeyn ſollen.

Auguſtus redreſſirte die Sache, da er befahl, daß man von Ao. 38 bis 52 incl. gar nicht mehr einſchalten ſollte, um die zuviel eingeſchalteten 3 Tage wiederum hereinzubringen. Er ließ daher erſt im 53ſten Jahr, welches das 8te unſerer gemeinen Zeitrechnung iſt, das erſtemal wiederum einſchalten: und von ſolcher Zeit an iſt die Einſchaltung, nach der Jahrsforme des Julianiſchen Kalenders, ohne Unterbruch fortgegangen.

Eben dieß beweist auch wiederum ſonnenklar, daß das erſte Jahr der Julianiſchen Kalender-Verbeſſerung (das iſt das 44te Jahr vor der Æra vulgari) ein Schaltjahr geweſen ſeyn müſſe. Denn ſetzen wir, es wäre ein gemeines Jahr geweſen; ſo hätte Auguſtus, um die behörige Correction vorzunehmen, nicht im 53ten ſondern im 52ten Jahr der neuen Kalender-Epoche einſchalten müſſen. Vom erſten Jan. des erſten Jahrs bis erſten Jan. des 53ſten Jahrs, wo die neue Einſchaltung, nach einem Stillſtand von 15 Jahren, noch nicht geſchehen, waren 52 Jahre verfloſſen. Solche Zeit hindurch hätten alſo nach dem Julianiſchen Kalender-Syſtem, 13 Tage eingeſchaltet werden ſollen. Die Prieſter hatten aber nur 12 eingeſchaltet (vom erſten Jan. des 4ten Jahrs bis den erſten Jan. des 38ſten Jahrs gerechnet). Alſo mußte nothwendig vorher ſchon noch ein Tag eingeſchaltet worden ſeyn. Und das konnte wohl nicht anderſt als im erſten Jahr der Kalender-Verbeſſerung geſchehen. Wie hätten auch ſonſt vom erſten Jan. des erſten Jahrs, bis zum erſten Jan. des 54ſten Jahrs der Kalender-Verbeſſerung, wo alles wiederum in Ordnung gebracht worden, und der Sonntagsbuchſtab F war, 53 † 13, zuſammen 66 Tage, oder über die completen Wochen noch 3 Tage (von C nämlich bis F) verfließen können, wenn das erſte Jahr der Julianiſchen Kalender-Verbeſſerung kein Schaltjahr geweſen wäre?

Wollte Jemand ſagen, Cäſar hätte ſich doch wohl irren, und den Neumond im erſten Jahr auf einen Samſtag supponiren können; wofolglich der Sonntagsbuchſtab durch das ganze Jahr B geweſen wäre: ſo iſt dieſes nicht wahrſcheinlich. Soſſigenes, deſſen ſich Cäſar bediente, ſeinen neuen Kalender einzurichten, war ein allzuguter Sternkündiger, als daß er den mittlern Vollmond, (der damals, weil die Monds-Anomalie keinen ganzen Grad erreichte, vom wahren Vollmond nicht viel über eine Stunde differirte) um einen ganzen Tag hätte verfehlen ſollen.

Es iſt alſo ſo gut als mathematiſch demonſtriret, daß das erſte Jahr der Julianiſchen Kalender-Verbeſſerung wirklich und in der That, keineswegs aber in der bloßen Suppoſition, vermittelſt des Zurückzählens, ein Schaltjahr geweſen.

§. 107.

Gleichwie ſich die Sonntagsbuchſtaben für ein jedes Jahr, aus demjenigen, welches man vor ſich hat, zurück und vorwärts beſtimmen laſſen; ſo läßt ſich auch auf gleiche Weiſe das Aequinoctium und der öſterliche Vollmond für ein jedes Jahr zurück und vorwärts beſtimmen. Nur muß man die Vorſicht gebrauchen, daß man zu erſt bis auf ein Jahr, womit das o Jahr einer Epoche anfängt, zurück oder vor ſich gehe, und von dieſem aus hernach das gegebene Jahr berechne.

Zum Exempel. Man hätte Ao. 1769 obſerviret, daß das Æquinoctium auf den 20ten März um 7 Uhr 44′ 45″ gefallen wäre; man fraget nun, wann es im Jahr 1718 gefallen? So geht man zu erſt auf das Jahr 1600 zurück, welches das 0 Jahr unſers größten Zirkels geweſen, das iſt, man zieht 1600 von 1769 ab; ſo verbleiben 169. Dieſe mit 128 dividirt geben zum erſten Quotienten 1, und es verbleiben übrig 41. Dieſe weiter mit 33 dividiret, geben zum zweyten Quotienten 1, und es verbleiben übrig 8. Folglich ſind von Ao. 1600 bis 1769 verfloſſen, 1 großer Zirkel von 128 Jahren, und einer von 33 Jahren, ſammt weitern 8 Jahren. Weil nun nach Verfluß des größten Zirkels das Aequinoctium um gar nichts; nach Verfluß eines 33 jährigen um 11′ 15″, und in 8 Jahren um 1 Stunde 30 Minuten zurückgeht; ſo muß man dieſe zuſammen addiren; thut 1 Stunde 41 Minuten 15 Secunden. Dieſe addiret man weiters zu der obſervirten Zeit des Aequinoctii im Jahr 1769; ſo zeigt die Summa 9 Stunden 26 Minuten Vormittag, wo ſich das Aequinoctium den 20ten März im Jahr 1600 begeben hat.

Nun zieht man 1600 von 1718 ab; ſo verbleiben 118. Dieſe mit 128 dividiret, iſt der erſte Quotient 0. Wenn man ſie weiters mit 33 dividiret, ſo geben ſie zum zweyten Quotienten 3, und es verbleiben 19 Jahre übrig. Nach 3 größern Zirkeln geht das Aequinoctium um 33 Min. 45 Sec. (§. 87) und in 16 Jahren um 3 Stunden zurück, in 3 gemeinen Jahren aber um 17 Stunden 26 Minuten 15 Secunden vor ſich. Man zieht demnach hiervon 3 Stunden 33 Minuten 45 Secunden ab, ſo verbleiben 13 Stunden 52 Minuten 30 Secunden. Dieſe thut man zur Zeit des Aequinoctii im Jahr 1600, nämlich zu 9 Uhr 26 Minuten Vormittag; ſo kömmt man auf 11 Uhr 18 Minuten 30 Se-

30 Secunden nachmittag. Zeit des Aequinoctii im Jahr 1718 am 20ten Märzen.

Eben ſo wirft es ſich haargenau heraus, wenn man nach der ordentlichen Methode (§. 88.) verfährt. Denn der Ueberreſt 19 giebt in der Aequinoctialtafel (§. 86.) den 20ten März um 11 Uhr 52 Minuten 15 Secunden nachmittag: hievon abgezogen 11 Minuten 15 Secunden mit dem zweyten Quotienten 3 multipliciret, oder 33 Minuten 45 Secunden, verbleiben zur Zeit des Aequinoctii 11 Uhr 18 Minuten 30 Secunden. (a)

§. 108.

(a) Die Æquinoctia, welche unſere Tabelle giebt, ſind nur cykliſche und mittlere Æquinoctia in Anſehung des wahren vom Jahr 1600, welches wir zur Epoche angenommen haben. Was wir alſo oben (§. 29) geſagt haben, daß nämlich unſere Tabelle die Æquinoctia eben ſo genau anzeiget, als der aſtronomiſche Calcul, das verſteht ſich nur von den Jahren, die nicht weit von an. 1600. entfernet ſind. Bey den übrigen vor- und rückwärts differiren ſie bald mehr bald weniger; je nach Verſchiedenheit der mittlern Anomalie der Sonne, wornach ſich die Centergleichungen richten, und die von dem Sonnen-Apogeo abhängt. Dieſe Differenz hat aber nicht gar viel zu bedeuten: daher finde ich auch die Tabelle unnöthig, die ich ſchon darüber gemacht hatte. Z. Ex. im Jahr 145. vor der gemeinen Zeitrechnung, fiel das Æquinoctium, nach den Caßiniſchen Tafeln berechnet, auf den 24ten März um 6. U. 30′ 38″ Nachmittag. Und unſere Æquinoctial-Tafel weiſet es auf den 20ten März (weil unſer Kalender von dem Julianiſchen in dieſem Jahr um 4 Tage differiret) um 6 U. 37′ 15″. Der Unterſchied betragt nur 6′ 37″. Hipparch obſervirte in dieſem Jahr, welches das 602te der nabonaſſariſchen Zeitrechnung iſt, den 27ten des Monaths Mecheir, welcher mit dem 24 März julianiſchen Styls übereintrift, das Æquinoctium gerade am Mittage. Wenn

nun

§. 108.

Eine ganz gleiche Bewandniß hat es mit dem öſterlichen Vollmond. Geſetzt, man wüßte aus einer Obſervation oder ſonſt woher, daß der mittlere Vollmond im Jahr 1769 auf den 22ten März um 1 Uhr 39 Minuten Nachmittag fällt: und man wollte wiſſen, an was für einem Tage er ſich Ao. 1718 ereignet, ſo geht man wie im vorigen §. auf das Jahr 1600 zurück.

Der erſte Quotient 1 giebt in der Epacten-Tafel Nro. 1,	4 T.	1 St.	44 M.	27 Sec.
Der zweyte Quotient 1, Nro. 2,	4 T.	12 St.	26 M.	28 Sec.
und der Ueberreſt 8, Nro. 3,	28 T.	— St.	2 M.	50 Sec.
Zuſammen	36 T.	14 St.	13 M.	45 Sec.
abgezogen eine Revolution	29 T.	12 St.	44 M.	3 Sec.
	7	1	29	42
Dieſe zu der Zeit des Vollmonds im Jahr 1769 hinzugethan, näml. zu	22	1	39	—
Vollm. Ao 1600 im Märzen den	29 um	3 U.	8 M.	42 Sec.

---

nun die Obſervation vollkommen richtig geweſen wäre; ſo würden die Caßiniſchen Tafeln eben ſo fehlerhaft ſeyn, als unſere Æquinoctial-Tafel. Es mag aber wohl ſeyn, daß Hipparch in Beſtimmung der Sonnenabweichung um 6½ Minuten gefehlt hat, welches eben ſoviel Stunden in der Zeit ausmachet. Wir ſehen daher nicht, wozu die genaueſte Beſtimmung des wahren Æquinoctii dienen ſolle. Eben die Urſachen, warum man ſich mit den mittlern Vollmonden anſtatt der wahren begnüget, um eine kurze und leichte Kalenderberechnung zu haben, gilt auch bey den Æquinoctien, weil dieſe eben ſo wenig als die wahren Vollmonde auf allen Meridianen des Erdkreiſes ſich zugleich ereignen können.

Um nun den öſterlichen Vollmond fürs Jahr 1718 zu finden, verfährt man wie oben (§. 94). Der erſte Quotient iſt 0.

Der zweyte 3, giebt Nro. 2,	13 T.	13 St.	19 M.	24 Sec.
Der Ueberreſt 19 Nro. 3,	28 T.	20 St.	11 M.	39 Sec.
Zuſammen	42 T.	9 St.	31 M.	3 Sec.
abgezogen eine Revolution	29	12	44	3
	12 T.	20 St.	47 M.	— Sec.
Dieſe von der Zeit des Vollmonds Ao. 1600 abgezogen	29 T.	3 St.	8 M.	42 Sec.
Vollm. Ao. 1718 im Märzen den 16 um		6 U.	21 M.	42 Sec.
Weil aber derſelbe nicht öſterlich iſt; ſo muß man noch eine Revolution hinzuthun mit	29 T.	12 St.	44 M.	3 Sec.
thut zuſammen	45 T.	19 St.	5 M.	45 Sec.
den Märzen abgezogen mit	31 T.	—	—	—
öſterl. Vollmond im April den 14 um		19 U.	5 M.	45 Sec.

das iſt den 15ten April um 7 Uhr 5 Minuten 45 Secunden Vormittag.

Sechſter Abſchnitt.

Von einer ganz neuen nach unſerer Kalenderforme eingerichteten Periode.

§. 109.

Man weis, daß Scaliger eine große Periode erfunden hat, die nach ſeinem Namen die Julianiſche Periode genennet wird. Sie begreift 7980 Jahre, und entſteht aus der Multiplication des Sonnenzirkels zu 28, des Mondszirkels zu 19, und des Indictionzirkels zu 15 Jahren untereinander, und ſie ſollte zu einem allgemeinen Behältniß oder Receptaculo aller Epochen dienen. Wenn man weis, was ein vorgegebenes Jahr für einen Sonnen- Monds- und Indictions- Cyclum hat; ſo kann man daraus das Jahr der Julianiſchen Periode beſtimmen, welches mit dem gegebenen übereintrift. So hat man herausgebracht, daß das erſte Jahr der Æræ vulgaris, welches das 10te im Sonnenzirkel, das 2te im Mondszirkel, und das 4te im Indictionszirkel geweſen, das 4714te der Julianiſchen Periode war.

So richtig und zuverläßig nun die Sonntagsbuchſtaben, und die Jahre der Indiction, für die gegebenen Jahre der Julianiſchen Periode, ſich durch die Diviſion mit 28 und 15 beſtimmen laſſen; ſo wenig kann man die wahre Zeit des mittlern Vollmonds durch die Diviſion mit 19 finden: weil dieſer Monds-Zirkel in 312 Jahren um einen ganzen Tag fehlet.

§. 110.

Ich wage es, hier eine ganz andere Periode vorzuſchlagen, die, wie ich dafür halte, der Julianiſchen weit vorzuziehen iſt; weil ſie 1) auf weit einfachern Gründen beruht. 2) Weil die mittlern Voll- und Neumonde darinnen bis auf etliche Minuten auch für die entfernteſten Jahre beſtimmet werden können. Und 3), weil alle bisher bekannte Epochen innerhalb dieſer Periode fallen, wohingegen einige außer der Julianiſchen Periode zurück hinaus gehen. Unſere Periode geht auch viel weiter Vorwärts, als die Julianiſche, ja, wenn man will, unendlich weit.

§. 111.

Wir nehmen dazu 1) einen Zeitraum von 1000 combinirten Zirkeln zu 128000 Jahren. Wir laſſen 2) vor dem Jahr 1600 ganze 56 Zirkel vorausgehen; dieſe thun 7168 Jahre. Wenn man 1600 davon abzieht, verbleibt das Jahr 5568, welches mit dem 0 Jahre der gemeinen Zeitrechnung übereintrift; folglich iſt das erſte der gemeinen Zeitrechnung dem 5569ten unſerer Periode gleich.

§. 112.

Wenn man alſo wiſſen will, was ein jedes Jahr der gemeinen Zeitrechnung für ein Jahr unſerer Periode ſey? ſo thut man die Differenz der Jahre, (nämlich vom gegebenen und 1600) zu 56 ganzen Zirkeln, oder 7168 Jahren, wenn das gegebne Jahr nach 1600 fällt; oder man zieht die Differenz davon ab, wenn es vorhergeht. (a) Man fragt z. E. was das Jahr 1769 für ein Jahr unſerer Periode ſey? ſo thut man die Differenz 169 zu 7168. Die Summe macht 7337; das iſt das Jahr unſerer Periode, welches dem 1769ſten der Æræ vulgaris gleich iſt.

Das Jahr 522 vor der Æra vulgari differiret von 1600 um 2122 dieſe von 7168 abgezogen, verbleiben 5046, welches das mit dem 522ten Jahr vor der Æra vulgari gleiche Jahr unſerer Periode anzeigt.

(a) Es verſteht ſich von ſelbſt, daß, wenn ein Jahr vor dem 0 Jahr der Æræ vulgaris gegeben wird, man ſolches zu 1600 addiren müſſe. Jedermann ſieht hieraus, wieviel leichter es iſt, die gegebenen Jahre auf unſre Periode zu reduciren, als auf die Julianiſche, bey welcher es einen mühſamen Calcul braucht.

§. 113.

Man darf demnach nur den Unterſchied andrer Epochen von der gemeinen Zeitrechnung Chriſti, oder der Æra vulgari, dazuthun oder davon abziehen, ſo bekömmt man das Jahr einer jeden Epoche in unſrer Periode. Damit erlangen wir folgende Epochen-Tafel.

1) Das erſte Jahr der gemeinen Zeitrechnung iſt gleich dem Jahr unſerer Periode . . . 5569
   Es fängt an mit dem erſten Jan. Julianiſchen Styls, welcher dem 30 Decemb. unſers 5568ten Jahrs gleich iſt.

2) Der Conſtantinopolitaniſchen Epoche, oder der neuern Griechen von Erſchaffung der Welt . . 60
   Es fängt an den 1ten September Julianiſchen Styls, und nach dem unſrigen den 18ten July.

3) Der ältern Geſchichtſchreiber oder des Julii Africani 68

4) Der Alexandriniſchen oder des Panodori . 75
   Es fängt an den 29ten Auguſt Julianiſchen Styls, und nach dem unſrigen den 14ten July.

5) Der Julianiſchen Periode . . 856
   Es fängt an den 1ten Jänner Julianiſchen Styls, und nach dem unſrigen den 22ten November Ao. 855.

6) Des Euſebii von Erſchaffung der Welt . 1341
   Es fängt an beym Herbſt Æquinoctio.

7) Der Juden von Erſchaffung der Welt. . . 1808
   Es fängt an den 7 Octob. Julianiſchen Styls, und nach dem unſrigen den 5ten Septemb. Auf dieſen Tag fällt wirklich der Neumond. Und weil der 5te Septemb. den Buchſtaben C hat, unſer Sonntagsbuchſtab aber B iſt, ſo war dieſer Tag ein Montag oder Fer. 2.

8) Der Olympiſchen Spiele . . 4793
Es fängt an den nächſten Neumond um das Sommer Solſtitium.

9) Von Erbauung der Stadt Rom nach Varro 4816
Nach den Faſtis Capitolinis . . 4817
Es fängt an den 21ten April Julianiſchen Styls, nach dem unſrigen aber den 13ten April.

10) Des Nabonaſſars . . . 4822
Es fängt an den 26ten Febr. Julianiſchen Styls, nach dem unſrigen aber den 18ten Febr.

11) Der Julianiſchen Kalenderverbeſſerung . 5524
Es fängt an mit dem erſten Jänner Julianiſchen Styls, nach dem unſrigen aber den 29ten Decemb. 5523. Auf dieſen Tag fällt der Neumond, und er war ein Freytag.

12) Der Spaniſchen Æræ . . . 5531
Es fängt an den erſten Jänner nach Julianiſchem Styl, nach dem unſrigen aber den 29ten Decemb. 5530

13) Der Æræ Actiacæ . . . 5539
Es fängt an den 29ten Auguſt Julianiſchen Styls, nach dem unſrigen aber den 26ten Auguſt.

14) Der Æræ Diocletianæ oder Martyrum 5852
Es fängt an den 29ten Auguſt Julianiſchen Styls; und nach dem unſrigen den nämlichen Tag.

15) Der Hidſchret, (Hegira) oder der Türkiſchen Zeitrechnung 6190
Es fängt an den 16ten July Julianiſchen Styls, nach dem unſrigen aber den 18ten July.

16) Des Yetzdegerds, oder der Perſiſchen Æræ. 6200
Es fängt an den 16ten Juny Julianiſchen Styls, nach dem unſrigen aber den 19ten Juny.

Wir haben die Epochen nach dem Freyherrn von **Wolf** angeſetzet. Ein andersmal werden wir zeigen, worinnen es hier und da fehlet, und wie alle Epochen aufs rechte herzuſtellen ſeyn.

§. 114.

Wenn man wiſſen will, was das gegebene Jahr einer Epoche für ein Jahr unſrer Periode ſey; ſo zieht man vorher 1 davon ab, und addiret es hernach zu dem Jahr unſerer Periode, das der Epoche zukömmt. Man fragt z. E. was das 225te Jahr der Nabonaſſariſchen Zeitrechnung für ein Jahr in unſerer Periode ſey: ſo addiret man 224 zu 4822, thut 5046. Dieß iſt das Jahr unſerer Periode, ſo dem 225ten Nabonaſſariſchen gleich iſt.

§. 115.

In 128 Jahren unſers Kalenders werden 31 Tage eingeſchaltet (§. 81.); im Julianiſchen aber 32: folglich geht unſer Sonntagsbuchſtab nach Verfluß eines combinirten Zirkels gegen dem Julianiſchen um 1 Vorwärts. Wenn wir nun ſetzen, daß unſer Kalender von dem Julianiſchen im 0 Jahr der Periode um 46 Tage differiret habe, (a) ſo muß nothwendig folgen, daß ſie im Jahr 5888 unſerer Periode, welches das letzte im 46ſten Zirkel, und das 320ſte der gemeinen Zeitrechnung iſt, um 0 differiren müſſen. Wenn man demnach den Unterſchied der Tage unſers Kalenders, und des Julianiſchen, für ein jedes vorgegebenes Jahr der Periode wiſſen will; ſo zieht man den erſten Quotienten der Diviſion, welcher die Anzahl der, vom 0 Jahr unſerer Periode an gerechnet, verfloſſenen Zirkel andeutet, von 46 ab; alsdann zeiget der Ueberreſt die Differenz der Tage in beyden Kalendern. Iſt der erſte Quotient größer als 46: ſo zieht man dieſe davon ab.

(a) Um ſo viel mußten ſie differiren: denn vom 0 Jahr unſrer Periode bis auf das 1600te der gemeinen Zeitrechnung, ſind nach unſerm Kalenderſyſteme 56 Tage weniger eingeſchaltet worden, als nach dem Julianiſchen: folglich hätte unſer Kalender im 0 Jahr der Periode um ſo viel Tage weniger zählen müſſen, als der Julianiſche, wenn beyde im Jahr 1600. gleich geweſen wären. Da aber im Jahr

§. 116.

Es trägt ſich aber zuweilen zu, daß auch innerhalb des combinirten Zirkels beyde Kalender um einen Tag mehr oder weniger differiren, als die im vorgehenden §. 115. gefundene Differenz ausmacht.

§. 117.

Um nun die wahre Differenz auf das genaueſte zu finden; muß man auf 3. Fälle acht haben.

1. Fall.

Wenn das vorgegebene Jahr nach beyden Stylis ein Schaltjahr iſt: da bleibt die Differenz, wie ſie ſich §. 115. ergiebt.

Jahr 1600. unſer Kalender um 10 Tage mehr zählet, als der Julianiſche (§. 103.); ſo folgt nothwendig, daß er im 0 Jahr der Periode um 10 Tage weniger als 56 das iſt 46 Tage Unterſchied zählen mußte. Wenn man das Jahr Chriſti 320. nach der oben (§. 69.) gegebenen Regel berechnet; ſo findet man die julianiſchen Sonntagsbuchſtaben CB, und eben dieſe ergeben ſich auch, wenn man das 5888te Jahr unſerer Periode, welches das nämliche Jahr iſt, nach unſrer Methode berechnet.

2. Fall.

Wenn das vorgegebene Jahr entweder in einem oder andern Stylo ein Schaltjahr iſt. 1) Iſt es ein unſriges; ſo iſt die Differenz vor dem Schalttage um 1 kleiner, hernach aber gleich. 2) Iſt es ein Julianiſches Schaltjahr, ſo bleibt die Differenz vor dem Schalttag; ſie wird aber hernach um 1 kleiner.

3. Fall.

Wenn das vorgegebene Jahr nach beyden Stylis ein gemeines Jahr iſt. So ſieht man, was für ein Schaltjahr zu nächſt vorhergeht. 1) Iſt es ein unſriges; ſo bleibt die Differenz. 2) Iſt es aber ein Julianiſches; ſo wird ſie um 1 kleiner. 3) Sind beyde Schaltjahre gleich weit davon entfernet, ſo bleibt die Differenz wie ſie §. 115. gefunden worden. Dieß alles gilt vor dem Jahr 5888. Hernach aber wird die Differenz um 1 größer in den Fällen, wo ſie vorher um 1 kleiner war.

§. 118.

Wir wollen die gegebenen Regeln durch Exempel erläutern.

Vom erſten Fall.

Das Jahr 6016. iſt ſowohl im Julianiſchen Kalender ein Schaltjahr (weil es nach der Diviſion mit 4 nichts übrig läßt) als nach dem Unſrigen, (weil es das letzte Jahr des 47ten Zirkels iſt) Der erſte Quotient iſt 47. Hievon 46 abgezogen, bleibt 1. Alſo differiren beyde Kalender in dieſem Jahr um 1 Tag.

Vom zweyten Fall.

Nro. 1. Das 4822te Jahr unſerer Periode iſt nach unſerm Stylo ein Schaltjahr; denn es iſt das 20te im 3ten 33 jährigen Zirkel. Nach dem Julianiſchen Stylo aber iſt es kein Schaltjahr. Der erſte Quotient iſt 37: dieſer von 46 abgezogen verbleiben zur Differenz (§. 115.) 9. Vor dem Schalttage iſt alſo die Differenz 8, nach dem Schalttage aber 9.

Nro. 2. Das Jahr 4816. iſt im Julianiſchen Styl ein Schaltjahr, nach dem unſrigen aber ein gemeines: denn es iſt das 14te im erſten 33 jährigen Zirkel. Der erſte Quotient iſt 37; dieſen von 46 abgezogen (§. 115.) verbleiben 9. Vor dem Schalttage bleibt ſie; aber hernach iſt ſie 8.

Vom dritten Falle.

Nro. 1. Das Jahr Chriſti 1770 (oder 7338 unſerer Periode) iſt ein gemeines Jahr ſowohl nach unſerm als dem Julianiſchen Styl. Das nächſt vorhergehende 7337te Jahr war ein unſriges Schaltjahr (nämlich das 8te im 2ten 33jährigen Zirkel) Das nächſt vorhergehende 7336te julianiſche Schaltjahr hingegen iſt um 2 Jahre davon entfernet. Der erſte Quotient iſt 57; Hiervon 46 abgezogen verbleiben 11 zur Differenz der Tage, ohne etwas dazu oder davon zu thun.

Nro. 2. Das Jahr 4817 iſt ein gemeines Jahr nach beyden Stylis. Es iſt das 15te im dritten 33jährigen Zirkel. Der erſte Quotient iſt 37; dieſen von 46 abgezogen, verbleiben 9 zur Differenz der Tage in beyden Kalendern. Das nächſt vorhergehende Schaltjahr war ein Julianiſches (denn das unſrige geht 3 Jahre vorher). Die Differenz wird alſo um 1 kleiner, nämlich 8 Tage.

Nro. 3. Das Jahr 7302 unſerer Periode (oder das 1734te der gemeinen Zeitrechnung) iſt ſowohl nach unſerm als dem Julianiſchen Styl ein gemeines Jahr. Der erſte Quotient iſt 57. Hiervon 46 abgezogen, verbleiben 11 zur Differenz der Tage. Unſer nächſt vorhergehendes Schaltjahr (nämlich das 7300te unſerer Periode, oder das 1732te der gemeinen Zeitrechnung) iſt um 2 Jahre davon entfernet, eben ſo wie das Julianiſche nächſtvorhergehende. Die vermög (§. 115.) gefundene Differenz der Tage 11 gilt alſo für dieſes Jahr.

§. 119.

Vor dem Jahr 5888 unſerer Periode (oder dem 320ſten der gemeinen Zeitrechnung) addiret man die Differenz zu dem gegebenen Tage unſers Styls: nach ſelbigem Jahre aber zieht man ſie davon ab, um den nämlichen Tag im Julianiſchen Kalender zu haben. Gerade umgekehrt verfährt man, wenn der Tag im Julianiſchen Styl gegeben wird, den man auf den unſrigen reduciren will.

§. 120.

Solchergeſtalt laſſen ſich auch die Sonntagsbuchſtaben des Julianiſchen Kalender aus den unſrigen finden: wenn man vor dem Jahr 5888 unſerer Periode von unſerm Buchſtaben ſoviel vorwärts, und nach demſelben ſoviel rückwärts zählet, als die gefundene Differenz der Tage (7 ſo oft davon weggeworfen, als ſichs thun läßt) ausmachet.

§. 121.

Wollte man lieber unabhängig von dieſen Regeln den Sonntagsbuchſtaben für den Julianiſchen Kalender finden, ſo verfährt man wie oben (§. 69.). Das iſt man zieht vom gegebenen Jahre ſo oft 700 ab, als ſichs thun läßt. Den Ueberreſt dividiret man mit 4, und thut den Quotienten hinzu. Von dieſer Summa zieht man 4 ab, (a) anſtatt der 2, die man nach beſagter Regel (§. 69.) abziehen ſollte. Die verbleibende Zahl dividiret man mit 7, ſo zeigt der Ueberreſt nach der Diviſion um wieviel man von A zurückzählen müſſe, um den Julianiſchen Sonntagsbuchſtaben zu haben, der für das gegebene Jahr gilt.

Man fragt z. E. was das Jahr 5046 unſerer Periode für einen Sonntagsbuchſtaben im Julianiſchen Kalender habe? ſo zieht man 700 ſiebenmal, das iſt 4900 davon ab verbleiben . . . . . 146; dieſe mit 4 dividiret
iſt der Quotient . . . 36
Zuſammen 182
davon abgezogen. 4
Verbleiben 178 Dieſe mit 7 dividiret
bleiben übrig 3 Rückwärts E.

Folglich iſt der Julianiſche Sonntagsbuchſtab in dieſem Jahr E,

§. 122.

Wenn man den Sonntagsbuchſtaben im Gregorianiſchen Kalender-Syſtem für ein gegebenes Jahr unſerer Periode finden will; ſo muß man Acht haben, ob es vor oder nach dem Jahr 5568

(a) Denn der Julianiſche Sonntagsbuchſtab im 0 Jahr unſerer Periode war E: weil unſer Kalender A hatte, und 46 Tage, oder 6 Wochen 4 Tage weniger zählte als der Julianiſche (§. 115). Man muß alſo von E zurückzählen. Wenn man nicht von E, ſondern von A zurückzählen will; ſo muß man vorher von der Summa 4 abziehen.

(welches mit dem 0 Jahr der Æ. v. übereintrift,) fällt. Geht es vorher, ſo zieht man es 1) von 5568 ab: 2) den Ueberreſt dividiret man mit 400: und was 3) nach der Diviſion übrig verbleibt, das zieht man von 400 ab: mit dieſem neuen Ueberreſt verfährt man durchgehends wie oben (§. 68).

Man wollte z. E. wiſſen, was das Jahr 5046 unſerer Periode für einen Sonntagsbuchſtaben im Gregorianiſchen Kalender habe: ſo zieht man es von 5568 ab: verbleiben 522. Dieſe mit 400 dividiret bleiben übrig 122. Und dieſe weiters von 400 abgezogen
geben zum Ueberreſt 278 Dieſe mit 4 dividiret
geben zum Quotienten 69
Zuſammen 347 Hiervon abgezogen die
erſte Ziffer des Reſts . . 2
Verbleiben 345 Dieſe mit 7 dividiret
bleiben übrig . . 2 rückw. Alſo iſt der Gregorianiſche Sonntagsbuchſtab in dieſem Jahr F. Wenn aber das gegebene Jahr größer iſt als 5568; ſo zieht man dieſe davon ab, und verfährt mit dem Ueberreſt durchgehends wie oben (§. 68.)
Es ſey z. E. das Jahr unſerer Periode 8192 Hiervon
abgezogen . . 5568
Verbleiben 2624 Davon weggeworfen
6mal 400 oder . . 2400
Ueberreſt 224 Dieſe mit 4 dividiret
geben zum Quotienten . 56
Zuſammen 280 Hiervon die erſte Ziffer des Ueberreſts abgezogen mit 2
Verbleiben 278 dieſe mit 7 dividiret bleiben übrig . . . 5 rückw. Alſo iſt der Gregorianiſche Sonntagsbuchſtab in dieſem Jahr C.

§. 123.

§. 123.

Nehmen wir das 225te Jahr der Nabonaſſariſchen Zeitrechnung. Dieſes iſt das 5046ſte Jahr unſerer Periode. Nun verfährt man durchaus wie §. 87.

```
              5 0 4 6 ⎤ 3 9  Erſter Quotient
        128)  3 8 4   ⎦
              1 2 0 6
              1 1 5 2
      3 3)        5 4 ⎤ 1  Zweyter Quotient
                  3 3 ⎦
Ueberreſt         2 1
darunter Schaltjahr 5
                  2 6  R.
der Erſte Quotient doppelt   7 8
der zweyte Quotient            1
                             7 9  V.
                             2 6  R.
                             5 3
7 ſiebenmal weggeworfen oder 4 9
      Verbleiben               4  Vorwärts E.
```

Alſo iſt unſer Sonntagsbuchſtab E. Der erſte Quotient 39 von 46 abgezogen giebt 7 Tage Unterſchied.

§. 124.

Das vorgegebene Jahr iſt ein gemeines Jahr, ſowohl nach dem unſrigen Stylo als nach dem Julianiſchen. Das unſerige Schaltjahr 20 im 2ten 33jährigen Zirkel geht unmittelbar, das Julianiſche 5044te aber 2 Jahre vorher. Alſo ſind wir im 3ten Fall Nro. 1 (§. 117.): folglich bleibt die Differenz 7. Der Tag demnach, der in unſerm Kalender der 9te July heißt, iſt im Julianiſchen der 16te July Unſer Kalender hat den Sonntagsbuchſtaben wie der Julianiſche E. (§. 121.).

§. 125.

Dieſes Jahr iſt merkwürdig, weil ſich darinnen, wie **Ptolomäus** im 5ten Buch ſeines Almageſts im 14 Cap. erzählet, den 17ten des Monats **Phamenoth** eine Mondsfinſterniß zu Babylon ereignet hat. Alſo fiel der Vollmond auf dieſen Tag.

Jetzt wollen wir ſehen, was für ein Tag des Julianiſchen Kalenders mit dem 17ten des Monats **Phamenoth** in dieſem Jahr übereintrift.

Man weis, daß der Anfang des 1ten Nabonaſſariſchen Jahrs auf den 26ten Febr. im Jahr 746 vor der Æra vulgari (wenn man das Erſte dieſer letztern 0 ſeyn läßt, wie wir beſtändig thun) gefallen iſt. Zwiſchen dem 26ten Febr. und 1ten Jänner ſind 56 Tage Unterſchied. Man weis ferner, daß ein Nabonaſſariſches Jahr, wie das andere, aus 12 Monaten, jeden zu 30 Tagen gerechnet, und 5 zugeworfenen Tagen (ἡμέραις ἐπαγομέναις) das iſt, aus 365 Tagen beſteht: folglich geht der Anfang deſſelben in 4 Jahren um einen Tag im Julianiſchen Kalender zurück; dieß thut in 225 Jahren 56 Tage. Da nun ebengeſagtermaßen zwiſchen dem 26ten Febr. und 1ten Jänner juſt 56 Tage verfließen; ſo fällt der Anfang des 225ten Nabonaſſariſchen Jahrs auf den 1ten Jänner des 522ſten Jahrs vor der Æ. vulgari. Der Monat **Phamenoth** iſt der 7te im Nabonaſſariſchen Jahr; folglich ſind vom Anfange des Jahrs bis dahin 180 Tage verfloſſen. Thun wir noch 16 Tage dazu, bis auf den 17ten **Pha-**

menoth; ſo macht die Summa 196 Tage, welche vom 1ten Jänner bis auf den 17ten dieß Monats verfloſſen. Nun haben

der Jänner, Febr. und März	90	Tage.
April, May, Juny	91	—
der July . .	31	
Zuſammen	212	Tage.
Davon abgezogen . .	196	
Verbleibt der	16te	July.

Dieſer war, wie wir oben bewieſen haben, der 9te July unſers Kalenders. Nun wollen wir ſehen, ob unſre Berechnung auch den Vollmond auf dieſen Tag herauswirft. Vor allem aber müſſen wir die Epoche des öſterlichen mittlern Vollmonds für das 0 Jahr unſerer Periode beſtimmen.

Ao. 1600 fiel derſelbe auf den 29ten Märzen um 3 Uhr 9 M. (§. 43.) Von dieſem Jahr bis auf das 0 Jahr unſerer Periode ſind 56 ganze Zirkel verfloſſen;

50 Zirkel geben in der Epacten Tafel Nro. 1, . .	26 T.	10 St.	38 M.	17 Sec.
und 6 Zirkel . .	24 T.	10 St.	27 M.	43 Sec.
Zuſammen	50 T.	21 St.	6 M.	— Sec.

um ſoviel iſt der öſterliche mittlere Vollmond in 56 combinirten Zirkeln (rückwärts gezählet) vor ſich gegangen. Thun wir alſo

dazu obige . . .	29 T.	3 St.	9 M.	
ſo haben wir . .	80 T.	—	15 M.	
2 Revol. davon abgezogen mit	59 T.	1 St.	28 M.	(§. 44.)
Verbleiben	20 T.	22 St.	47 M.	

Demnach begiebt ſich der mittlere öſterliche Vollmond im 0 Jahr unſerer Periode den 20ten März, um 22 Uhr 47 Minuten. Dieß iſt alſo wiederum eine neue Epoche.

Nun iſt unſer obiger erſter Quotient (§. 123.) 39. Dieſer giebt in der Epacten-Tafel Nro. 1, (30 + 9)

	11 T.	4 St.	13 M.	22 Sec.
Der zweyte Quotient 1, Nro. 2,	4 T.	12 St.	26 M.	28 Sec.
der Ueberreſt 21, Nro. 3,	21 T.	13 St.	50 M.	20 Sec.
Zuſammen	37 T.	6 St.	30 M.	10 Sec.
abgezogen eine Revolution	29 T.	12 St.	44 M.	3 Sec.
Verbleiben	7 T.	17 St.	46 M.	7 Sec.
Dieſe abgezogen von der Epoche nämlich von . .	20	22	47	—
Vollmond im März den	13 um	5 U.	8 M.	53 Sec.
dazu 4 Revolutionen mit	118 T.	2 St.	56 M.	— Sec.
thut	131 T.	7 St.	55 M.	53 Sec.
Den März, April, May und Juny abgezogen mit	122 T.	— St.	— M.	—
Verbleiben . . .	9 T.	7 St.	55 M.	53 Sec.

Alſo fällt der Vollmond dieſes Jahr den 9ten July um 7 Uhr 55 Minuten 53 Secunden. Und im Julianiſchen Kalender den 16ten July um 7 Uhr 55 Minuten 53 Secunden. Dieß iſt eine neue Probe von der Richtigkeit unſers Syſtems.

§. 126.

Daß ſelbiges allenthalben einſchlage, auch nach den Jahren der gemeinen Zeitrechnung, werden folgende Exempel zeigen.

Nehmen wir zuerſt das Jahr 1769 ſo haben wir folgenden Calcul.
Das Jahr unſerer Periode nämlich das 0 Jahr vor der Æra
vulgari 5568
Das gegebene Jahr 1769

128) 7337 } 57 Erſter Quotient
640

937
896

33) 41 } 1 zweyter Quotient
33

Ueberreſt 8 ein Schaltjahr
darunter ſind 2 Schaltjahre

10 R.

der erſte Quotient zweymal 114
dazu den zweyter Quotienten 1

115 V.
10 R.

105 V.
7 fünfzehenmal weggeworfen 105

Verbleibt 0 A.

Alſo ſind die Sonntagsbuchſtaben in dieſem Jahr nach unſerm Kalender B A, und im Julianiſchen D. (§. 117.)

Der erſte Quotient iſt 57. Davon abgezogen 46 verbleiben 11 Tage zur Differenz der Tage. Wir ſind im 2ten

Fall Nro. 1 (S. 117.) folglich differiren beyde Kalender vor dem Schalttage um 12, und hernach um 11 Tage.

§. 127.

Der erſte Quotient iſt 57, dieſer giebt in der Epactentafel

Nro. 1, nämlich 50	26 T. 10 St. 38 M. 17 Sec.
7	28 T. 12 St. 12 M. 10 Sec.
Der zweyte Quot. 1 Nro. 2	4 T. 12 St. 26 M. 28 Sec.
Der Ueberreſt 8 Nro. 3;	28 T. — St. 2 M. 50 Sec.
abgezogen von der Epoche mit	87 T. 11 St. 19 M. 45 Sec.
3 Revolut. vermehret, das iſt, von	109 T. 12 St 59 M. 9 Sec.
Verbleiben	22 T. 1 St. 39 M. 24 Sec.

Dieß iſt der Tag im Märzen, wo ſich der mittlere Vollmond Ao. 1769 ereignet, genau wie hieroben (§. 94.).

§. 128.

Verſuchen wir es auch mit den Jahren 325 und 387 der gemeinen Zeitrechnung

5 5 6 8
3 2 5
5 8 9 3] 46 Erſter Quotient
128) 5 1 2]
7 7 3
7 6 8
5
darunter iſt 1 Schaltjahr
6 R.
Der erſte Quotient doppelt 92
der zweyte Quotient 0
9 2 V.
6 R.
8 6
mit 7 dividiret verbleiben 2 V. C, eben ſo wie im Julianiſchen.

Weil der erſte Quotient 46 iſt; ſo iſt die Differenz der Tage 0. Wir ſind im 3ten Fall Nro. 3 (§. 117.) weil beyde nächſtvorhergehende Schaltjahre gleich weit entfernet ſind. Alſo bleibt die Differenz 0.

§. 129.

Der erſte Quotient 46 giebt in der Epacten-Tafel

Nro. 1, nämlich 40	15 T.	5 St.	57 M.	49 Sec.
und 6, ...	24 St	10 M.	27 M.	43 Sec.
Der zweyte Quotient 0,	0	0	0	0
Der Ueberreſt 5 Nro. 3,	24 T.	15 St.	12 M.	47 Sec.
Zuſammen	64 T.	7 St.	38 M.	19 Sec.
abgezogen 2 Revolutionen mit	59 T.	1 St.	28 M.	6 Sec.
Verbleiben	5 T.	6 St.	10 M.	13 Sec.
Dieſe abgezogen von der Epoche nämlich von . .	20 T.	22 St.	47 M.	— Sec.
Verbleibt der Tag des Vollm. im Märzen den	15 um	16 U.	36 M.	47 Sec.
Dieſer war aber nicht öſterlich; folglich muß man noch eine Revolution hinzuthun mit	29 T.	12 St.	44 M.	3 Sec.
thut zuſammen	45 T.	5 St.	20 M.	50 Sec.
den Märzen abgezogen mit	31 T.	—	—	—
Verbleiben	14 T.	5 St.	20 M.	50 Sec.
Alſo ereignete ſich Ao. 325 der öſterl. Vollmond im April den	14 um	5 U.	20 M.	50 Sec.

wie hieroben (§. 99.).

§. 130.

Nun folgt auch der Calcul für das Jahr

387
5568

128) 5955 } 46 Erſter Quotient
512

835
768

33) 67 } 2 Zweyter Quotient.
66

Ueberreſt 1 R.
Der doppelte erſte Quotient iſt 92
der zweyte Quotient 2

94 W.
Der Ueberreſt 1 R.

93 W. dieſe mit 7 dividiret
bleiben übrig . . . . 2 W. C eben ſo, wie im Julianiſchen.

Weil der erſte Quotient 46 iſt; ſo iſt die Differenz der Tage 0. Wir ſind im 3ten Fall Nro. 1 (§. 117.) weil ein unſeriges Schaltjahr unmittelbar, das Julianiſche aber 3 Jahre vorhergeht: folglich bleibt die Differenz der Tage 0. Beyde Kalender haben demnach den nämlichen Sonntagsbuchſtaben C.

Der erſte Quotient 46 giebt in der Epactentafel Nro. 1
nämlich 40 . . . 15 T. 5 St. 57 M. 49 Sec.
Und 6, . 24 T. 10 St. 27 M. 43 Sec.
Der zweyte Quot. 2, giebt Nro. 2, 9 T. — St. 52 M. 56 Sec.
Und der Ueberreſt 1 R. 3, 10 T. 15 St. 11 M. 22 Sec.

Summa 59 T. 8 St 29 M. 50 Sec.
Hiervon abgez. 2 Revolut. mit 59 T. 1 St. 28 M. 6 Sec.
Verbleiben 0 T. 7 St. 1 M. 44 Sec.
Dieſe von der Epoche abgezogen nämlich von . . . 20 T. 22 St. 47 M. — Sec.
Verbleibt der Tag des Vollmonds im Märzen den . . 20ten um 15 U. 45 M. 16. Sec.
Wie hieroben (§. 99.).

§. 131.

Damit man auch die übrigen Lunationen durch alle Monate für ein jedes Jahr unſerer Periode geſchwind finden möge: ſo fügen wir hier eine Epochentafel für das 0 Jahr unſerer Periode bey.

Neu- und Vollmond Epochen-Tafel für das 5568te Jahr vor der gemeinen Zeitrechnung.

Monat	Neumond			mit einer Revolution vermehrt			Vollmond			mit einer Revolution vermehrt		
	T.	St	M	T.	St	M	T.	St	M	T.	St	M
Januar.	7	2	57	36	15	41	21	21	19	51	10	3
Februar,	5	15	41	35	4	25	20	10	3	49	22	47
Mart,	6	4	25	35	17	9	20	22	47	50	11	31
April	4	17	9	34	5	53	19	11	31	49	—	15
May	4	5	53	33	18	37	19	—	15	48	12	59
Iunii	2	18	37	32	7	21	17	12	59	47	1	43
Iulii	2	7	21	31	19	45	17	1	43	46	14	27
Item	31	20	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Auguſt	30	8	49	—	—	—	15	14	27	45	3	11
Septemb.	28	21	33	58	10	17	14	3	11	43	15	55
Octob.	28	10	17	57	23	1	13	15	55	43	4	39
Novemb.	26	23	1	56	11	45	12	4	39	41	17	23
Decemb.	26	11	45	56	—	29	11	17	23	41	6	7

Man fraget z. E. an welchem Tage, Stunde ꝛc. der Neumond im Märzen Anno 387, welches wir im vorhergehenden 130 §. berechnet haben, gefallen iſt?

Die Summa der Epacten, nachdem man 2 Revolutionen abgezogen, thut 0 Tag, 7 Stunden, 1 Minuten, 44 Sec. Nun ſuchet man in der Epochentafel den Neumond im Märzen; da findet man den 6ten 4 Stund. 25 Minuten: hiervon 7 St. 1 Minuten 44 Secunden abgezogen, verbleibt der geſuchte Neumond im Märzen Anno 387 den 5ten, 21 Stunden, 23 Minuten 16 Secunden.

§. 132.

Dieſe letzte Art, alle gegebene Jahre einer jeden Æræ (auch der gemeinen Zeitrechnung) auf unſere Periode zu reduciren, und hiernach die Berechnung anzuſtellen, wollte ich allen obigen vorziehen. Man operiret immer auf eine gleichförmige Art. Sie hat auch noch den Vortheil, daß ſie durch die bloße Diviſion mit 15, ohne etwas hinzu = oder davon zuthun, die Jahre der Indiction zeiget, eben ſo, wie die Julianiſche. (a). Ich werde in

---

(a) Die Diviſion mit 19 zeiget auch im Ueberreſt die goldene Zahl, oder das laufende Jahr im Julianiſchen Mondszirkel, eben, ſo wie in der Julianiſchen Periode. Wenn aber die Diviſion mit 28 im Ueberreſt den Julianiſchen Sonnenzirkel weiſen ſoll; ſo muß man von dem vorgegebenen Jahr unſerer Periode vorher 15 abziehen: denn das Jahr 5568 oder das 0 Jahr der Æræ vulgaris mit 28 dividiret, bleiben übrig 24, dieß Jahr war aber das 9te im Sonnenzirkel. Hingegen zeiget die Diviſion mit 4 die Julianiſchen Schaltjahre, welches in der Julianiſchen Periode nicht angeht. Und noch einen weit größern Vortheil hat unſre Periode vor der Julianiſchen, weil man für ein jedes gegebenes Jahr das in einer eigenen Abhandlung die Verknüpfung unſerer Periode mit andern Epochen ausführlicher zeigen, womit (geliebts GOtt) die Zeitrechnung eine ganz andere genauere und zuverläßigere Beſtimmung erhalten wird, als ſie bisher gehabt hat.

§. 133.

---

das Frühlings Æquinoctium aus der Aequinoctial-Tafel ganz geſchwind beſtimmet, welches in der Julianiſchen Periode ohne aſtronomiſchen Calcul nicht geſchehen kann: folglich thut unſere Periode in der Kirchen- und Profan-Hiſtorie weit beſſere Dienſte als die Julianiſche.

Und was nutzet die Diviſion mit 19 und 28? Denn dieſe geſchieht nur darum, daß die Sonntagsbuchſtaben und die Neu- oder Vollmonde dadurch gefunden werden. Unſere Methode zeiget die Sonntagsbuchſtaben eben ſo richtig und zuverläßig an, und zwar ohne eine Sonnenzirkel-Tabelle dazu nöthig zu haben, die man bey der Julianiſchen Methode nicht entbehren kann. Und was die mittlern Neu- und Vollmonde anbelanget; ſo zeiget unſere Epacten-Tafel dieſelben ganz genau bis auf Stunden und Minuten auch für die entfernteſten Zeiten an. Die goldene Zahl aber verfehlet ſie deſto mehr, je weiter die Jahre von Ao. 532 der Æræ vulgaris vor und rückwärts entfernet ſind.

Nehmen wir zum Exempel das 3168ſte Jahr vor der gemeinen Zeitrechnung, welches das 2400te unſerer Periode iſt. In dieſem Jahr haben wir den Sonntagsbuchſtaben B, und im Julianiſchen Kalender B A. Unſere Epacten-Berechnung bringt den Vollmond auf den 26ten März um 1 Uhr 9 Minuten. Und weil unſer Kalender von dem Julianiſchen in dieſem Jahr nach dem Schalttage um 27 Tage differiret, um welche der Julianiſche mehr zählet als der unſrige; ſo fällt eben dieſer Vollmond im Julianiſchen Kalender auf den 22ten April, um 1 Uhr 9 Minuten. Nimmt man nun die goldene Zahl 6, die dieſem Jahr zukömmt, und geht damit in die Mondszirkel-Tabelle; ſo zeigt ſie den Vollmond auf den 10ten April, folglich um 12 Tage früher an, als e ſich wirklich ereignete.

§. 133.

Ich habe mich in meinem Vortrage der äußerſten Deutlichkeit befliſſen, und meine Sätze mit ſo vielen Exempeln (vielleicht bis zum Eckel) erläutert, daß mich ein Jeder, der weder von der Aſtronomie noch Chronologie die geringſte Känntniß beſitzet, ſondern nur die 5 Species der gemeinen Rechnungskunſt inne hat, leicht verſtehen kann. Hätte ich blos für Gelehrte ſchreiben wollen, ſo würde ich viel weniger Worte gebraucht haben, um mich verſtändlich auszudrücken. Da ich aber um nichts mehr beeyfert bin, als die Wiſſenſchaften ſoviel möglich allgemein zu machen, und nicht Gelehrten allein, ſondern auch dem gemeinen Mann zu dienen; ſo habe ich mich auch nach eines jeden Begriffe richten müſſen. Ich widerhole noch einmal, was ich im Eingange geſaget habe; daß ich nämlich keine neue Wahrheiten entdecket, ſondern nur bekannte und zwar ſehr gemeine Wahrheiten auf eine neue Art angewendet habe.

Nachſchrift.

Wir haben oben in der Note (a) zum 107ten §. geſaget, daß unſre mittlern Æquinoctia von den wahren um gar wenig differiren, in den Jahren, die nicht weit von Anno 1600. entfernet ſind. Das iſt auch wahr. Wenn ſie aber ſehr weit, zum Exempel 7000 Jahre vor und rückwärts davon abſtehen; ſo lauft die Differenz bis auf 2 Tage hinaus. Wir werden daher demnächſtens eine ſehr einfache Tabelle mittheilen, welche dieſe Differenz für alle Zirkel von 0. bis 112. enthält; vermöge deren man mit Beybehaltung unſrer Aequinoctial=Tafel, die wahren Frühlings=Aequinoctia für ein jedes Jahr unſrer Periode bis auf etliche Minuten nahe, ohne aſtronomiſchen Calcul, beſtimmen kann.

Beſchreibung
der
von Herrn
Georg Friedrich Brander
Mitgliede der churbaieriſchen Akademie der Wiſſenſchaften, und berühmten Mechanico in Augſpurg
neuerfundenen
Glasmicrometer.

Von
Herrn Profeſſor Lambert
zu Berlin.

§. 1.

Die Micrometer haben ſeit ihrer erſten Erfindung nicht nur alle Aufmerkſamkeit verdienet, ſondern auch nach und nach mehrere Verbeſſerungen und Abänderungen erhalten. Ich werde mich mit der Erzählung derſelben nicht aufhalten, ſondern ſogleich auf diejenige kommen, von welchen hier eigentlich die Rede ſeyn wird. Hr. Mayr, der ſich durch mehrere ſinnreiche Erfindungen, und beſonders durch ſeine Mondstafeln einen bleibenden Ruhm erworben, und dem bey längern Lebensjahren die Sternkunde und die Naturlehre noch manche Bereicherung würde zu verdanken gehabt haben, iſt, ſo viel mir bekannt, der erſte, der auf den Einfall kam, ein Micrometer in Form einer Meßleiter auf Glaſe zu zeichnen, und daſſelbe in den Brennpunkt der Fernröhre zu ſetzen. Er beſchrieb das ganze Verfahren in den Nachrichten und Sammlungen der cosmographiſchen Geſellſchaft auf das Jahr 1748, und zeigte die beträchtlichen Vorzüge ſolcher Micrometer bey aſtronomiſchen Beobachtungen. Es wird den letztern nicht unangenehm ſeyn, die mayerſche Abhandhandlung an ihrem beſondern Ort zu leſen. Sie werden auf dieſe Art die Geſchichte der Erfindung beyſammen haben und mir fällt die Mühe weg, ſie hier im Auszuge vorzuſtellen, wiewohl das, was Mayer von ſeinem Micrometer rühmt, allemal verdient, nochmals gerühmt zu werden. Er hatte ſich deſſelben bedient, die Lage jeder einzelnen Sterne, der Plejaden, verſchiedene Bedeckungen derſelben und anderer Sterne von dem Monde zu beobachten; beſonders aber fand er ſich dadurch in Stand geſetzt, die Lage jeder Mondsflecken, die von Hevel und Riccioli ſehr unzuverläßig beſtimmt worden, nach ihrer geographiſchen, oder ſelenographiſchen Länge und Breite genau zu beſtimmen, und eine Charte vom Monde zu entwerfen, die durchaus zuverläßig iſt. Es iſt nur zu bedauren, daß dieſe Charte auf der göttingiſchen Sternwarte liegen bleibt, ohne durch einen ſaubern und genauen Abdruck gemeinnützlich gemacht zu werden. Denn dieſes iſt meines Wiſſens noch nicht geſchehen. Es wäre doch den Engländern ein geringes, noch etwann 100 tt. St. darauf zu ſetzen.

§. 2. Man wird aus der mayeriſchen Abhandlung ſehen, daß derſelbe auf den Gedanken verfiel, vermittelſt eines Diamanten oder Feuerſteins die Scale auf Glas einzuſchneiden. Was ihn aber davon abhielt, war die Beſorgniß, die Linien möchten nicht rein, noch fein genug ausfallen, und beſonders möchte das Glaß beym Einſchneiden ſeitwärts ausſpritzen. Die Schwürigkeit dieſes zu vermeiden iſt allerdings beträchtlich, und um deſto mehr iſt es zu bewundern, daß Hr. Brander, der ſich dabey Zeit und Geduld nicht reuen laſſen, die Geſchicklichkeit darinn ſo weit getrieben, als man es immer verlangen kann. Ich habe von ſeinen Glasſcalen einige verſchiedenen Perſonen vorgewieſen, die ſie ſo fein fanden, daß ſie ſie kaum oder gar nicht ſehen konnten. In der That ſind auch die Linien darauf kaum $\frac{1}{300}$ Theil einer Duodecimallinie des Pariſer Zolles breit. Wegen eben dieſer Feinheit findet ſich auch Hr. Brander im Stande, eine Linie des Pariſerzolles in 10 und allenfalls in noch mehrere Theile zu theilen.

§. 3. Zu dieſem Vortheile kommen noch zween andere, die das mayeriſche Micrometer, welches mit der Feder und mit Tuſche gezeichnet iſt, nicht hat. Das mayeriſche darf man kaum anrühren, und wenn Staub darauf fällt, ſo braucht es, um ihn wegzubringen, viele Behutſamkeit, damit die Zeichnung nicht ausgelöſcht werde. Dieſes hat man bey dem branderiſchen Micrometer nicht zu beſorgen. Sodann gebraucht Mayer, da ſeine Theile ſelten gleich groß werden, einer beſondern Berichtigungstafel, die mit vieler Mühe muß verfertiget werden. Dieſes wird bey den branderiſchen Micrometern ganz unnöthig. Die Theile ſind darauf ſo gleich, daß die Gleichheit nicht nur ſo gleich in die Augen fällt, ſondern auch die ſchärfſten Proben aushält. Ueberdieß kann Hr. Brander denſelben jede beliebige Größe geben.

§ 4. Dieſe branderiſchen Micrometer ſind nach der Verſchiedenheit des Gebrauches von verſchiedener Art. Bey Microſcopien werden dieſelben in Quadrate getheilt. Und ſo habe ich eines, das 6 Linien Pariſermaaß lang, und 6 Linien breit iſt. Es iſt aber jede Linie in 10 Theile, und daher jede Quadratlinie in 100 kleinere Quadrate, und damit das ganze Micrometer in 3600 kleine Quadrate wirklich eingetheilet. Dieſes giebt für einen Quadratzoll 14400 kleine Quadrate, die mit bloßem Auge noch ſehr wohl zu ſehen ſind; und wenn das Glas in das Microſcopium gelegt wird, wo das Bild hinfällt, ſo laſſen ſich dieſe kleine Quadrate in ſolcher Größe ſehen, daß, wenn ich mir die Geſchicklichkeit, die Mayer von ſich rühmt, zutraue, es noch wohl möglich iſt, einen Raum, der einer Linie groß zu ſeyn ſcheint, ſowohl der Länge als der Breite nach in 60ten Theilen zu ſchätzen weis. Die vorbemelten 14400 Quadrate müſſen mit 3600 multiplicirt werden, um die Anzahl der Punkte zu erhalten, die auf dem Micrometer durch das Ocularglas betrachtet in dem Raume eines Quadratzolles noch kenntlich ſind. Die Rechnung giebt 518400, das iſt über eine halbe Million ſolcher Punkte.

§. 5. Lege ich aber ein ſolches Quadrat, wovon 14400 einen Quadratzoll machen, unter das Microſcop als ein Object, ſo ich durch das Microſcop ſehen will, und ſetze erſtbemeldte Scale, die in eben ſolche Quadrate getheilt iſt, als ein Micrometer in das Microſcop, ſo kommen noch ungleich größere Zahlen heraus, die, nachdem ich ein anders Objectivgläßgen anſetze, verſchieden ſind. Ich habe fünf ſolcher Objectivgläsgen, und um deſto mehr damit die Probe gemacht, weil ich auf dieſe Art ohne Mühe finden konnte, wie ſtark bey jedem die Vergrößerung iſt. Ich durfte nämlich nur ſehen, wie viel $\frac{1}{10}$ Linien, die unterlegte $\frac{1}{10}$ Linie auf dem Micrometer bedeckt. Und ſo fand ich für das Objectivgläsgen

N. 1. . . 2 $\frac{1}{3}$.
2. . . 4 $\frac{1}{3}$.
3. . . 6.
4. . . 8 $\frac{3}{4}$.
5. . . 18 $\frac{3}{4}$.

§. 6. Dieſe Zahlen müſſen quadirt werden, um zu finden, wie viele Quadrate des Micrometers das Bild des untergelegten Quadrates bedecket, und ſo findet ſich für

N. 1.	. .	$4\frac{5}{9}$.
2.	. .	$18\frac{7}{9}$.
3.	. .	36.
4.	. .	$76\frac{9}{16}$.
5.	. .	$351\frac{9}{16}$.

§ 7. Mit dieſen Zahlen werden nun die vorhingefundenen 518400 multiplicirt, um die Anzahl der Puncte zu finden, die vermittelſt des Microſcopii bey jedem der 5 Objectivgläſer auf einem Quadratzoll des Objectes noch ſehr gut kenntlich ſind. Die Rechnung giebt für

N. 1.	. .	2,361600.
2.	. .	9,734400.
3.	. .	18,662400.
4.	. .	39,690000.
5.	. .	182,2500.0.

§. 8. Die (§. 5.) gefundenen Zahlen thun noch den Dienſt, daß vermittelſt derſelben die Größe der untergelegten Objecte in Theilen einer Pariſerlinie ſehr genau ausgemeſſen werden können. Ich gebrauchte gewöhnlich das Objectiv N. 3, welches die Theile des Objects auf dem Micrometer 6mal größer vorſtellt. Damit legte ich Fliegenaugen unter, und fand, daß 9 derſelben, die in einer Reihe lagen, auf dem Micrometer einen Raum von $\frac{13}{10}$ Linien bedeckten. Dieſer Raum durch 6 getheilt, giebt $\frac{13}{60}$ Linien für die Länge im Object ſelbſt. Wird nun ferner $\frac{13}{60}$ Linien durch 9, als die Zahl der Augen getheilt, ſo giebt der Quotient $\frac{13}{540}$ Linien für den Diameter eines Auges, oder $\frac{2}{83}$ einer Linie. Ich habe mich dieſer Art bedienet, um die innern Diameter von Thermometerröhren zu meſſen. Ich ſchliffe ſie gerade ab, und ſtellte ſie aufrecht, ſo daß die Oefnung gegen das Objectivgläsgen gekehret war.

§. 9. Auf eine ähnliche Art ſtellte ich Proben über die Schärfe des Geſichtes an. Ich legte von den Fäden unter das Microſcop, die im Frühling die ausſchlagende Weidenblüthe umhüllen. Der Diameter davon bedeckte auf dem Micrometer nur $\frac{1}{40}$ Linie, und demnach war er ſelbſt nur $\frac{1}{240}$ Linie. Nun konnte ich in der Entfernung von 8 Zollen, oder 96 Linien einen ſolchen Faden einzeln mit bloßem Auge noch gut und deutlich ſehen, ſowohl, wenn ich ihn gegen den freyen Himmel als gegen ein dunkles Object hielte. Sehe ich nun die 96 Linien als einen Halbmeſſer an, ſo ſind die $\frac{1}{240}$ Linien der 23040te Theil des Halbmeſſers, demnach =0,0000434. Dieſes iſt nun ein Winkel von 9 Secunden eines Grades, den ich demnach mit bloßem Auge unterſcheiden konnte. Man ſieht aus dem vorhergehenden §, daß der Diameter eines Fliegenauges faſt 6mal größer war, und dennoch konnte ich es mit bloßem Auge nicht unterſcheiden. Der Grund liegt ſchlechthin darinn, daß ich es nicht einzeln ſahe, denn zur Seite war ein viel feineres Fäſerchen, welches ich mit bloßem Auge noch gar wohl, obgleich nicht ganz deutlich ſehen konnte. Hingegen mit einem Augenglaſe von 16 Linien Brennweite ſahe ich die Augen einzeln, und wie ſie in Reyhen lagen. Da nun ein ſolches Glaß 6mal vergrößert, ſo iſt es eben ſo viel, als wenn ich die Augen unter einem 6mal größern Winkel, demnach unter einem Winkel von 54 Secunden eines Grades geſehen hätte. Es wird aber dieſer Winkel auf 40 Secunden, oder auf 36 herunter geſetzt, weil der weiße Zirkel in jedem Auge um ſo viel kleiner iſt als die Fäſerchen, womit jedes Aug eingefaßt iſt, austragen. Denn zum deutlichen Sehen wird erfordert, daß dieſe Fäſerchen von dem weiſſen Zirkel unterſchieden werden. Man ſieht demnach hieraus, was es bey der Schärfe des Sehens auf ſich hat, wenn ein Object allein oder mit andern Objecten zugleich geſehen wird, und daß es in der practiſchen Geometrie allemal genauer geht, wenn die Zeichen, ſo man ausſteckt, auf ſchwarzem Grunde einen weißen Strich, oder auf weißem Grunde einen ſchwarzen Strich haben. Ein Aug, das gut in die Ferne ſieht, wird ſolche Striche, und beſonders den weißen in ſolcher Entfernung ſehen können, wo die ſcheinbare Breite nur noch einen Winkel von 9 Secunden beträgt, und demnach der Abſtand 23000mal größer iſt, als die Breite des Striches. Dieſes beträgt für die Breite eines Zolles ungefehr 2000 Fuß. Gebraucht man aber ein Fernrohr, daß 30mal vergrößert, ſo wird der Strich bis auf 3 Meilen geſehen werden können. Es verſteht ſich aber, daß das Aug und das Fernrohr gut, das Zeichen aber behörig erleuchtet ſeyn muß.

§. 10. Die Micrometer für Fernröhre ſind von doppelter Art. Hr. Brander macht ſie ebenfalls von Glas. Die eine Art dient ſchlechthin nur ſtatt der bisher gebräuchlich geweſenen Kreuzfäden. Dieſe Kreuzfäden, ſo fein ſie auch ſind, haben immer noch einen vielfach größern Diameter, als die Linien breit ſind, die H. Brander auf dem Glaſe zieht. Man ſetze z. E. die Brennweite des Objectivglaſes ſey von 3 Fuß, oder 4320 Decimaltheilen von Linien. Da nun $\frac{1}{4320}$ =0,0002323 iſt, ſo giebt ein $\frac{1}{10}$ Linie einen Winkel von 48 Secunden. Nun müſſen ſolche Fäden ſchon ſehr fein ſeyn, wann ſie nicht dicker, als $\frac{1}{30}$ Linien ſeyn ſollen. Sind ſie aber ſo dünne, ſo bedecken ſie auf dem Campo Micrometri einen Winkel von 16 Secunden. Und wenn ſie auch nach Hr. de la Lande Ausmeſſung nur $\frac{1}{50}$ Linien ſind, ſo bedecken ſie dennoch einen Winkel von 10 Secunden. Die Linien, ſo wie Hr. Brander ſie auf Glas zieht, ſind nur $\frac{1}{100}$ Linien breit, und ſo bedenken ſie auch nur einen Winkel von $2\frac{1}{2}$ Secunden, wenn der Tubus nur 3 Fuß lang iſt. Iſt er aber von $7\frac{1}{2}$ Fuß, ſo bedenken ſie vollends nur 1 Secunden.

§. 11. Außer dieſer Feinheit der Linien habe ich an demjenigen Micrometer, ſo Hr. Brander nebſt einem Tubo von 23. Fuß für die K. Akademie zu Berlin verfertigt, noch den Durchſchnitt dreyer ſolcher Linien bemerkt. Dieſe drey Linien durchſchneiden ſich dergeſtalt in einem Punct, daß dieſer Punct ſelbſt durch ein Ocularglas betrachtet, nichts ausgeſprungenes zeigt, und damit auch nicht breiter als jede der drey Linien iſt, die auf dem Glaſe gezogen ſich in dem Punct durchſchneiden. Wenn ich dieſen Umſtand auch nur unter die glücklich gerathenen rechne, ſo zeigt er doch immer theils die Möglichkeit der Sache, woran Mayer zweifelte, theils die Geſchicklichkeit, dieſe Möglichkeit wenigſtens einmal erreicht zu haben, und die Vermuthung, daß ſie ſich noch mehrmal werde erreichen laſſen.

§. 12. Die andere Art von Micrometern, ſo Hr. Brander für Fernröhre ausfertigt, ſind ordentliche Scalen, die in Minuten oder halbe oder viertel Minuten oder auch in Linien, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$ Linien eines Zolles, oder in jede beliebige Theile getheilt ſind. Hr. Brander hatte ſolche Scalen auch für kurze Fernröhre, die gar nicht vergrößern, aber ein deſto größers Feld haben ſollten, verfertigt, und unter dem Titel von Polymetroſcopium bereits 1764. eine Beſchreibung davon herausgegeben, um den Gebrauch davon in mehrerley Fällen, als nützlich und angenehm zu zeigen.

Der Hauptvortheil zeigte ſich indeſſen immer bey Fernröhren und Teleſcopien, wo man vornehmlich gute Micrometer zu haben verlangt. Selbſt in der praceiſchen Geometrie thun ſie vortrefliche Dienſte, weil auch da nicht ſelten Winkel vorkommen, die eben deßwegen, weil ſie nicht groß ſind, um deſto genauer gemeſſen werden müſſen; zumal wo man aus der ſcheinbaren Größe eines Objectes, deſſen Größe bekannt iſt, auf deſſen Abſtand ſchlieſſen will. Von ſolchen Fällen habe ich bereits in den **Beyträgen zur Mathematick** verſchiedene angeführt, und würde mich noch umſtändlicher dabey aufgehalten haben, wenn mir dieſe Micrometer ſo bekannt geweſen wären, wie ſie mir nachher der Augenſchein gezeigt hat. Da ich aber erſt nachgehends einen einfachen Tubum von 3 Fuß mit ſolchen Micrometern von Hrn. Brander erhielte, und ſowohl die Feinheit als die Genauigkeit der Micrometer mein Erwarten weit übertraf; ſo ſahe ich auch, daß es ſich der Mühe lohnte, auf die davon zu erwartenden Vortheilen zu denken.

§. 13. So viel ſahe ich gleich, daß ich von meinem Fenſter aus einen Soldaten, der in einer Entfernung von 500 bis 600 Fuß Schildwache ſtund, bis auf $\frac{1}{4}$ Zoll und noch genauer meſſen konnte, da mir die Entfernung aus dem Grundriße der Stadt bekannt war, Den Durchmeſſer des Mondes in einer gewiſſen Höhe fand ich bis auf 2 oder 3 Secunden, ſo wie ihn die Mayeriſchen Tafeln angaben. Um aber den Tubum für irrdiſche Objecte bequem zu machen, ſo ſahe ich, daß da die Röhre für nahe Objecte mehr ausgezogen werden muß, das beſte ſeyn wurde, wenn ich bey jedem Ansziehen oder Verlängern der Röhre vermittelſt einer auf der Röhre gezeichneten Scala ſogleich ſehen könnte, wie viele Theile des Micrometers das Objectum jedesmal von dem Micrometer entfernt iſt. Dieſe Entfernung für unendlich weit entlegene Gegenſtände fand ſich von 550 größern oder 2750 kleinern Theilen des Micrometers. Ich bezeichnete demnach den Punkt auf der in der andern eingeſchobenen Röhre, da wo dieſe anfieng jene zu bedecken, und je, nachdem ich die vordere Röhre von 10 zu 10 Theilen mehr auszog, zeichnete ich ebenfalls ſolche Puncte, und ſchrieb die Zahlen 550, 560, 570 ꝛc. der Ordnung nach hin, und theilte die Zwiſchenräume in 10 gleiche Theile. Dieſes ſetzte ich fort, ſo weit ſich die Röhre ausziehen ließ, und damit wurde der Gebrauch des Tubus für irrdiſche Gegenſtände ſehr erleichtert. Denn für jedes nahe gelegene Object zog ich die äußerſte Röhre ſo weit aus, bis ſich das Object durch den Tubum geſehen deutlich zeigte. Auf dem Micrometer ſahe ich wie viele Theile das Objectiv von der Scala bedeckte, und auf der Röhre konnte ich ebenfalls ſehen, wie viele Theile das Objectiv von dem Micrometer entfernt war. Dieſe letztere Zahl verhält ſich nun immer zur erſtern, wie die Diſtanz des Objectes zu ſeiner Größe. Und ſo ließe ſich durch eine bloße Regel Detri aus der Diſtanz die Größe des Objects, oder hinwiederum aus dieſer jene finden.

§ 14. So z. E. auf einem Waſſerthurme, der beyläufig 2420 Pariſerfuß von meinem Fenſter entlegen war, ſahe ich eine Statue, ſo einen Neptun vorſtellt. Ich wollte die Größe der Statue finden. Da dieſe Entfernung merklich groß iſt, ſo ließ ich dem Tubo die Länge von den 550 Theilen, ohne ihn mehr auszuziehen. Auch zeigte ſich das Bild deutlich, und bedeckte auf dem Micrometer 2,46 Theile. Ich ſchloß demnach

$$550 : 2420 = 2{,}46 : 10{,}8$$

Und ſo fand ſich die Höhe der Statue von $10\frac{4}{5}$ Fuß.

§. 15. Hinwiederum von einem gegen meinem Fenſter über liegenden Dache wollte ich den Abſtand des Gibels finden. Ich richtete das Fernrohr gegen die unmittelbar vom Giebel abwärts hangenden Ziegel, ſo daß die Scala des Micrometers Horizontal zu liegen kam. Den Tubum müßte ich bis auf 572 Theile ausziehen, um die Ziegel deutlich zu ſehen; damit fand ſich, daß die Breite von zween Ziegeln genau 7 Theile des Micrometers bedeckte. Da mir nun bekannt war, daß auf jede Ziegelbreite $\frac{1}{2}$ rhein. Fuß gerechnet werden kann, ſo machte die Breite von zween Ziegeln 1 rhein. Fuß. Damit ließ ſich nun nach der Regel Detri

$$7 : 572 = 1 : 81\tfrac{5}{7}$$

ſchließen, daß dieſe Ziegel $81\frac{5}{7}$ rhein. Fuß, und daher der Giebel 82 rhein. Fuß von dem Objectivglaſe des Tubus entfernet ſeyn mußten. Aehnliche Verſuche giengen noch ſehr genau bis auf die Entfernung von 700 Fuß an. Denn das Micrometer war in 14 größere, oder 70 kleinere Theile getheilt, und jeder kleinere Theil ließ ſich nach einer bloßen Schätzung des Augenmaaßes ſehr leicht noch in 10 kleinere Theile theilen, ſo daß, wenn ich ſo viele Ziegel zuſammen nahm, als die Scale des Micrometers faſſen konnte, auf 700 nicht um 1 verfehlt wurde. Daran fehlte es alſo nicht. Die Hauptfrage war aber wohl dieſe: ob man immer ſicher genug auf jede Ziegelbreite genau $\frac{1}{2}$ rhein. Fuß rechnen könne. Denn, wo dieſes nicht iſt, da wird zwar eben nicht viel fehlen, indeſſen iſt alsdann die darauf gegründete Rechnung nur beyläufig. Uebrigens laßen ſich bey Fenſterſcheiben, zumal wo ſie rund und auf den Glashütten, gerundet ſind, ähnliche Verſuche anſtellen. Denn, wenn auch ſolche Ausmeſſungen nur beyläufig ſind, ſo dienen ſie doch theils zur Curiorioſität, theils weil man ohnehin nicht immer die äußerſte Schärfe verlangt.

§ 16. Will man aber hiebey genau verfahren, und z. E. Diſtanzen von 300, 400, und mehr Fußen auf eine ſehr kurze Art ausmeſſen, ſo iſt wohl das ſicherſte, daß man Latten oder Stangen, durch kenntliche Zeichen, in einzelne Fuß eintheile, und ſie in der verlangten Entfernung gerade aufrichten laſſe; ſo läßt ſich, wenn man den Tubum gegen dieſelben richtet, und ihn behörig auszieht, auf dem Micrometer ſehen, wie viel Fuß daſſelbe beynahe, oder genau ganz bedecken. Und damit kann die Entfernung ebenfalls vermittelſt einer Regel Detri ſehr genau gefunden werden. Uebrigens müßen die Stangen deſto länger ſeyn, je größer die Entfernung iſt. Denn hiebey iſt die Hauptſache, daß man auf dem Micrometer ſo viele Theile brauche, als immer möglich iſt. So z. E. muß bey meinem Tube für jede 40 Fuß größere Entfernung die Stange um 1 Fuß länger genommen werden: Weil die 14 Theile des Micrometers in den 550 Theilen, ſo die kürzeſte Länge des Tubus ausmachen, ungefehr 40mal enthalten ſind. Man kann daher, wenn die Stange gar zu lang genommen werden müßte, ſtatt derſelben zwey Zeichen in zureichender Entfernung von einander ausſtecken, und die Scale des Micrometers Horizontal legen. Solche Zeichen müßen aber von dem Tubo gleichweit entfernt ſeyn, damit ſie in Form einer Chorde eines Winkels gemeſſen werden können.

§. 17. Man kann auch 3 Zeichen ausſtecken, die unter ſich einen gleichſeitigen Triangel bilden, deſſen Seiten aber ſehr genau beſtimmt und bekannt ſeyn müſſen. Auch muß man ſolche drey Zeichen entweder alle, oder wenigſtens zwey und zwey durch das Fernrohr zugleich ſehen können. Man ſieht ſodann wie viele Theile dieſe Zeichen auf dem Micrometer abſchneiden. Es ſey z. E. (Fig. 1.) ein ſolcher Triangel ABC, der mit dem Fernrohr aus D geſehen wird. Da nun der Winkel ADC ſelten größer als 1 Gr. iſt, ſo kann man AE, EC nach den auf dem Micrometer gefundenen Theilen proportioniren, und die Linie BE ziehen. Zieht man ſodann CF auf BEF ſenkrecht, ſo hat man den rechtwinklichten Triangel DFC, in welchem CF bekannt iſt, und folglich FD, vermittelſt der Theile des Micrometers, ſo die Puncte CB abſchneiden, und der Länge des Tubus gefunden werden kann. Addirt man FB zu FD, ſo erhält man die ganze Länge DB. Da man hiebey den Triangel ABC immer ſo nehmen kann, daß die eine Seite AB mit D in gerader Linie liegt; ſo kann man auch immer erhalten, daß E in A, und F mitten auf AB fällt, und damit wird alles noch kürzer und zuverläßiger. Man kann ſich auch (Fig. 2.) ein Geſtelle machen, wovon die 2te Figur das Profil vorſtellt. A, B, C zeigt nämlich die rhombiſche Figur der aufrecht zu ſtellenden Stangen, und AB, AC, BC ſind Latten, die in A und C eingeſteckt, und durch B und C ſo durchgezogen werden können, daß man dem Triangel A B C die nach Verhältniß der Entfernung erforderliche Größe geben kann. Zu dieſem Ende werden die Latten von A gegen B und C, und von C gegen B in Fuße und Zolle eingetheilt. Die Stangen ABC ſind oben gegen die Mitte zugeſpitzt, oder ſonſt ſo bezeichnet, daß deren Mittelpunct durch den Tubum kenntlich und ſcharf geſehen werden könne; denn dieſes muß ſehr genau ſeyn, und die Stangen A B C müßen von der verticalen Stellung wenigſtens nicht merklich abweichen, dabey aber genau parallel ſeyn. Setzt man ein ſolches Geſtell mitten auf ein auszumeſſendes Feld, und man geht an den Ecken deſſelben herum, ſo läßt es ſich, vermittelſt des Tubus in Grund legen, und zwar noch ziemlich genau, wenn auch das Feld ſchon einige 100 Fuß lang und breit iſt.

§. 18. Jedoch dieß ſind alles micrometriſche Kleinigkeiten, die aber allemal ihre eigene Wichtigkeit haben. Indeſſen hatte ich die Vermuthung, daß ſich von ſolchen Scalen noch ungleich beträchtlichere Vortheile ſollen können ziehen laſſen. Kurz, es war die Frage auch Winkel von vielen Graden mit ſolchen Scalen zu meſſen, und zwar mit eben der Schärfe, mit welcher die gewöhnlichen Fernröhre nur einen Grad oder auch nur wenige Minuten meſſen. Dieſes letztere erfordert eine ſtarke Vergröſſerung, erſteres aber ein deſto größeres Feld vom Micrometer. Beyde dieſe Vortheile aber ſtehen einander dergeſtalt im Wege, daß ſie nicht leicht zugleich erhalten werden können, zumal wo man bey einer 20 bis 30 maligen Vergrößerung dennoch ein Feld von 20 biß 30 Graden erhalten will. Indeſſen ließen ſich Mittel finden. Denn daß die Schuld nicht an dem Objectivglaſe liege, zumal wo deſſen Bedeckung nicht ſehr groß iſt, das zeigte die Camera obſcura, welche auf beyden Seiten der Axe des Glaſes wenigſtens bis auf 15 Grade die Bilder noch immer ſehr deutlich vorſtellt. Bilder von ſo viel Graden brachte Hr. Brander auch auf das Mikrometer von ſeinem Polymetroſcopio, und konnte ſie ganz und deutlich ſehen, weil das Augenglas dabey eben die Größe hatte. Aber eben dadurch fiel die Vergröſſerung ganz weg, und bey ſchärfern Augengläſern wurde von dem Bilde weniger zu ſehen geweſen ſeyn. Das erſte Mittel, ſo ſich demnach darboth, war, daß das Augenglas in immer gleicher Entfernung auf dem Mikrometer hin und her geſchoben werden konnte, und dabey ließen ſich allenfalls auch zwey Augengläſer anbringen, ſo daß ſolche Theile des Bildes, die durch das eine nicht zugleich ſichtbar waren, durch beyde beſonders geſehen werden konnten. Es ſey in der 3ten Figur BC das Object, O das Objectivglas, AOa deſſen Axe, cb das Micrometer von Glas in ſeine Theile getheilt, ſo fallen die Bilder der Punkte BAC in bac. Rückt man demnach das eine Augenglas in M, das andere in N, ſo wird man durch M den Punkt oder die Theile des Objects bey C, durch N aber die Theile des Objects bey B ſehen. Und in cb zeigt es ſich, welche Theile des Micrometers von dem Bilde der Punkte C B bedecket werden, und wie groß folglich der Winkel cOb = COB iſt, wenn man c b als eine Chorde, und Oc, Ob als einen Halbmeſſer betrachtet. Auf dieſe Art erhält der Tubus die Figur einer flachen Pyramide, da er in O nur wenig größer, als das Objectivglas, dagegen aber in MN ſo breit ſeyn muß, als es wegen der Deutlichkeit des Bildes immer angehen kann. Denn man ſieht leicht, daß je ſchiefer die Strahlen ſind, man deſto ehender ein undeutliches und gefärbtes Bild zu beſorgen hat.

§ 19. Das ſicherſte war, die Sache auf Verſuche ankommen zu laſſen. Ich ſchriebe ſie an Hr. Brander im Sommer 1768, und da derſelbe damals beſchäftigt war, einige große aſtronomiſche Inſtrumente vollends zu Ende zu bringen, ſo ſtellte er Anfang nur beyläufig eine Probe an, die aber die Vermuthung eines erwünſchten Erbfolges genugſam beſtärkte. Das Micrometer ſollte in c ſich herumdrehen laßen, damit ſo groß oder klein auch die Winkel COB ſeyn möchten, die mittlere Linie AOa immer ſo viel als möglich, oder auch genau ſenkrecht auf das Micrometer treffen könne. Sodann ſollte für irrdiſche Gegenſtände das Objectivglas O an einer beweglichen Röhre ſeyn, die ſich nach Verhältniß der Nähe des Objectes ausziehen laſſen konnte. Die Hauptfrage hiebey war aber immer, die Sprache des Micrometers ob für jede Verlängerung der Röhre auf eine leichte Art verſtändlich zu machen. Denn für unendlich entfernte, oder ſehr entlegene Gegenſtände war eine ganz einfache Tabelle hinreichend. Dieſe Tabelle wurde unmittelbar die jedem Theile des Micrometers entſprechenden Winkel angegeben haben. Hingegen würde jede Verlängerung der Röhre entweder eine beſondere Tabelle erfordert haben, oder man hätte allemal den Winkel beſonders haben berechnen müßen. Indeſſen hätte ſich doch, wenn für einige angenommene Verlängerungen Tabellen berechnet, oder auch durch Verſuche verfertigt geweſen wären, alles übrige durch eine leichte Einſchaltung finden laſſen.

§. 20. Inzwiſchen dachte ich auf Mittel, die hiebey vorkommenden ſchiefen Einfallswinkel wegzuſchaffen. Ich ſahe leicht, daß dieſe nur daher rührten, weil das Objectivglas eine unveränderliche Lage hatte. Es müßte demnach eben ſo, wie die Ocularglaſer gedreht werden, und dieſes verwandelte die erſterwähnte Pyramidalfigur wiederum in einen Tubum, und wenn alles mitgenommen werden ſoll, in zween. Der eine Tubus, deſſen Objectiv m, das Ocular M iſt, hat eine fixe Lage, und dient das Inſtrument gegen den Punkt des Objectes B zu richten. Der Tubus liegt auf einer Regel, welche in C ein Centrum hat, um welches ſich auch die Regel dreht, auf welcher der andere Tubus liegt, deſſen Objectiv n, das Ocular N iſt. Das Micrometer hat in B ein Gewind, und geht durch den focum des andern Rohres durch. Es iſt ſo getheilt, daß man durch das Ocular N ſogleich ſehen kann, wie viele Theile der Winkel ACB auf dem Micrometer faßt. Da die Figur das Inſtrument nur durch bloße Linien vorſtellet und verſchiedene Leſer villeicht Mühe haben ſich die ganze Ausbildung deſſelben und die Art damit umzugehen, vorzuſtellen: ſo war es mir ein Vergnügen von Hr. Brander zu vernehmen, daß derſelbe den Sector, ſo wie er ihn ein für allemal zu verfertigen und einzutheilen geſonnen iſt, genau abzeichnen, und die Art damit umzugehen, auch ſolchen faßlich machen will, die ſich in neue Inſtrumente nicht gleich finden können. Ich habe demnach, um auch noch dieſe Beylage beyfügen zu können, den Druck des Werkes ſo weit verziehen laſſen, damit die Leſer in allem befriediget werden können.

§ 21. Dieſen Anſchlag gab ich Hr. Brander nur überhaupt an. Und da er mit den vorhin erwähnten Inſtrumenten fertig war, ſo leuchtete ihm hier alles dergeſtalt ein, daß er ohne Säumniß an die wirkliche Verfertigung dachte. Er nahm das centrum C außerhalb dem Objectiv, und zwar mit gutem Vorbedacht. Denn, da es hier eigentlich auf die Axen AnaN, BmbM ankommt, ſo iſt es an ſich gleichviel, in welchem Punkt, dieſe Axen ſich durchſchneiden. Sodann erhielt er eben dadurch auch, daß die beyden Röhren nach Verhältniß der Nähe des Objectes verlängert werden könnten. Und da hiebey immer Cb = Ca iſt, ſo iſt auch immer ba eine Chorde von einem beſtändig gleichen Radius. Dieſer Vortheil findet bey einfachen Fernröhren nicht ſtatt. Auch iſt hiebey die vollkommen gleiche Länge beyder Fernröhre, die wegen der Umſtände beym Glasſchleifen nicht leicht zu erhalten iſt, nicht nothwendig, und ſo können auch beyde Fernröhre allenfalls merklich kürzer ſeyn als der Radius Cb = Ca Hr. Brander nimmt ferner dieſen Radius von 5000 oder 50000 Theilen des Micrometers. Dadurch wird der Vortheil erhalten, daß man die auf ba für zwey Objecte BA gefundene Anzahl der

Theile nur ſchlechthin in den Sinus Tafeln aufſuchen und den dabey ſtehenden Winkel verdoppeln darf, um den Winkel BCA zu erhalten. Denn überhaupt iſt der Sinus eines jeden Winkels die halbe Chorde des doppelten Winkels. Nun wird die Chorde ba ſchon eben dadurch halbirt, daß der Radius Ca = Cb von 50000 Theilen genommen wird, da er in den Tafeln = 100000 iſt. So z. E. wenn ba von 21360 ſolcher Theile gefunden wird, deren nemlich Cb = Ca 100000 hat, ſo findet ſichs in den Tafeln, daß 21360 ſehr genau der Sinus von 12° 20′, demnach die halbe Chorde von 2mal 12° 20′, oder die Chorde von 24° 40 iſt. und ſo groß iſt in ſolchem Fall der Winkel ABC = bCa, den man ausmeſſen wollte. Am kürzeſten kommt man fort, wenn man eine Tabelle vor ſich hat, welche für jeden Winkel von zehen zu zehen Secunden die Chorden oder Theile des Mikrometers giebt. Und da Hr. Brander allemal den Radius zu 5000 Theilen oder bey kleinern Sectoren halb ſo groß nimmt, ſo kann für alle ſolche Inſtrumente eine und eben die Tabelle dienen. Es wird daher denen, die ſich dieſes Inſtrument zum wirklichen Gebrauche anſchaffen, angenehm ſeyn, eine ſolche von ihm berechnete Tabelle in der beſonders in Druck zu legenden Beſchreibung noch beygefügt zu finden.

§ 22. Ein ſolcher Sector, der ganz füglich bis auf 30 und mehr Grade geht, und den wir als einen dioptriſchen Sector anſehen können, hat nun etwas vorzügliches. Er vereiniget, und zwar auf die geſchwindiſte Art, die ſich gedenken läßt, mehrere Vortheile, die man bey andern Sectoren, theils nicht zugleich erreichen konnte, theils durch viel zuſammengeſetztere Einrichtungen erhalten mußte. Er zeigt zwar nicht unmittelbar Grade, Minuten, Secunden an, dagegen aber iſt man von der genauen und durchaus gleichen Eintheilung des Micrometers ruhig verſichert.

Und um dieſes nicht bloß zu glauben, ſo fügt Hr. Brander noch eine kürzere Scala von gleicher Eintheilung bey, die man auf dem Micrometer hin und her ſchieben, und ſich mittelſt einer Linſe von 1 Zoll Brennweite von der Feinheit der Linien und von der Genauigkeit durch das Selbſtſehen überzeugen kann. Die Reduction auf Grade, Minuten, Secunden kann nicht einfacher ſeyn, als ſie hiebey iſt (§. 21) bey andern Sectoren muß man erſt das Object durch das Fernrohr, und ſodann erſt auf dem Limbus ſehen, wie viele Grade, Minuten ꝛc. es giebt. Hier aber iſt das Micrometer ſelbſt der Limbus, und ſo malet ſich das Object unmittelbar auf dem Limbus ſelbſt ab. Zu geometriſchen Ausmeſſungen läßt ſich ein ſolcher Sector, auch wenn Cb = Ca = 41″ 8‴, oder 5000 Decimaltheile von Linien eines Pariſerzolles iſt, ohne von der Genauigkeit etwas zu verlieren, von Holz, und damit ſo leichte machen, daß er auf dem Felde ohne Mühe hin und her getragen werden kann. Und wenn er da mit einemmale auch nur Winkel von 30 Graden mißt, ſo iſt es weder ſchwer noch langwirig, zwiſchen den Objecten, ſo man abmeßen will, wenn ſie über 30 Grad von einander weg liegen ſollten, noch andere anzunehmen, die mit den Objecten, oder unter ſich geringere Winkel machen. Die Genauigkeit, die man bey dem Sector erhält, erſetzt alles dieſes auf eine befriedigende und öfters ſchätzbare Art. Was ich vorhin bey Anlaß der bloßen Fernröhre ſagte, läßt ſich hier mit gehöriger Vergrößeruug der Umſtände und mehrerer Entfernung der Zeichen auf Felder ausdehnen, die Meilenwegs ins Gevierte liegen, denn man ſieht aus dem vorhin (§ 22) angeführten Beyſpiele, daß das Micrometer 20000 bis 30000 Theile faßt, die alle noch kenntlich ſind. Wo man aber auf 20000 bis 30000 kaum um 1 fehlen kann, da beträgt mit gehöriger Auswahl der Umſtände, der Fehler auf eine ganze deutſche Meile keinen Fuß. Es ſetzt aber dieſes allerdings einige Uebung und Geſchicklichkeit voraus, und dieſes muß ich denen ſagen, die ſich etwann einbilden, daß wenn ſie nur gute Inſtrumente haben, ſie ſodann ganz obenhin damit verfahren können. Der Erfolg iſt aber nicht ſelten ſo, daß man mit einer bloßen Meßkette und einigen Stangen genauer würde zum Zwecke kommen können. Es ſind berühmte Beyſpiele vorhanden, wo man bey **Grahamniſchen** Inſtrumenten in Abſicht auf ihre Güte für einzelne Secunden gut ſtehen wollte, oder ſie wenigſtens ſo weit rühmte, und in der Ausübung zeigten ſich Fehler, die ſchon auf 500 eins austrugen, ſo daß jede Meile um 40 Fuß zu groß, oder zu klein herauskam.

§ 23. Ob ſich ein ſolcher Sector auch in der Aſtronomie gebrauchen laſſe? das werde ich nicht erſt den Aſtronomen vorſagen müßen. Sie haben ungleich zuſammengeſetztere und unzuverläßigere Sectoren gebraucht. Die Sterne, die nahe beym Zenith vorbeygehen, werden gewöhnlich mit eigentlich dazu beſtimmten Sectoren beobachtet. Und bey ſolchen hat man auch ſchon anſtatt der Zirkelbogen, deren Eintheilung ſo mißlich iſt, Tangenten und Chorden gebraucht. Da aber, beſonders wenn z. E. die Entfernung eines Cometen von Sternen, oder eines Sterns von dem Monde ſollte gemeſſen werden, zween Beobachter ſeyn müſſen; ſo läßt ſich für ſolche Fälle vermittelſt eines Planſpiegels der Tubus mbM ſo abändern, daß das Augenglas ſeitwerts zu ſtehen komme, und auf dieſe Art ein Beobachter den andern im geringſten nicht hindere. Das Inſtrument kommt ſodann auf eine paralactiſche Maſchine, ſo daß wenn die beyden Sterne einmal geſehen werden, die Beobachtung durch das bloße Umdrehen der Maſchine fortgeſetzt, die Diſtanz genau berichtigt, und wenn ſie ſich, wie es bey dem Monde und zuweilen bey Cometen geſchicht, in kurzer Zeit merklich ändert, mehrere Diſtanzen können genommen werden. Noch muß ich anmerken, daß Hr. Brander in jedem Tubo metallene ſehr feine Fäden angebracht hat, und zwar in dem Tubo naN dergeſtalt, daß der Faden hart an dem Glaſe des Micrometers wegſtreicht. Beyde Fäden ſind in der Axe des Objectivglaſes, und letzterer dient beſonders auch dazu, daß wenn auch das Object über oder unter die Scala des Micrometers fällt, der Faden dennoch deſſen Lage einzeige. Bey geometriſchen Operationen, wo das Inſtrument Horizontal liegt, hat dieſes ſeinen guten Nutzen, weil eben nicht immer jede Objecte in einer geometriſchen Ebne liegen.

§. 24. Ungeachtet nun ein ſolcher Sector für einen Winkel, der nicht viel über 30 Gr. iſt, ſeine beträchtliche Vorzüge hat, ſo blieb mir doch noch die Frage, ob die Sache nicht auf die völlige 90, 180, 360 Grade getrieben werden könnte. Auf 60 Gr. läßt ſie ſich allerdings treiben, weil eben ſo wie der Tubus naN herunterwärts geht, ein anderer von b aufwärts gehen kann. Alsdann läßt man in Cb ſchlechthin nur die Regel, und zu dem Micrometer ba kömmt noch ein anderes, welches eben ſo durch den obern Tubus geht, wie cb durch den untern, und jedes für ſich beſonders gedreht werden kann. Ueber die 60 Grade wird ſichs aber bey dieſer Art der Einrichtung nicht wohl gehen laſſen. Indeſſen erhält man dadurch wenigſtens einen völligen Sextanten.

§. 25. Um aber dennoch auch auf Quadranten, halbe und ganze Circul bedacht zu ſeyn, wo der Gebrauch von bloßen Chorden nicht mehr füglich angeht, und die Glasſcalen ſchwerlich und nur mit Gefahr eines öftern Mißlingens im Zirkel herum gebogen werden können, ſo dachte ich auf Mittel, daß wenn ein Limbus aus einer flachen Spiegeltafel ausgeſchnitten wird, nachdem er in ſeine Grade und Minuten eingetheilt iſt, dieſer Limbus durch das Fernrohr durch, oder beſſer zu ſagen, über demſelben ſo weggehen könne, daß die Eintheilung ſtatt eines Micrometers diene, auf welchem das Bild des Objects unmittelbar geſehen werden könne. Dieſes war nun vermittelſt eines vor dem Brennpunct des Objectivglaſes unter 45 Gr. geneigten Planſpiegels allerdings möglich. Denn es ſey O das Objectivglas, (Fig. 5.) AOB die Axe deſſelben, der Spiegel in B unter 45 Graden geneigt, ſo fällt das Bild, welches in b würde geweſen ſeyn, aufwärts in CD; und CD iſt das Profil von dem gläſern Limbus, deſſen Centrum in A ſeyn kann. In E iſt das Augenglas in ſeiner behörigen Entfernung, ſo daß man durch daſſelbe das Bild auf CD deutlich ſehe.

§. 26. Was hiebey die Bewerkſtelligung einſchränkt, iſt, daß die Spiegeltafeln eben nicht von jeder beliebigen Größe zu haben ſind, und damit fallen die ganzen Zirkel überhaupt kleiner aus als halbe (weil auch die größten Spiegeltafeln viel länger, als breit ſind) und die halben Zirkel kleiner als Quadranten, Sextanten ꝛc. Dieſes verſteht ſich für ſich. Der andere Umſtand betrift die Eintheilung in Grade, Minuten ꝛc. Dieſe läßt ſich zwar auf Glas feiner und bey gleicher Feinheit viel ſichtbarer und dauerhafter, als auf Meßing machen, indeſſen iſt die äußerſte Genauigkeit immer noch ſo ſchwer zu erhalten, daß ſie einer Berichtigungstafel bedarf. Da indeſſen Herr Brander ſeinen Scalen eine ſo große Genauigkeit geben kann, ſo ſcheint mir die Schwierigkeit fürnehmlich auf die Beſtimmung der wahren Länge des Halbmeſſers anzukommen, weil man doch die Chorden in den Tabellen ſo ſcharf hat, als ſie in der Ausübung niemals erlangt werden können. Das Uebrige wird wohl auf angeſtellte Verſuche ankommen, wie weit es hierinn gebracht werden kann.

So viel demnach für dieſesmal.

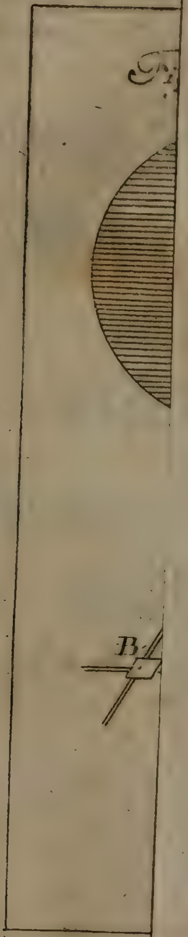

B

Fig. 6.

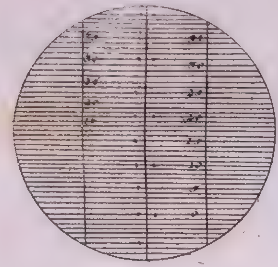
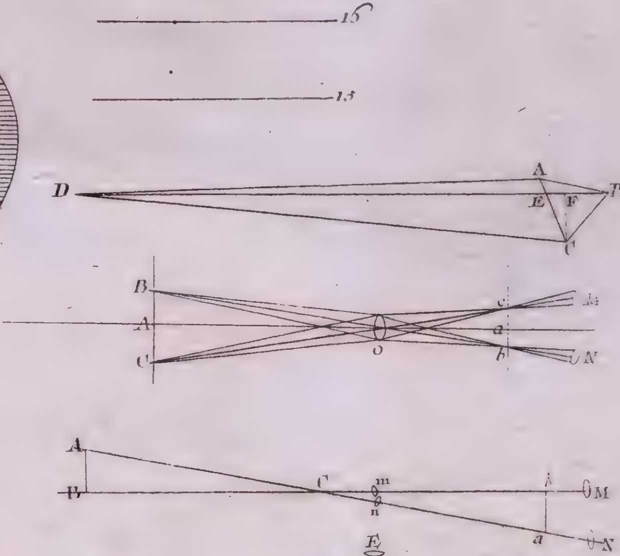
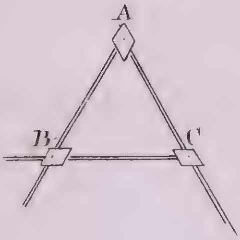
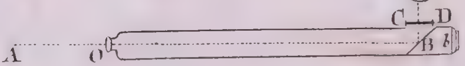


Fig. 7.


16
15
D
A
B
E
F
C
B
A
C
o
c
a
b
M
N
A
B
C
m
n
b
a
M
N





Georg Friedrich Branders
Beſchreibung
eines
neuerfundenen
dioptriſchen Sectors,
und ſeiner
weſentlichen Einrichtung und Theile,
nebſt
einer kurzen Belehrung
von deſſen Gebrauche.

§ 1.

Indem ich von dieſem Inſtrumente eine Anzeige geben will, welches, wie ich hoffe, den Beyfall aller Mathematickverſtändigen verdienen wird, werde ich, um alle Wiederholungen zu vermeiden, weder eine theoretiſche Beſchreibung deſſelben vorzunehmen, noch auch von dem mannigfaltigen Gebrauch, Nutzen und Vortheilen, welche man von demſelben ſowohl in der Geometrie als in der Aſtronomie auf die vorzüglichſte Art zu hoffen und zu erwarten hat, eine weitläufige Nachricht zu geben haben: da ſolches der berühmte und gelehrte Hr. Profeßor Lambert in Berlin in ſeinen hierüber gemachten Anmerkungen bereits zur Genüge gethan hat, und einſichtsvolle Leſer dadurch genugſam belehret worden ſind. Daher werde ich mich hier blos auf die Beſchaffenheit ſeiner Theile einſchränken und ſie ſowohl einzeln nach einander, als auch in ihrer Zuſammenſetzung beſchreiben und zeigen, wie man ſich überhaupt dieſes Inſtrumentes zum Gebrauche bedienen müßte.

§ 2. Tab. II. Fig. 1 zeiget nun, wie dieſes Inſtrument in ſeiner Zuſammenſetzung ausſieht und völlig zum Gebrauch gerichtet iſt. Fig. 2 iſt die Anrichtung zu ſehen, welche unterhalb in der Mitte des Sektors angeſchraubet wird, und dazu beſtimmt iſt, daß man demſelben damit eine ſanfte horizontale oder verticale Bewegung verſchaffen kann, wenn man ſich deſſelben auf einem Stativ (Fig. 3) horizontal bedienen will.

§ 3. Um in der Beſchreibung dieſes Inſtrumentes ordentlich zu verfahren, muß ich ſogleich erinnern, daß daſſelbe eigentlich aus drey Haupttheilen beſtehe: **Erſtens** aus der Rahm oder dem Geſtelle ABC. **Zweytens** aus dem Tubus FG und **drittens** aus der Scala HI.

§. 4. Was nun erſtlich das Geſtelle ABC betrift, ſo iſt ſolches von Holz, und hat die Figur eines gleichſchenklichten Triangels. Bey C iſt ein wirbelartiges Centrum von Meßing angeſchraubet, an welchem der Tubus beweglich iſt. Der Winkel ACB aber richtet ſich nach der Länge der Scala IH, und kann dahero 15, 20, 25 bis 30 Grade ꝛc. groß ſeyn. Vornen, wo die beyden Schenkel A B ſich endigen, iſt noch eine hohle Rahm D E dergeſtalt daran verbunden, daß der Tubus G F dadurch gehen und ſich in derſelben ganz frey von E nach D bewegen kann: der Stand derſelben iſt curvatiſch rund, und das Centrum iſt bey C.

§. 5. Das zweyte Hauptſtück dieſes Sektors iſt der Tubus GF. Dieſer iſt vornen bey C an das beſonders angerichtete meßingene Centrum dergeſtalt angemacht worden, daß er ſich nicht allein um daſſelbe ſanft und ohne Spielraum drehen läßt, ſondern daß man auch noch hieran den Mittelpunkt zur Prüfung und Beſtimmung des Radius wahrnehmen kann, wovon nachgehends noch das mehrere ſolle geſagt werden. Das Objectivglas an dieſem Tubus iſt vermittelſt meßingener Federn in die Höhlung des Tubus bey G eingeſchoben, und kann durch das äußere Linial gf, welches man vermittelſt des aufrecht ſtehenden Stifts f beweget, näher oder weiter vor der Scala gebracht werden. Denn bey dieſer Art eines Tubus darf das Ocularglas nicht, wie bey der gemeinen Art von Sehröhren, beweglich und hingegen das Objectiv feſt ſeyn, ausgenommen jenes nur ſo viel, daß man dadurch in den Stand geſetzet wird, die Scala deutlich und klar zu erblicken. Dagegen aber muß das Objectiv hier beweglich ſeyn, weil ſolches ſein Bild ſehr genau auf die Scala, die immer einen gleichen Abſtand von dem Centrum C hält, werfen muß, woferne nicht eine Parallaxis hiebey entſtehen ſolle.

§ 6. An dem andern Ende des Tubus iſt das hohle Stück K eingeſteckt, wodurch die lange Scala IH geſchoben wird. Damit aber die Scala immer an die Axe des Tubus anliegen möge, ſo ſteckt inwendig noch ein anderes Rohr, über welches ein ſehr zarter Silberfaden geſpannet iſt, der durch das Centrum deſſelben geht, und parallel an der Fläche der Glastafel wegſtreifet. Dieſer Silberfaden geht alſo ſenkrechts durch die Mitte des ganzen Campus, und folglich bemerket er auch die Theile auf der Scala, welche das Bild, das ebenfalls an derſelben ſtehet, darauf bezeichnet und abmahlet, es mag daſſelbe gleich über oder unter der Scala zu ſtehen kommen. Zugleich iſt dieſer Faden auch das Maß des Radius vom Centrum, welcher 5000 Scrupel oder ſolche Theile, aus welchen die Scala beſtehet, enthält.

§ 7. An eben dieſem Stücke K iſt von außen noch ein kurzes Stück Rohr befeſtiget, in welches noch ein anders eingeſchoben iſt, welches das Ocularglas enthält, und etwas weniges aus und ein gezogen werden kann, je nachdem es das Geſicht und Auge erfordert, um die Theilung auf der Scala deutlich und klar bemerken zu können.

§ 8. Unter dem Schenkel BC des Geſtelles ACB iſt noch ein anderer Tubus, und zwar von eben dieſer Art und Größe parallel unter den erſtern angeſchraubt; nur wird dieſer Unterſchied dabey bemerket, daß dieſer untere ſein beſonderes Mikrometer oder eine Glasſcala und zwar in eben dieſen Theilen des obern und parallel mit denſelbigen in dem Foco des Ocularglaſes ſtehen hat. Dieſer Tubus bleibet an dem Geſtelle beſtändig feſte und unbeweglich, und iſt ſo geſetzet, daß ſeine Axe mit der Axe des obern parallel iſt.

§ 9. Die Scala HI, macht das dritte Hauptſtück dieſes Inſtrumentes aus. Dieſe beſteht aus einem Parallelogrammum von feinpolirten und paralleldickem Spiegelglas, worauf der Länge nach ein ſehr feiner Maßſtab in Scrupeln nach franzöſiſchem Maß, den Zoll zu 120 Theilen gerechnet, mit einem Diamanten ſehr ſubtil verzeichnet iſt. Weil aber in dem Zählen dieſer Theile gar leicht wegen ihrer Subtilität ein Irrthum begangen werden könnte, ſo unterſcheiden ſich die Fünfer und Zehner durch etwas längere Striche, die Fünfziger aber durch ſo lange Striche, die die ganze Breite des Glaſes durchlaufen, wobey noch überdas die Zahlen 50, 100, 150, und ſo weiter bis zu Ende hingezeichnet worden, ſo daß allezeit zwey Aufſchriften in dem Campus geſehen und gezählet werden können. Dieſes Glasparallelogrammum iſt in einen hölzern Rahmen eingefaſſet, an deſſen einen Ende ſeine Charniere angeſchraubt iſt, deren Centrum durch das Zero der Theilung gehet, der andere Theil derſelben aber an dem Rahmen des Geſtelles bey E angeſchraubt iſt, ſo daß wenn der Mittelfaden des beweglichen Tubus das Zero oder den Anfang der Scala ſchneidet, jener mit dieſem einen rechten Winkel machen muß.

§ 10. Auf der andern Seite dieſes Rahmens bey A iſt unterhalb deſſelben eine gekrümmte Stütze oder Arm L angeſchraubt, auf welcher dieſer Rahm mit ſeiner Scala, in welchem Stand ſolche nur immer ſeyn mag, allezeit ruhet; damit ſeine Charniere nicht die ganze Schwere deſſelben allein tragen müße, und ſich alſo nichts verziehen könne, wiewohl dieſer Arm auch nach Belieben abgenommen werden kan. An dem Ende dieſes Arms iſt auch noch ein aufrechter Stift h zu ſehen; an welchem der Rahm anſtehen muß, wenn er einen rechten Winkel mit dem Tubus macht, und durch welchen dieſem letztern gleichſam ſeine Gränze geſetzet wird, die er nicht überſchreiten darf, wenn derſelbe auf dem Zero der Theilung ſtehet.

§. 11. Damit aber der Tubus ohne große Bemühung gelenket und ihm eine ſanfte Bewegung gegeben werden könne, ſo iſt über denſelben und über den hölzernen Limbus DE ein gekröpfter Hacken M mit einer Rolle angeſchraubt worden, über welche eine Saite geſchlungen iſt, die über die Curvam DE geſpannt iſt, und woran die Rolle alsdann lauft und den Tubum mit ſich nimmt und beweget.

§. 12. Damit man aber auch dem ganzen Sector eine ſolche ſanfte Bewegung geben könne, ſo zeiget ſich Fig. 2 eine zu dieſem Ende veranſtaltete beſondere Anrichtung. Dieſe beſtehet aus zwey doppelt übereinander geblatteten Scheiben mit einem Nagel, der in der Mitte ſenkrecht durchgehet, und einem Schrauben, der quer durch die zwey Arme dieſer Anrichtung reichet. Dieſe kann nun auf das Stativ einer jeden Art von Meßtiſchen geſetzt werden, wo ſodann der Sector ſelbſt darauf angeſchraubt wird. Die drey Schrauben a a a in dem Stativ (Fig. 3) gegen der erſt gemeldeten Scheibe (Fig. 2) geben dem Sector die Lage nach dem Object, der Horizontalſchraube BC aber verſchaffet demſelben die Centralbewegung. Damit aber dieſe angezeigte Schrauben aaa keine Vertiefungen in dieſe Anrichtung hineindrücken können, ſo werden runde Platten von Meßing dazwiſchen an die Schrauben geſteckt.

§. 13. Das ganze Inſtrument, oder der Sector ſelbſt iſt übrigens von Holz, aber von einem ſolchen, welches beſonders hiezu ausgeſucht iſt. Man hat ſich zu dem Holze aus beſondern und guten Vorbedacht entſchloſſen, weil das, worauf hier das meiſte, ja alles ankommt, bey dem Holze, und mit demſelben weit ſicherer und beſſer zu erhalten iſt, als mit den Metallen. Denn alle Richtigkeit und Sicherheit dieſes Inſtrumentes hängt blos und allein von der beſtändig und unveränderlich richtigen Länge des Radius und der Scala ab. Ob nun gleich die Wärme und

Kälte, die Feuchtigkeit und Trockenheit der Luft mehr oder weniger auf das Holz einen Einfluß hat und wirket, ſo betrift die Veränderung, die dadurch entſtehet, doch nur die Dicke und Breite, in Anſehung der Länge aber iſt ſolche ſehr wenig oder gar nicht beträchtlich, zugleich aber iſt auch dadurch mehrere Bequemlichkeit verſchaffet worden, indem das Inſtrument jetzt ganz leicht iſt, und ohne große Mühe von einem Orte zu dem andern gebracht werden kann.

§. 14. Nach dieſer Beſchreibung des Sectors muß ich nun auch zeigen, wie man damit umgehen und denſelben gebrauchen ſolle. Ich habe hier den Radium in 5000 Theilen des Micrometers angenommen, welches zu mehrerer Bequemlichkeit dienet; denn man erhält dadurch den Vortheil, daß man die gefundene Zahl der Theile der Scala nur ſogleich in den Sinustabellen aufſuchen, und den daneben ſtehenden Winkel verdoppeln darf. Denn weil der Sinus eines jeden Winkels die halbe Chorde des gedoppelten Winkels iſt, wenn der Radius 10000. heißet: ſo iſt er hiedurch ſchon halbiert. Bey dieſem könnte es nun ſein Bewenden haben, und möchte in dieſem Falle gut ſeyn, wenn man ſich blos mit einzeln Minuten begnügte, oder wenn die Zahl gerade mit der Zahl des Sinus einträfe. Wenn aber die Zahl zwiſchen zwey Minuten einſchlägt, ſo iſt es alsdann nöthig den partem proportionalem für die ihm noch zugehörigen Secunden der nächſt daran ſtehenden kleinern Zahl zu erſetzen. Wenn man alſo z. E. auf der Scala 2137. 0 gefunden hätte, ſo findet ſich in den Sinustabellen bey 12°. 20′ = 2135. 9
bey 12°. 21 = 2138. 8

folglich iſt die erſtere Zahl zu klein und die letztere zu groß. Die Differenz zwiſchen beyden iſt 0002.9, und die Differenz zwiſchen der gefundenen 2137.0 und dem Sinus von 12° 20′ = 2135.9 iſt 0001.1. Alſo, wie ſich die Differenz von dem nächſt größern und nächſt kleinern Sinus oder 2.9 zu der Differenz von dem nächſt kleinern Sinus und dem gefundenen, das iſt 1.1 verhält: ſo verhält ſich auch eine Minute oder 60 Secund. zu dem Ueberſchuß 1.1, welches noch zu 12° 20′ hinzugethan werden muß. Da nun

$$2.9 : 1.1 = 60 : 22\tfrac{22}{29}$$

oder ungefähr 23 Secunden beträgt: ſo iſt 2137.0 der Sinus von 12°. 20′. 23″. Wird nun dieſer noch verdoppelt, ſo erhalte ich 24°. 40′. 46″ und zugleich die Chorde des geſuchten Winkels, welche dieſer Anzahl von Theilen gleich kommt, und damit übereinſtimmet.

§. 15. Damit man aber noch kürzer zu Werke gehen, und alles zum Gebrauch bequemer eingerichtet ſeyn möchte, ſo habe ich ſogleich die Chordentabelle hiezu auf den Radius von 5000 bis auf 30 Grade hinauf, und zwar von 10 zu 10 Secunden berechnet, und für diejenige, ſo dieſes Inſtrument verlangen, drucken laſſen. Durch dieſe Tabelle iſt nun alles ſehr leicht und bequem gemacht worden: denn man darf nur gleich die gefundene Anzahl von Theilen der Scala in dieſen Chordentafeln aufſuchen, ſo werden die oben und zur Seite ſtehende Zahlen die Grade, Minuten und Secunden anzeigen. Wenn ich alſo z. E. auf der Scala 1302.6 zählte, ſo wird dieſe Zahl 14° 58′ und 10″ anzeigen. Denn die letzte Zahl in dieſen Tafeln bedeutet allezeit die Zehendtheile von den Theilen der Scala, und muß alſo nothwendig geſchätzet werden. So ſtehet z. E. bey 4° 30′ die Zahl 392. 6, das iſt $292\frac{6}{10}$ bey 4°. 30′. 10″ findet man die Zahl 292. 8, das heißt $292\frac{8}{10}$ oder $\frac{4}{5}$ u. ſ. w.

§. 16. Weil die Intervalla dieſer Scala, welche von Scrupeln zu Scrupeln, oder $\frac{1}{120}$ eines franzöſiſchen Zolles fortlaufen, noch viermal durch das Ocularglas vergrößert werden; ſo iſt es noch gar wohl möglich, daß ein dazu gewöhntes Auge dieſe Decimaltheile ziemlich genau durch das Schätzen beſtimmen könne.

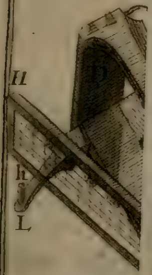
§.17. Will man ſich aber zu einer von dieſen Scalen, einer nur halb ſo langen Regel oder Geſtelles bedienen, deſſen Radius nämlich nur 2500 oder 20 Zoll und 10 Linien hält; ſo kann man einen Winkel von doppelt ſo vielen Graden damit meſſen, und es entſteht daraus alsdann ein Sextant, wenn die Scala auch 2500 faßt. Auch in dieſem Falle kann man die obengemeldte Chordentabellen nicht weniger gebrauchen, ſo weit ſie nämlich zureichen, weil ſie nur 30 Grade faſſen. Was aber darüber hinausgeht, muß man aus den Sinus Tafeln, ſo wie ſolches §. 14 gezeigt worden, zu erhalten ſuchen: nur muß man die gefundene Anzahl der Theile vorher duplieren, und ſodann ſolches Product in den Tabellen aufſuchen. Indeſſen laſſen ſich mit einem ſolchen Sector, der nur 20 Grade mißt, Winkel von 60 und noch mehr Graden durch Zwiſchenzeichen auf eben ſo ſichere und richtige Art beſtimmen, als wenn derſelbe eben dieſe Anzahl von Graden ſelbſt faßte: denn die Richtigkeit dieſes Inſtruments erſetzet alles, was ihm etwa auf der andern Seite abgehen möchte, auf eine recht befriedigende und vergnügende Weiſe.

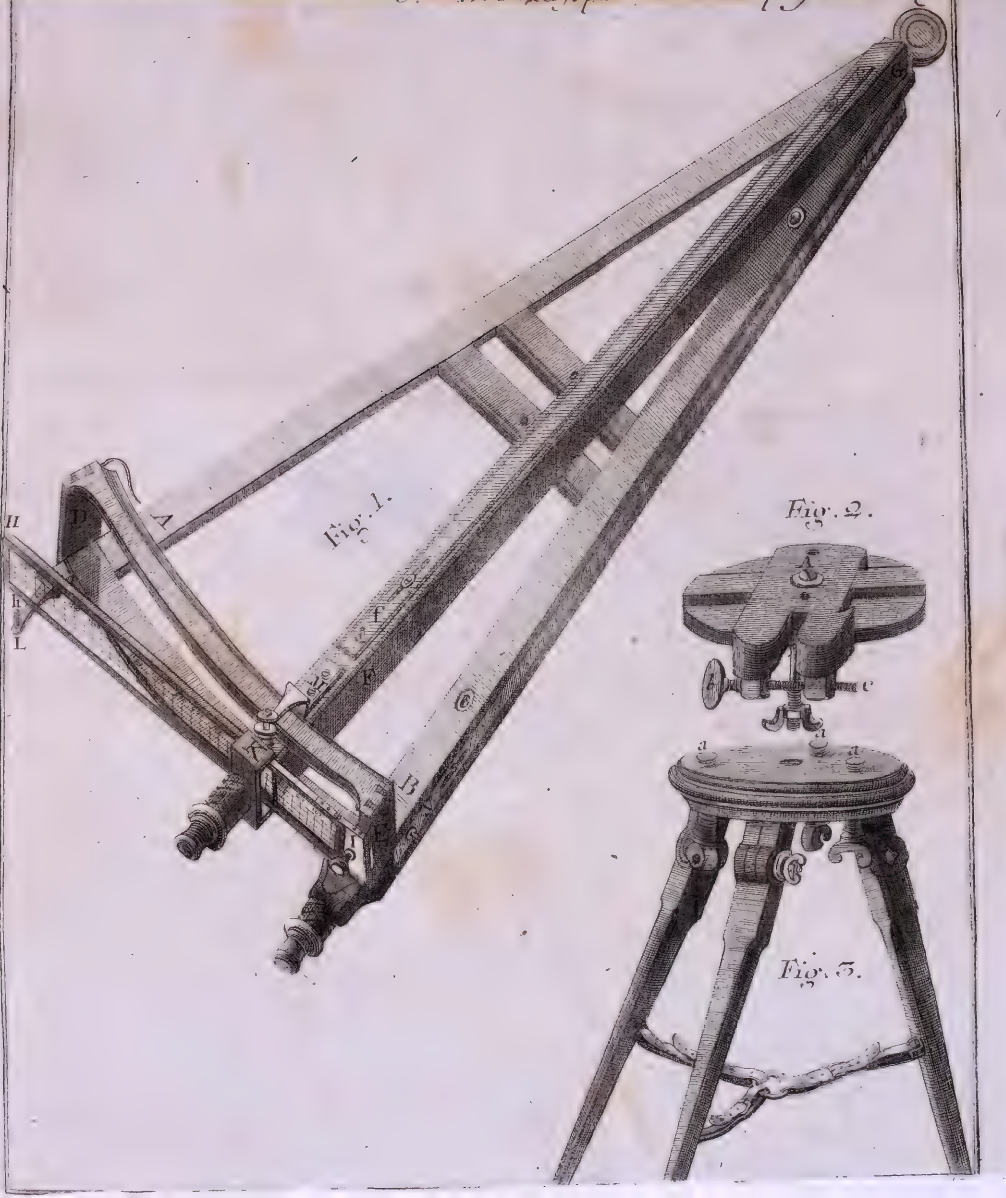
§. 18. Ehe man aber mit dieſem Sector zu operiren anfangen will, müſſen zuvorderſt die Ocularen an beyden Tubis nach dem Auge desjenigen, der damit obſerviren will, richtig geſtellet werden: das iſt, es muß das Ocular des obern beweglichen Tubus dergeſtalt geſetzet ſeyn, daß man die Theilung der Scala klar und deutlich dadurch ſehen könne. Wenn dabey ein gleiches Verhalten mit dem Objectivgla beobachtet, und daſſelbe ſo geſtellet wird, daß deſſen Bild ſich auf der Scala deutlich genug abmalet, und alſo Bild und Scala deutlich geſehen wird, ſo kann auch keine Parallaxis ſich äußern. Eben dieſes muß auch in Anſehung des unteren Tubus, welcher feſte ſtehet, beobachtet werden; an dieſem aber muß das ganze Ocularrohr herausgezogen werden, wenn man den Mikrometer, oder die Scala deſſelben, die innerhalb dieſem Rohre ſtehet, näher oder weiter von dem Ocular bringnn will.

§. 19. Nicht weniger muß man auch unterſuchen, ob der Faden in dem Focus, der nicht nur den Radius beſtimmet, ſondern auch die Theilung auf der Scala bemerket, ſenkrecht, und mit demſelben parallel ſtehe. Dieſes läßt ſich auf folgende Weiſe gar leicht erfahren, wenn man dieſen Faden an einen langen Strich der Scala z. E. bey 50, 100 ꝛc. hinführet, und zuſieht, ob er mit jenem parallel ſtehe. Fehlt es einigermaſſen hieran, ſo befindet ſich zu der Seite des Tubi eine Oeffnung, wo man ihn vermittelſt eines Stifts in Ordnung bringen, und gehörig richten kann.

§. 20. Dieſer untere unbewegliche Tubus N, dienet bey geometriſchen horizontalen Meſſungen dazu, das Ziel zu halten, wenn man indeſſen mit dem obern Tubus nach dem anderen Ziel geht, damit inzwiſchen nichts verruckt oder verſchoben werde. Daher muß man auch nothwendig wiſſen, wie jener mit dieſem zutrift. Dieſes zu erfahren, führet man den oberen Tubus auf das Zero der Scala, und ſieht nach einem ziemlich entfernten Objecte, ſo daß deſſen Bild auch in das Zero zu ſtehen kommt, und von dem Faden bemerket wird. In dieſem unverrückten Stand beobachtet man hierauf, wohin eben dieſes Bild auf der untern Scala in dem unbeweglichen Tubus N hintrift; geſchieht es, daß es ebenfalls auf die Mittellinie zutrift, ſo iſt derſeble mit dem obern vollkommen parallel: füget es ſich aber, daß es auf der rechten oder linken Seite der Scala abweicht, ſo darf man nur dieſen Abſtand merken, und ſich ſodann bey den fernerweitigen Operationen darnach richten, denn dieſe Scala lauft in eben den Theilen, und vollkommen mit dem obern parallel fort. Was ich hier von horizontalen Winkelmeſſungen geſagt habe, das findt eben ſowohl auch bey den verticalen ſtatt. Man ſieht alſo hieraus ganz leicht, daß dieſer Sector eines der einfacheſten und allerrichtigſten Inſtrumente iſt, deren man ſich bedienen kann, Winkel damit zu meſſen, indem man dabey ſchon das Maaß des Winkels vor Augen hat, ohne es erſt aus den mancherley Theilungsarten des Limbus ſchätzen und folgern zu dörfen.

§. 21. Ich habe bishero gezeiget, wie man ſich dieſes Inſtrumentes zu geometriſchen Meſſungen bedienen ſolle: nun ſollte ich noch melden, was dieſer Sector in der Aſtronomie, beſonders wenn er auf parallactiſche Maſchinen angerichtet wird, vorzügliches leiſten könne: da aber der berühmte und gelehrte Herr Profeſſor Lambert ſolches ſchon in ſeinen Anmerkungen zum Theil gezeiget hat, ſo bleibt mir nichts übrig, als noch zu melden, daß Liebhaber mit dergleichen Sectors mit und ohne Stativ, ſo richtig als es nur möglich iſt, von mir bedienet werden können, übrigens aber meine Bemühungen ihrer Gewogenheit und Liebe zu empfehlen.


H
h
L


C
Fig. 1.
A
D
H
h
L
K
f
F
B
E
I
Fig. 2.
A
b
c
a
a
a
a
Fig. 3.

Georg Friedrich Branders

Beſchreibung

einer
ganz neu verfertigten

Libelle

oder

Nivellierwage,

welche ohne Senkbley iſt, und nicht nöthig hat
aufgehängt zu werden, auch viele Vorzüge
vor den bisher gewöhnlichen hat.

§ 1.

Es iſt denjenigen, welche ſich der bisher gewöhnlichen Waſſerwagen bedienet haben, aus der Erfahrung zur Genüge bekannt geworden, daß dieſe Inſtrumente noch ſehr viel mangelhaftes an ſich haben, ſo daß man damit nicht ſicher genug, oder wenigſtens nicht allzubequem hat operiren können. Ich habe daher allem dem, was man daran noch verbeſſert zu ſehen wünſchte, durch dieſe nun zu beſchreibende Libelle abzuhelfen und ſie ſo herzuſtellen geſucht, daß ich mir ſchmeicheln darf, den Beyfall der Kenner damit zu erhalten. Denn ſie unterſcheidet ſich von allen übrigen Arten, die mir bisher bekannt worden ſind, zuvörderſt darinnen, daß ſie auf eine ſehr bequeme leichte und einfache Art in einem Zimmer berichtiget und bey jeder Witterung, ſie mag beſchaffen ſeyn, wie ſie immer will, ſicher damit operiert werden kann: wo hingegen die bisher gewöhnlichen Waſſerwagen bey der geringſten un-

unſtäten Witterung oder Bewegung der Luft ohne Nutzen ſind, und nicht gebraucht werden können, weil man ſie niemal zum ſtillſtehen oder zur Ruhe bringen kann, wie viele Anſtalten man auch dagegen vorkehre.

§ 2. Es iſt kein geringer Vorzug dieſes Inſtrumentes, daß es nicht nur den Niveau ſicher und richtig beſtimmet, ſondern auch ſogleich die überzeugende Probe der damit vorgenommenen Operationen an die Hand giebt. Hierzu kommt noch die Bequemlichkeit bey dem Gebrauche deſſelben, da daſſelbe kein beſonderes Stativ, oder Fußgeſtelle nöthig hat, ſondern überall hin auf einen Tiſch oder auf jeden Feldmeßtiſch kann geſetzet werden.

§ 3. Endlich können auch damit vermittelſt des in Tubo dioptrico angebrachten Glasmicrometers alle in Campo über und unter der Waſſerlinie erſcheinende Gegenſtände in der erſten Minute beſtimmet, durch den äußern Schrauben aber vermittelſt ſeiner Zifferſcheibe und Index bis von 3 zu 3 Secunden erhalten werden. Dieſes ſcheinen mir in der That Vortheile zu ſeyn, die wichtig genug ſind, dieſem Inſtrumente den Vorzug vor den bisher gewöhnlichen beyzulegen.

§ 4. Ich will aber nun ohne längere Ausſchweifung zu der nähern Beſchreibung dieſes Inſtrumentes ſelbſt fortgehen, welches, ſo wie es zum Gebrauch ſtehen muß, Tab. III. vorgeſtellet iſt. Man kann bey demſelben eigentlich vier Stücke wahrnehmen, woraus es zuſammengeſetzet iſt. Das erſte iſt der dioptriſche Tubus A. Das zweyte die Glasröhre, die mit Spiritus gefüllt iſt B. Das dritte die bewegliche Regel EF mit den beyden Supports CC oder dem Lager des Tubus A. Das vierte endlich iſt das Fußbret D, von welchen Stücken, oder Theilen allen ich nun eine genaue Beſchreibung ertheilen will.

§ 5. Was nun alſo erſtlich den dioptriſchen Tubus A betrift, ſo iſt ſolcher ein hohler, gleichweit gebohrter Cylinder, der über ſeine innere Höhlung dergeſtalt abgedreht worden, daß theils ſeine äußere Oberfläche mit jener parallel iſt, theils aber und ins beſondere, daß die auf beyden Seiten befindliche Anhöhen aa, wo ſie in den Supports aufliegen und dieſelben berühren, nicht nur vollkommen rund, ſondern auch von der möglichſten gleichen Dicke ſind, weil auf dieſer genauen Richtigkeit alle Sicherheit des Inſtrumentes beruhet.

§ 6. An dem einen Ende dieſes Tubus A, iſt eine Kapſul, welche das Objectivglas enthält, eingeſteckt. Dieſe kann nach Erfordern der Umſtände, und wie man will, vermittelſt der vier dabey angebrachten Stellſchrauben hin und her geſchoben werden, wovon ich hernach weiter unten das mehrere ſagen werde. An dem andern Ende dieſer Röhre iſt noch ein anderes Rohr mit dem Ocularglas und Glasmikrometer eingeſchoben welches letztere noch eine beſondere und eigene Röhre hat, die in jene eingeſteckt iſt. Auf dieſen beyden, ſowohl auf der inneren Micrometer als auf der äußern Ocularröhre iſt an ihrer äußern Oberfläche ein Maßſtab in den Theilen des Micrometers gezeichnet, damit man hiedurch nicht nur den wahren Radius von den weiten ſowohl als von den nahen Diſtanzen oder Abſtänden erhalten, ſondern auch das Micrometer ſelbſt ohne große Schwierigkeit für das Ocularglas ſo ſetzen könne, wie es ein Mjops oder Presbyta nöthig hat, wenn er anders deutlich ſehen ſolle. Wenn man daher dieſen erforderlichen Abſtand des Micrometers vom Ocular nur einmal für ſein Aug gefunden hat, ſo bleibt ſolcher hernach auch beſtändig und unveränderlich für eben dieſes Geſicht, und man darf ſolches nur wieder auf das bekannte Zeichen ſchieben. Was aber das Ocularrohr, in welchem die Micrometerröhre ſtecket, betrift, ſo iſt ſolches in dem Tubus A ſelbſt beweglich, und dieſes muß ſich nach der Deutlichkeit des Bildes, je nachdem es von einem weiten oder nahen Gegenſtand herrühret, richten, wo die darauf angebrachte Scala ſodann den Unterſcheid deſſelben bemerket.

§ 7. Dieſes Glasmicrometer iſt bey Fig. 2. gezeichnet zu ſehen, wiewohl ſolches hier merklich größer zu erblicken iſt, als es in der That ſelbſt ausſieht, weil es wegen ſeiner von allen Kennern bewunderten Feinheit in ſeiner eigentlichen Größe in Kupfer nicht auszudrücken und vorzuſtellen iſt.

§ 8. Es beſteht dieſes Micrometer alſo aus einer runden Glasplatte, auf welcher zwey parallele und ohngefehr $\frac{2}{3}$ einer franzöſiſchen Linie von einander entfernte Meßleitern gezeichnet ſind, ſo daß deren Intervalla rechts und links eine Diſtanz von 2 zu 2 Minuten beſtimmen. Die eine davon lauft von 0 der Horizontallinie über und unter ſich alſo fort, 0, 2, 4, 6, 8 ꝛc. Die andere aber, 0, 3, 5, 7, 9 ꝛc. Daher wird auch jeder Strich der zweyten zwiſchen der erſtern eintrefen und durch dieſe Abtheilung eben ſo viel erhalten werden, als wenn man dieſe Scala in einzele Minuten eingetheilet hätte, die aber wegen der Enge und Feinheit dem Auge ſehr mühſam würden zu ſchätzen geweſen ſeyn. Man darf alſo hier nur das Bild zu einer oder der andern Scala führen, ſo wird dieſe, welche zutrift, ſodann den wahren Werth angeben. Stünde z. B. das Bild zwiſchen dem dritten und vierten Intervallum, das iſt zwiſchen 6 und 8 Minuten, ſo führe man ſolches zu dem andern, ſo wird es ſich bald zeigen, ob es mehr oder weniger als 7 Minuten iſt. Man ſiehet alſo hieraus, daß es eben dieſes iſt, was man ſonſt durch einzelne Minuten würde erhalten haben, ob es gleich auf dieſe angezeigte Art weit ſicherer und leichter wird.

§. 9. Es iſt noch auſſer dieſem eine Hauptabſicht dieſer gläſernen Meßleitern, daß man hiedurch theils den Schraubenmikrometer E prüfen und rectificieren, theils aber damit, wenn der Tubus in der Waſſerlinie liegt, den Horizont erforſchen, oder beſtimmen könne, wie viel die Objecte, die in dem Campus ſichtbar ſind, höher oder tiefer als derſelbe liegen, ohne den Tubus aus ſeiner Lage zu bringen.

§. 10. Ueberhaupt aber kann man vermittelſt eines ſolchen Glasmicrometers mit einer ſolchen Schärfe zu Werke gehen, welche ſonſt auf keinerley andere Weiſe zu erreichen möglich wäre. Dieſes verurſachet die auſſerordentliche Feinheit dieſer Scala: denn der Horizontalſtrich, ſo wie auch alle übrige in der ganzen Theilung ſind nicht dicker als der dreyßigſte Theil eines Scrupels, dabey aber dennoch ſo ſcharf und ſichtbar, daß ſie ſehr leicht zu unterſcheiden ſind. Hingegen aber iſt der Unterſchied bey den ſonſt gewöhnlichen ſehr merklich in die Augen fallend, denn der allerzärteſte Silberdraht, welchen man ſonſt hiezu genommen hat, würde $\frac{4}{5}$ eines ſolchen Scrupels, folglich 24 Secunden bedecken, nicht einmal zu gedenken, daß ſie ſich ſehr gerne krümmen und ſchlapp werden, dagegen die Gläſer immerdar in einem unveränderlichen Zuſtand verbleiben, und ihnen kein Zufall ſo leicht Schaden bringen kann.

§. 11. Der zweyte Haupttheil dieſes Inſtruments iſt die Röhre B, welche mit Spiritus oder Weingeiſt, und zwar ſo weit gefüllet iſt, daß noch eine Luftblaſe darinn zurückgelaſſen worden, welche durch ihre Bewegung und Stilleſtehen den Niveau beſtimmen muß. Dieſe hängt vermittelſt einer Charniere an dem Tubus auf der einen Seite: an dem andern Ende deſſelben aber wird ſie vermittelſt einer Spiralfeder gegen eine Schraubenmutter gedruckt. und dieſes deswegen, damit man ihr hiedurch den parallelen Stand mit dem Tubus A, oder vielmehr mit ſeiner Axe geben könne.

§. 12. Da aber die Luftsblaſe in dieſer gläſernen Röhre nicht immer einerley Länge behält, ſondern in der Wärme kürzer in der Kälte aber länger wird, wie ſolches nothwendig geſchehen muß, und wovon die Urſachen aus der Naturlehre gar leicht beygebracht werden könnten, wenn wir nicht vermuthen müßten, daß ſolche einem Kenner derſelben ſogleich ſelbſt einfallen werden: ſo habe ich auch deswegen die Länge der Luftblaſe bey der mittelmäßigen Temperatur der Luft mit zwey Seidenfaden bemerket. Wird alſo die Luftblaſe bey wärmerer Witterung kürzer, ſo muß ſie allezeit zwiſchen dieſen zwey Faden zu ſtehen kommen, und zwar ſo, daß beyde Ende derſelben gleich weit davon abſtehen: wird ſie aber bey kälterer Luft länger, ſo muß ſie auf beyden Seiten gleich weit über dieſelben hinausgehen.

§. 13. Die übrigen Theile dieſes Inſtruments ſind noch die bewegliche Regel mit den zweyen Supports und das Fußgeſtelle oder Bret D: Auf der Regel F C E ſelbſt ſind zwey vollkommen ſenkrechte Stücke oder Supports C C, die wie ein Y geſtaltet ſind, und in welche der Tubus A jederzeit zu liegen kommt. An dem einen Ende bey F iſt dieſe Regel zwiſchen zween Backen beweglich, an dem andern Ende aber bey E kann ihr vermittelſt eines feinen Schraubens eine Erhöhung von 6 bis 8 Graden ungefehr gegeben werden, Die Anrichtung für dieſen Schrauben beſtehet oben an der Regel bey E aus einer Zifferſcheibe, welche an derſelben, ſo wie die Mutter unten an dem Fußbret beweglich iſt. Durch dieſe geht der Schraubenhals hindurch, und an demſelben iſt ein Zeiger angeſteckt zu ſehen, vermittelſt deſſen man die innern Theile einer Revolution auf der Zifferſcheibe, die in 60 gleiche Theile vertheilt iſt, bemerken kann. Zu dieſem Ende iſt auch der Radius dieſer Regel F E auf das ſorgfältigſte beſtimmet worden, ſo daß eine Revolution dieſes Schraubens genau 6 Minuten mißt. Weil nun die Zifferſcheibe in 60 Theile getheilt worden, ſo iſt folglich $\frac{1}{60}$ ſo viel als 6 Secunden, und weil dieſe Theile noch ziemlich groß ſind, ſo können durch das Schätzen noch kleinere Theile als 3 Secunden, wobey die Luftblaſe noch immer einen Ausſchlag giebt, erhalten werden, welches in der That alles iſt, was man beynahe zu erreichen wünſchen kann.

§. 14. Dieſes wird, wie ich hoffe, hinreichend ſeyn, um ſich einen richtigen Begriff von der Beſchaffenheit und Zuſammenſetzung dieſer Waſſerwage zu machen. Die Gründe, worauf dieſelbe beruhet, hier anzuführen, würde theils zu weitläuftig werden, theils müſſen ſie einſichtsvollen Kennern der Mathematick wenig Mühe machen, ſolche einzuſehen. Ich laſſe alſo dieſe mit gutem Bedacht zurücke, und werde mich nur noch bemühen, zu zeigen, wie dieſes Inſtrument zu dem Gebrauche ſelbſt gehörig müſſe rectificirt werden. Dazu ſind nun zweyerley Arbeiten oder Richtungen und Stellungen deſſelben nöthig. Erſtlich muß die

Axe des Objectivglaſes ſehr genau in die Mitte des Tubus A zu ſtehen kommen, und mit ſeiner äuſſeren Rundung a a parallel gemacht werden; Zweytens aber muß auch hernach die gläſerne Röhre B mit jener parallel geſetzet werden.

§. 15. Um nun das erſte zu bewerkſtelligen, und dieſe Arbeit mit gehöriger Richtigkeit vorzunehmen, muß man mit dem dioptriſchen Tubus A, ſo wie er auf ſeinen Supports liegt, ohne daß man jetzt noch nöthig hat, ſeine Aufmerkſamkeit auf die gläſerne Röhre B zu richten, nach einem entfernten Objecte z. E. einem Thurnknopf ꝛc. hinzielen, und zwar dergeſtalt, daß ſein Bild durch die mittlere Horizontallinie des Micrometers durchgeſchnitten wird, welches auch vermittelſt des Schraubens C gar leicht kann erhalten und zuwege gebracht werden. Iſt man damit zu Stande gekommen, ſo wendet man den Tubum A in ſeinen Supports das Untere über ſich, ſo das die Glasröhre B oben über dem Tubus A zu liegen kommt, und ſieht ſogleich wieder nach dem vorigen Objecte. Findet es ſich, daß das Bild an dem nämlichen Orte des Micrometers erſcheint, wo es ſich bey dem erſten Durchſehen gezeiget hat, ſo iſt es gut, und hat ſeine völlige Richtigkeit. Iſt es aber verändert, und das Object erſcheint höher oder niedriger als vorher, ſo hilft man dieſem ab durch das hin und herſchrauben des Objectivglaſes, vermittelſt der 4 zu dieſem Ende angebrachten Stellſchrauben, welches ſo lange unter beſtändigem und wiederholtem Umwenden des Tubus fortgeſetzet wird, bis man endlich damit zu Stande gekommen, und das Object in beyden Fällen gleich eintrift. Die ſicherſte und gewiſſeſte Probe hievon iſt dieſe, wenn das Bild, man mag gleich den Tubus in ſeinen Supports rund um ſeine ganze äuſſere Peripherie drehen, wie man will, dennoch allezeit in dem Mittelpunkte des Micrometers erſcheint, und niemals davon abweicht.

§. 16. Wenn dieſe Arbeit geſchehen, ſo geht man zu der zweyten fort, und ſuchet der gläſernen Röhre B ihren parallelen Stand mit dem Tubus A zu geben. Bey dieſer Beſchäftigung hat man kein gewiſſes Object nöthig, ſondern es kann ſolches im Zimmer auf jedem feſtſtehenden Orte oder Tiſche vorgenommen werden, wie ich ſogleich dieſes beſchreiben will.

Man ſchraubet nämlich anfangs die gläſerne Röhre, ſo viel nach dem Augenmaße möglich iſt, mit dem dioptriſchen Tubus parallel, und leget ihn ſodann wieder in ſeine Supports hinein. Hierauf ſchraubet man bey C die ganze Regel mit beyden Röhren ſo lange hoch oder niedrig, bis die Luftblaſe der Röhre in ihre Schranken zwiſchen den beyden Seidenfaden gebracht worden iſt, und bemerket zugleich den Ort, wo der Index auf der Zifferſcheibe ſtehet; oder noch beſſer, man bringt das Zero der Zifferſcheibe an den Zeiger, oder auch den Zeiger auf jenes: ſodann leget man den Tubus A in den Supports um, ſo daß, wo vorher das Objectivglas nach E geſehen, ſolches nun nach F zugerichtet iſt. In dieſer Lage wird nun die Luftblaſe nothwendig aus ihren erſtern horizontalen Stand gewichen ſeyn. Man ſchraubet alſo wieder bey C vor- oder ruckwärts, bis ſolche wieder ihren vorigen Platz einnimmt, bemerket aber auch zugleich ſorgfältig, wie viele Revolutionen erfordert worden, bis dieſes erhalten worden iſt. Mit der Helfte dieſer gefundenen Revolutionen wird ſodann wieder zurückgeſchraubt, und dasjenige, was noch daran fehlet, mit der Schraubenmutter unter der Spiralfeder der gläſernen Röhre erſetzt, bis die Luftblaſe auf ihrem gehörigen und beſtimmten Platze ſtehen bleibt. Ich will ſolches durch ein Beyſpiel deutlicher und begreiflicher machen. Geſetzt, ich hätte im erſten Falle 6 und $\frac{6}{60}$ Revolutionen bekommen, bis die Luftblaſe zurechte geſtanden; ſo ſchraube ich $3\frac{3}{60}$ Revolutionen wieder zurücke, und erſetze dieſe Helfte durch vorhin gemeldete Schraubmutter der Glasröhre B, ſo werde ich meinen Endzweck gewiß erreichen. Nur iſt noch nöthig, daß man bey dieſer Richtung nicht gleich mit dem erſten Verſuch zufrieden ſey, ſondern durch öfters Umwenden und Umlegen ſich gehörig von der Richtigkeit deſſelben verſichere, indem ſich dabey noch öfters einige Differenzen zeigen, die aber immer kleiner gemacht, und auf die angezeigte Art verbeſſert werden müſſen.

§. 18. Wenn dieſes alles nun ſo weit in gehörige Richtigkeit gebracht worden iſt, ſo kann man hierauf mit dem Operiren ganz ſicher fortfahren; man muß auch nicht vergeßen, daß man ſich, ſo oft man eine neue Operation vornehmen will, der parallelen Lage dieſer Röhre durch das Umlegen derſelben auf das neue verſichere. Ferner ſoll vorher noch, ehe die erſte Richtung mit Berichtigung der Axis oder Lineæ fiduciæ vorgenommen wird, die Scala des Micrometers nach dem Auge des Beobachters gehörig geſtellet ſeyn; das iſt, ſie ſolle in der rechten Entfernung vom Augenglaſe, wo ſie am deutlichſten geſehen wird, zugleich aber auch genau in dem Brennpunkte des Objectivglaſes ſtehen, ſo, daß Bild und Scala gleich deutlich geſehen werden, woferne keine Parallaxis entſtehen ſolle, wiewohl ſolche gar leicht entdeckt würde, wenn mit dem Auge vor dem Diaphragma eine Bewegung hin und her gemacht, und eine Abweichung des Bildes vom Striche bemerkt wird. Noch merklicher aber wird es, daß das Bild und die Scala des Micrometers nicht zuſammen paſſen, wenn man die vordern Capſul von dem Augenglaſe wegnimmt, und ſolches frey und ganz offen läßt. Denn in dieſem Falle wird ſich das Bild bewegen, ſobald man das Auge beweget, und dieſes wegen der Vergröſſerung des Augenglaſes ſowohl als deſſen Campus nur deſto merklicher.

§. 19. Der Beweis davon iſt dieſer: Es ſeye (Fig. 3 Tab. III) das Objectivglas, A das Augenglas, wenn nämlich die vordere Capſul abgenommen iſt, M das Micrometer, das Bild, ſetze man, falle in I, folglich hinter das Micrometer M, ſo iſt, wenn man auch das Object oder vielmehr das Bild deutlich ſieht, A zu weit, und O zu nahe bey M. Iſt nun das Aug in der Axe des Tubus, ſo trift der Punkt i auf m, und man ſieht daher i deutlich, m aber undeutlich, Iſt hingegen das Aug in o, ſo ſehe ich zwar, wie vorhin i in i, aber nicht mehr auf dem Punkte m der Scala, ſondern viel höher in n, und ſo iſt alſo der Winkel A i o das Maß der Paralaxis. Dieſer Winkel iſt ſodann deſto größer, je größer A o und je kleiner A i iſt. Der Effect aber, der eigentlich geſehen wird, iſt die Diſtanz n m. Es iſt aber

$$n\,m = \frac{i\,m .\ A\,o}{A\,i}$$

demnach wächſt ſie zugleich mit i m, i n. Und da das Augenglas merklich vergrößert, ſo wird n m auch bald ſehr merklich groß, wenn i und m nicht genau zuſammen treffen. Aus dieſem jetzt gemeldeten Umſtande, glaube ich, laſſen ſich viele Klagen erklären, welche man ſchon lange, und von Zeit zu Zeit überhaupt über die Micrometer geführet hat.

§. 20. Endlich muß ich noch gedenken, daß an das Fußbret D noch eine Schiene, oder ein meßingenes Lineal, und zwar parallel mit der Axe angeſchraubt iſt, damit man eine Bouſſole (Fig. 4) daran anſchieben könne.

Nun möchte man zwar von mir noch fordern können, daß ich zeigen ſollte, wie man mit dieſem Inſtrumente umgehen, und daſſelbe gebrauchen ſolle; allein, da ſolches in **Picarts Abhandlung von Waſſerwägen**, wovon Herr Profeſſor Lambert in Berlin eine neue mit wichtigen Beyträgen bereicherte Ausgabe beſorget, und wo er auch dieſer jetztbeſchriebenen neuen Art von Waſſerwagen ausdrücklich gedenken wird, ſchon zur Genüge und deutlich genug abgehandelt iſt, ſo habe mich damit nicht weiter aufhalten wollen, ſondern laſſe es bey der bloßen Beſchreibung dieſes Inſtruments bewenden, und will begierige Leſer auf jetztgemeldete Abhandlung verwieſen haben.

BRITISH MUSEUM 05 NOV 1934

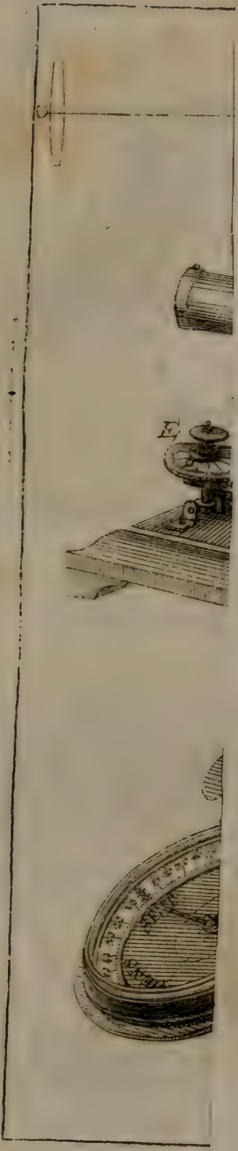

C
E

Fig. 3.

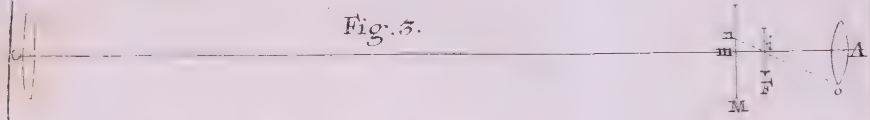
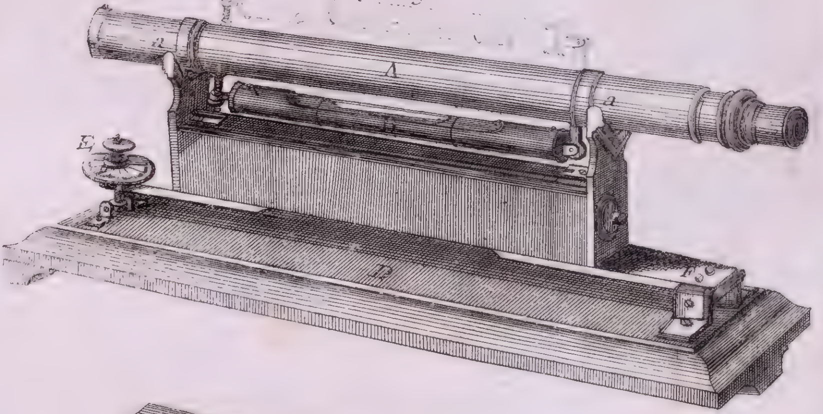


Fig. 1.



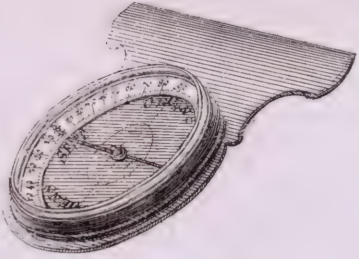
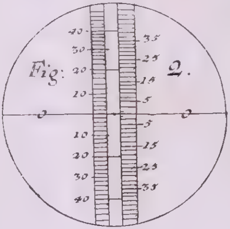


Fig: 2.


40
30
20
10
0
10
20
30
40
35
25
15
5
0
5
15
25
35

Regiſter

der merkwürdigſten Sachen im fünften Bande der philoſophiſchen Abhandlungen.

Achteck (reguläres) wie es durch Parallellinien in gleiche Theile zu theilen. 170. 173.

Æquator, wie ſeine Projection zu finden. 126.

Æquinoctium (Frühlings-) wie es im corrigirten Kalender zu finden. 300. u. f. wird im gregorianiſchen Kalender ewig auf den 21 März figirt. Eben daſ. Æquinoctial Tafel 305. 359. Fällt nach dem gregorianiſchen Kalender zuweilen auf den 19, und zuweilen auf den 23ten März 307. Bleibt aber nach dem corrigirten beſtändig am 20ten eben daſ. Wie es im corrigirten Kalender nach combinirten Zirkeln zu beſtimmen. 358. u. f. Dieſe Equinoctia ſind nur mittlere 386.

Aerze, geringhaltige, wie ſie zu ſcheiden und aufzubereiten. 225. u. f.

Aerzſtuffe, reiche und arme, was ſie ſeyn. 228.

Aerzwäſchen ſind zweyerley Sieb- oder Setzwäſche, und Herdwäſche. 249.

Algebraiſche Rechnungen, nehmen allezeit die Einheit als poſitiv an. 12.

Ambroſius (Heil.) irret ſich in Beſtimmung des Oſterfeſts für das Jahr 387. und warum. 346. 374.

Araber, ihre Grundſätze von den Anfangsgründen der Körper. 268.

Arſenicalweſen, was es ſey. 272.

Register.

Aſtronomiſches Sonnenjahr ſiehe tropiſches Sonnenjahr.

Auflöſung des Zinks im Salzſauren. 257.

Auguſtinus (Heil.) wird am Charſamſtage An. 387. getauft. 345.

Balſamum Samech, was es ſey. 260.

Bechers Lehrſätze von den Anfangsgründen der Körper. 270.

Branders (Georg Friedrich) Erfindung neuer Glasmikrometer 413. u. f. Eines neuen dioptriſchen Sectors. 437. u. f. Einer neuen Nivilierwage. 451. u. f.

Brenbare, findet ſich in dem ganzeu Naturreiche 261. woraus es beſtehe. Ebend.

Durchlaßgräben bey Bergwerken. Siehe Schlemmgräben.

Einſchaltungsart im neuen corrigirten Kalender. 291. Kömmt beynahe mit der Gelaleiſchen oder Perſianiſchen überein. Ebendaſ.

Epactentafel (Monds=) für den corrigirten Kalender. 319. 365. 408. Die Gregorianiſche fehlen zuweilen um einen ganzen Tag. 290.

Epochentafel, nach einer neuen Periode. 391.

Eiſen, deſſen Härte, wo ſie herkömmt. 275.

Erde, wie ihre Figur aus den Beobachtungen des Monds zu beſtimmen. 197. u. f.

Erde, halbflüchtige ſulyhuriſche iſt die allgemeine anziehende. 264.

— — alcaliniſche. Sieh Merkurialerde.

Eulers, (J. Albrecht) Auflöſung einiger geometriſchen Aufgaben. 165.

— — Verſuch die Figur der Erde durch Beobachtungen des Mondes zu beſtimmen. 197. u. f.

— — Nachricht von einer magnetiſchen Sonnenuhr. 215. u. f.

Exponenten der Verhältniſſe, Begriff davon. 25. u. f.

Flächen (geradlinichte) wie ſie durch Parallellinjen in gleiche Theile zu theilen ſeyn. 167.

Fundamentalebene nnd Fundamentallinie, was ſie in der Projection der Kugel ſeyn. 114.

Geometrie, ihre Uebereinſtimmung mit der Analyſi. 49.

Gradirwaſſer zu Auflöſung der Metalle. 257. u. f.

Größe (unmögliche) was ſie ſey. 15.

Herdwäſche bey Sonderung der Aerze, wie ſie anzuſtellen. 250. u. f.

Hyberbel ſtellet ein Logarithmenſyſtem vor. 5. 50. u. f.

— — ihre Quadratur. 72.

Kalenderform, Entwurf einer neuen von Peſ. von Oſterwald. 282. u. f.

Kalender (corrigierter) in was für Jahren er eingeführet werden könne, 330. wie er auf den Julianiſchen und Gregorianiſchen zu reduciren. 335. u. f. Wie nach dieſem Syſtem die weſentliche Stücke des Kalenders auch für die Jahre vor Anno 1600. zu beſtimmen. 343. u. f. 370. u. f.

Kalender (corrigierter) von combinirten Zirkeln. 349. u. f. Wie darinnen die Sonntagsbuchſtaben zu finden. 351. u. f. Wie das Æquinoctium darinnen zu beſtimmen. 358. u. f. Desgleichen der öſterliche Vollmond. 364. u. f.

Kalender (Gregorianiſcher) deſſen Fehler und Mängel. 288. In Anſehung des Æquinoctii. 289. In Anſehung der Epacten. 290. Verfehlet gar oft das wahre Oſterfeſt. Eben daſ. Wie er auf den corrigierten zu reduciren. 335. u. f. 369. u. f. 398. u. f.

Kalender (Julianiſcher) wie er auf den corrigierten zu reduciren. 339. u. f. 369. u. f. 378. Ob das erſte Jahr deſſelben ein Schaltjahr geweſen. 382. 393. u. f.

Kalender-Streitigkeiten zur Zeit der Einführung des proteſtantiſchen ſogenannten verbeſſerten Kalenders. 286.

Karſten (Johann Guſtavs) Abhandlung von Logarithmen verneinter Größen. 1. u. f. Thtorie von den Projectionen der Kugel. 109. u. f.

Körper, ihre Anfangsgründe, Abhandlung davon. 253. u. f.

— — neun Arten derſelben. 265. ihre nächſten Anfänge 267. wie einzelne entſtehen. Eben daſ.

Kugel, von ihren Projectionen. 109. u. f.

Libelle, ſiehe Nivellierwage.

Logarithmen verneinter Größen, Abhandlung davon. 1. u. f. Eulers Tractat hierüber. 4. Alemberts Widerlegung. Eben daſ.

— — drücken die Verhältniſſe aus. 19. haben eine nothwendige Verbindung mit ihren Zahlen. 20.

— — negativer Größen ſind unmöglich. 31. u. f.

Logarithmenſyſteme verſchiedene. 21. ihre Theorie. Ebendaſ. u. f. von möglichen Logarithmen negativer Zahlen. 38. u. f.

Magnetiſche Sonnenuhr, Beſchreibung davon. 215. u. f.

Materie, flüchtige und fixe der Körper. 257.

Mercurius, wie er aus den Metallen zu erhalten. 259.

Mercurialrede, woraus ſie beſteht. 277.

Mercurialiſches Waſſer. 258.

Meridian, wie deſſen Projection auf der Kugel zu finden. 127. 130. 147. 151.

Metalle enthalten ſalz= ölicht= und wäſſerichte Theile. 257.

Mikrometer auf Glaſe. Branders Erfindung derſelben. 413. u. f. Mayeriſche. 415. u. f. warum die Branderiſchen weit vorzuziehen. 416. u. f. Ihre Verſchiedenheit. Eben daſ. Wie damit die kleinſten Objecta gemeſſen werden. 419. was ſie für trefliche Dienſte in der Geometrie leiſten. 423. u. f.

Mond, wie aus deſſen Beobachtungen die Figur der Erde zu beſtimmen. 197. und f.

Multiplication (algebraiſche) Regeln davon. 12.

Nachtgleiche, ſiehe *Æquinoctium*.

Nicäniſches *Concilium*, wie ſelbiges den öſterlichen Vollmond zu beſtimmen verordnet habe. 286.

Nivellierwage (neue) Brauders Erfindung derſelben. 451. u. f., Ihr Vorzug vor allen ander bisher erfundenen. 453. u. f. Beſchreibung davon 454. u. f. Gebrauch deſſelben. 459. u. f.

Oſterfeſt, warum es bey den Juden niemal auf einen Sonntag fällt. 216. wie es in corrigirten Kalender zu beſtimmen ſey. 317. u. f.

Oſterwald (Petr. von) Entwurf einer neuen Kalenderforme. 282. u. f.

Paraboliſche Fläche, wie ſie durch Parallellinien in gleiche Theile zu theilen. 188. u. f.

Paracelſus (Theophraſtus) ſtatuiret andere Anfangsgründe der Körper als die Araber. 269.

Parallelkreis, wie deſſen Projection auf der Kugel zu finden. 135. 137. 153. 159.

Periode, Eine ganz neue nach dem corrigirten Kalenderſyſteme. 388. u. f. warum ſie der Julianiſchen weit vorzuziehen. 389. 409.

Phosphorus, woraus er bereitet werde. 261.

Planen, was ſie bey Bergwerken bedeuten. 252.

Pochhaufwerke, wie ſie auszutragen. 238.

Pochgräben, was ſie ſeyn. 238.

— — ihre bisherige fehlerhafte Anlage. 239. Vorſchlag einer beſſern. 243. u. f.

Pochſteiger bey Sonderung der Aerze, wie er ſich zu verhalten. 251.

Pochwerke, wie dadurch die geringen Aerze aufzubreiten. 230. Beſchreibung derſelben. Ebend.

Pochwerke, Maſchine dazu iſt fehlerhaft. 231. wie ſie zu verbeſſern. 232. u. f.

Projection der Kugel, Abhandlung davon. 109. u. f. hießen vor Alters Planisphæria und Aſtrolabia. 112.

— — orthographiſche und ſtereographiſche, wie ſie von einander unterſchieden ſeyn. 112.

— — des Aequators, wie ſie zu finden. 126. 163.

— — eines Meridians, wie ſie zu finden. 127. 130. 147. 151.

— — eines Parallelkreiſes, wie ſie zu finden 134. u. f. 137. 153. 159.

Proportionallinie, die aus zweyen mit ſich ſelbſt multiplicirten Linien beſteht, wie ſie geometriſch zu finden. 13. u. f.

Relatio quantitativa und qualitativa der Größen, Regel davon. 11. u. f.

Rüdigers (D. Anton.) Abhandlung von den Anfangsgründen der Körper. 253. u. f.

Sal falſum mercuriale. 258.

Salz, einfaches in Metallen. 258. findet ſich in allen Körpern. 260.

Salz und Oel, dadurch werden in allen Erdgewächſen und Thieren Waſſer und Erde miteinander vereiniget.

— — iſt der Sammlungspunct von Elementen. 261.

Scheidung geringhaltiger Aerze bey Bergwerken, Abhandlung davon 225. u. f.

Salz des Urins, daraus wird der Phosphorus gemacht. 261.

Scheids (Karl Auguſt) Abhandlung von Scheidung und Aufbereitung geringhaltiger Aerze 225. u. f.

Schlemmgräben bey Bergwerken, was ſie ſeyn. 240.

Schwefel des Naturſalzes was er ſey. 262.

— — figirender, wie er entſtehe. 263.

— — kann allein als ein Grundweſen der Körper nicht angenommen werden. 268.

Sector (dioptriſcher) Branders Einleidung deſſelben. 437. u. f. Beſchreibung 440. u. f. wie man damit zu Werke gehen ſolle. 445. u. f. ſein Gebrauch in der Geometrie. 433. in der Aſtronomie. 434.

Seifenhaftes Weſen, darinnen beſteht die allen Körpern eigene Kraft. 256.

Setzwäſche bey Aerzen. Sieh Siebwäſche.

Siebwäſche bey Aerzen, was ſie ſey. 249.

Sonnenjahr (Aſtronomiſches) ſiehe tropiſches Sonnenjahr.

Sonnenuhr (magnetiſche Beſchreibung davon. 215. u. f.

Sonntagsbuchſtaben, wie ſie im neuen corrigirten Kalender zu finden. 294. u. f. Man hat dazu keine Tabellen noch Sonnenzirkel nöthig. 299. wie ſie ohne Tabellen für den Gregorianiſchen Kalender zu finden. 309. u. f. 336. u. f. Wie ſie im corrigirten Kalender nach combinirten Zirkeln zu finden. 351. u. f.

Stuffengerinne, eine neue Anlage davon. 244.

Tartarus vegitabilis enthält keinen Arſenick. 272.

Tropiſches Sonnenjahr, deſſen Größe nach verſchiedenen Syſtemen. 293. u. f. 313. 349.

Verhältniſſe, einfache und zuſammengeſetzte. 19. werden durch Logarithmen ausgedruckt. Ebendaſ.

—— ihre Ausmeſſung. 27. negative und poſitive ſind nicht einander entgegen geſetzt. 30.

Verneinte Größen, Begriff davon. 4. 7. u. f. ſind es in Anſehung ihrer Lage und Stellung. 9. u. f.

Viereck (reguläres) wie es durch Parallellinien in gleiche Theile zu theilen. 168.

—— (irreguläres) wie es durch Parallellinien in gleiche Theile zu theilen. 176.

Vollmond (öſterlicher) wie er für den corrigirten Kalender zu finden. 304. Welcher Vollmond nach dem Concilio Nicäno öſterlich ſey. Ebendaſ. und 286. Warum man ſich eher an die mittlern als wahren Vollmonde halten ſolle. 315. Wie er im corrigirten Kalender nach combinirten Zirkeln zu finden. 364. u. f.

Wäſſerichte Theile finden ſich in allen Erdgewächſen. 255.

Waſchherd bey Sonderung der Aerze, beweglicher, wie er beſchaffen ſeyn müſſe. 251.

Wur=

Wurzeln gerader Exponenten aus negativen Größen, Begriff davon. 15. von Quadraten, die poſitiv und negativ ſind, 17. 35.

Zink, deſſen Auflöſung im Salzſauren. 257.

Zirkelfläche, wie ſie durch Parallellinien in gleiche Theile zu theilen. 183. u. f.

Zirkel (Sonnen-) warum ſie die Sonntagsbuchſtaben für alle Jahre zurück richtig anzeigen. 380.

Druckfehler.

Seite.	Zeile.	Steht.	Lies.
289.	2.	des	das
293.	4.	Tage weniger	Tage, weniger
Ebend.	16.	18′	48′
304.	22.	Stunden addiret	Stunden 49′ addiret
306.	15.	man woll;	man wollte
Ebend.	21.	1790.	1760.
317.	2.	Eipactenrechnungen	Epaktenrechnung
334.	27.	vor Rom	von Rom
345.	6.	44.	34.
356.	27.	39.	35.
357.	1.	39.	35.
397.	20.	Kalenders	Kalenders.
423.	3.	praceiſchen	peactiſchen
429.	23.	Anfang	im Anfang
Ebend.	24.	Erbfolges	Erfolges
432.	25.	geſchwindiſte	geſchwindeſte
435	9.	einzeige	anzeige
448.	9.	Dcjectivgla	Objectivglas
464	6.	Waſſerwägen	Waſſerwagen

15 NOV 1934
[illegible] & Co.
[illegible] 4,649
[illegible] 45-